



Vorlesung: Kähler-Mannigfaltigkeiten
Übungsblatt 3

1. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte fast-komplexe Struktur auf S^6 die Gleichung:

$$(\nabla_X J)(X) = 0$$

für beliebige Vektorfelder X erfüllt. Fast-hermitesche Mannigfaltigkeiten, die diese Gleichung erfüllen nennt man *nearly Kähler*.

2. Sei (M, h, J) eine fast-hermitesche Mannigfaltigkeit und sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang von h . Beweisen Sie: für alle Vektorfelder X, Y, Z gilt die Gleichung:

$$4h((\nabla_X J)Y, Z) = 6d\omega(X, Y, Z) - 6d\omega(X, JY, JZ) + h(N_J(Y, Z), JX) .$$

3. Sei (M, h, J) eine Kähler Mannigfaltigkeit mit Skalarkrümmung s und Ricci-Form ρ , d.h. $\rho(X, Y) = \text{Ric}(JX, Y)$. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt:

$$d^*\rho = -\frac{1}{2}Jds .$$

4. Sei (M, h, J) eine Kähler Mannigfaltigkeit mit Krümmungsoperator $\mathcal{R} : \Lambda^2 M \rightarrow \Lambda^2 M$. Zeigen Sie, dass die Ricci-Form das Bild der Kähler-Form unter \mathcal{R} ist.

Die Aufgaben sollen dann in der Übung vom **22. November 2019** besprochen werden.