Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Uwe Semmelmann
Zimmer: 7.544

Wintersemester 2019/20

Vorlesung: Kähler-Mannigfaltigkeiten

Übungsblatt 8

1. Sei (M^{2m}, h, J) eine fast-hermitesche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass dann

$$* \alpha \;=\; i^{m(m+2)}\, \alpha$$

für alle Formen α in $\Lambda^{m,0}M$ erfüllt ist.

2. Sei (M, h, J) eine kompakte Kähler Mannigfaltigkeit, mit Kähler-Form ω, und sei $\mathcal{K}$ die in der Vorlesung definierte Menge von Funktionen auf M. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung

$$u \;\mapsto\; \omega \,+\, i\,\partial\,\bar{\partial}\,u$$

eine Bijektion definiert, von der Menge $\mathcal{K}$ auf die Menge der Kähler-Metriken, deren Kähler Form in der Kohomologie-Klasse $[\omega]$ liegen.

3. Zeigen Sie, dass das Volumen einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit nur von der Kohomologie-Klasse der Kähler-Form abhängt.

4. Sei (M^{2m}, h, J) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie:

$$\int_M \mathrm{scal}_h\, vol_h \;=\; \frac{4\pi}{(m-1)!}\, c_1(M) \,\cup\, [\omega]^{m-1} \;,$$

wobei $[\alpha] \cup [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$.

Die Aufgaben sollen dann in der Übung vom **17. Januar 2020** besprochen werden, zusammen mit den restlichen Aufgaben der letzten Woche.