Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Uwe Semmelmann
Zimmer: 7.544

Wintersemester 2019/20

Vorlesung: Kähler-Mannigfaltigkeiten

Übungsblatt 5

1. Beweisen Sie, dass auf einer komplexen Mannigfaltigkeit (M^{2m}, J) der komplex-linear fortgesetzte Hodge-Stern-Operator eine Abbildung

$$* : \Lambda^{p,q} M \longrightarrow \Lambda^{m-q,m-p} M$$

definiert (siehe: Wells "Differential Analysis on Complex Manifolds").

2. Beweisen Sie, dass auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit der Hodge-Stern Operator die in der Vorlesung bewiesene Identität $[L, d^*] = d^c$ in die fundamentale Kähler-Identität $[\Lambda, d] = -\delta^c$ überführt.

3. Eine fast-komplexe Struktur J setzt sich als Derivation fort zu einer Abbildung auf den k-Formen, definiert durch:

$$J(\alpha) := \sum_{j=1}^{2m} Je_j \wedge (e_j \lrcorner\, \alpha)$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften dieser Abbildung:

(a) J ist schief-hermitesch

(b) $J(\alpha \wedge \beta) = J(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge J(\beta)$

(c) $J(\alpha) = i(q - p)$ für $\alpha \in \Lambda^{p,q}$

(d) $[J, \Lambda] = 0 = [J, L]$

4. Beweisen Sie, dass auf Kähler-Mannigfaltigkeiten die Gleichungen

$$[J, d] = d^c \qquad \text{und} \qquad [J, d^c] = -d$$

gelten und zeigen Sie, dass der Laplace-Operator Δ mit J kommutiert.

Die Aufgaben sollen dann in der Übung vom **6. Dezember 2019** besprochen werden.