Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Uwe Semmelmann
Zimmer: 7.544

Wintersemester 2019/20

Vorlesung: Kähler-Mannigfaltigkeiten

Übungsblatt 9

1. Sei (M, g, J) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und sei X ein Killing-Vektorfeld, für das auch JX ein Killing-Vektorfeld ist. Zeigen Sie, dass dann X parallel sein muss.

2. Beweisen Sie, dass jedes Killing-Vektorfeld auf einer kompakten Kähler-Einstein Mannigfaltigkeit mit positiver Skalarkrümmung wenigstens zwei Nullstellen hat.

3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und sei f eine glatte Funktion auf M. Beweisen Sie die Formel

$$\mathrm{grad}\,\Delta f \;=\; (\nabla^*\nabla)(\mathrm{grad}\,f) \;+\; \mathrm{Ric}\,(\mathrm{grad}\,f)\ .$$

4. Sei (M, g, J) eine Kähler-Mannigfaltigkeit und sei u eine glatte reell-wertige Funktion auf M. Beweisen Sie, dass die Hessische $\mathrm{Hess}(u)$ genau dann eine J-invariante Bilinear-Form ist, wenn $\mathrm{grad}\,(u)$ ein reell-holomorphes Vektorfeld ist. Zeigen Sie weiter, dass dann $K := J\mathrm{grad}\,u$ ein Hamiltonsches Killing-Vektorfeld ist, d.h. es gilt $K \lrcorner\, \omega = du$.

Die Aufgaben sollen dann in der Übung vom **24. Januar 2020** besprochen werden, zusammen mit den restlichen Aufgaben der letzten Woche.