Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Uwe Semmelmann
Zimmer: 7.544

Wintersemester 2019/20

Vorlesung: Kähler-Mannigfaltigkeiten
Übungsblatt 4

1. Die *bisectional curvature* von X, Y einer Kähler-Mannigfaltigkeit (M, g, J) ist definiert durch: $B(X, Y) := g(R(X, JX)JY, Y)$. Zeigen Sie, dass folgende Beziehung richtig ist:

$$g(R(X, JX)JY, Y) = g(R(X, Y)Y, X) + g(R(X, JY)JY, X) \ .$$

2. Sei (M, h, J) eine Kähler-Mannigfaltigkeit und bezeichne d, wie in Aufgabe 2, die Determinanten-Funktion der hermiteschen Metrik h. Zeigen Sie, dass dann die Ricci-Form ρ durch folgende Formel berechnet werden kann:

$$\rho = -\, i\, \partial\, \bar{\partial} \log d \ .$$

Vergleichen Sie dazu Kapitel 12.2 in "Lectures on Kähler Geometry" von Andrei Moroianu.

3. Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit (M, J) seien zwei Kähler-Metriken gegeben, die die gleiche Riemannsche Volumenform besitzen. Beweisen Sie, dass dann auch deren Ricci-Formen übereinstimmen.

4. Sei h eine hermitesche Metrik auf $\mathbb{C}^m$, mit fundamentaler 2-Form ω (bzgl. der Standard komplexen Struktur auf $\mathbb{C}^m$). Die Metrik h sei gegeben durch die Matrix $(h_{\alpha,\bar{\beta}})$ und es sei d die Determinante von $(h_{\alpha,\bar{\beta}})$. Beweisen Sie:

$$\omega^m = d\, 2^m\, m!\, \mathrm{vol} \ ,$$

wobei $\mathrm{vol} = dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dy_m$.

Die Aufgaben sollen dann in der Übung vom **29. November 2019** besprochen werden.