



**Vorlesung: Kähler-Mannigfaltigkeiten**  
**Übungsblatt 3**

1. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte fast-komplexe Struktur auf  $S^6$  die Gleichung:

$$(\nabla_X J)(X) = 0$$

für beliebige Vektorfelder  $X$  erfüllt. Fast-hermitesche Mannigfaltigkeiten, die diese Gleichung erfüllen nennt man *nearly Kähler*.

2. Sei  $(M, h, J)$  eine fast-hermitesche Mannigfaltigkeit und sei  $\nabla$  der Levi-Civita Zusammenhang von  $h$ . Beweisen Sie: für alle Vektorfelder  $X, Y, Z$  gilt die Gleichung:

$$4h((\nabla_X J)Y, Z) = 6d\omega(X, Y, Z) - 6d\omega(X, JY, JZ) + h(N_J(Y, Z), JX) .$$

3. Sei  $(M, h, J)$  eine Kähler Mannigfaltigkeit mit Skalarkrümmung  $s$  und Ricci-Form  $\rho$ , d.h.  $\rho(X, Y) = \text{Ric}(JX, Y)$ . Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$d^* \rho = -\frac{1}{2} J ds .$$

4. Sei  $(M, h, J)$  eine Kähler Mannigfaltigkeit mit Krümmungsoperator  $\mathcal{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$ . Zeigen Sie, dass die Ricci-Form das Bild der Kähler-Form unter  $\mathcal{R}$  ist.

Die Aufgaben sollen dann in der Übung vom **22. November 2019** besprochen werden.