Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Uwe Semmelmann
Zimmer: 7.544

Wintersemester 2019/20

Vorlesung: Kähler-Mannigfaltigkeiten
Übungsblatt 7

1. Sei f eine komplex-wertige Funktion definiert auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. In U betrachtet man Polarkoordinaten definiert durch $z = r\cos\alpha + ir\sin\alpha$. Beweisen Sie dann die Formel

$$\bar\partial\,\partial f \;=\; \frac{i}{2}\left(r\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \;+\; \frac{\partial f}{\partial r}\right) d\,r \wedge\; d\alpha\ .$$

2. Zeigen Sie, dass die ersten Chern-Klassen zweier isomorpher Bündel gleich sind und dass die erste Chern-Klasse eines trivialen Bündels verschwindet. Finden Sie ein Beispiel eines nicht-trivialen komplexen Vektorbündels E, für das $c_1(E) = 0$ gilt.

3. Sei ∇ ein Zusammenhang auf einem komplexen Vektorbündel E und sei ∇^* der induzierte Zusammenhang auf dem dualen Vektorbündel E^*, definiert durch

$$(\nabla^*_X\lambda)(e) \;:=\; X(\lambda(e)) \;-\; \lambda(\nabla_X e)\ .$$

Zeigen Sie, dass die folgende Krümmungs-Formel gilt:

$$R^{\nabla^*}(X,Y) \;=\; -\,(R^{\nabla}(X,Y))^*\ ,$$

wobei für $A \in \mathrm{End}(E)$ die Linearform $A^* \in \mathrm{End}(E^*)$ definiert ist durch:

$$A^*(\lambda)(e) \;=\; \lambda(A(e))\ .$$

4. Sei A ein schief-hermitescher Endomorphismus von $\mathbb{C}^m$ und sei $A^{\mathbb{R}}$ der entsprechende reelle Endomorphismus von $\mathbb{R}^{2m}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Tr}^{\mathbb{R}}(A^{\mathbb{R}} \circ J) \;=\; 2\,i\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{C}}(A)\ .$$

Die Aufgaben sollen dann in der Übung vom **10. Januar 2020** besprochen werden.