Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Uwe Semmelmann
Zimmer: 7.544

Wintersemester 2019/20

**Vorlesung: Kähler-Mannigfaltigkeiten**

**Übungsblatt 1**

**1.** Sei $(M, J)$ eine komplexe Mannigfaltigkeit. Finden Sie einen Ausdruck für die Differentialoperatoren $\partial$ und $\bar{\partial}$ in lokalen holomorphen Koordinaten $(U, z)$. Schreiben Sie ausserdem die Formel $d\alpha = \sum_k e^k \wedge \nabla_{e_k} \alpha$ unter Benutzung der komplexen Basen $\{f_j\}$ und $\{f^j\}$.

**2.** Zeigen Sie, dass die reellen Formen in $\Lambda^{2,0}M \oplus \Lambda^{0,2}M$, genau die Formen $\alpha$ sind, für die $\alpha(JX, Y) = \alpha(X, JY)$ für alle (reellen) Tangentialvektoren $X, Y$ gilt.

**3.** Seien $E, F$ holomorphe Vektorbündel und $f : M \to N$ eine holomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch: $E^*$, $E \oplus F$, $f^*E$ holomorphe Vektorbündel sind.

**4.** Beweisen Sie, dass jede fast-komplexe Struktur $J$ auf einer Fläche $M^2$ integrabel ist und dass insbesondere jede orientierte Fläche eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

**5.** Zeigen Sie, dass jede komplexe Mannigfaltigkeit orientierbar ist.

**6.** Zeigen Sie, dass $\{dz_\alpha\}$ und $\{\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\}$ in jedem Punkt des lokalen Koordinatensystems $(U, z)$ duale Basen von $\Lambda^{1,0}M$ und $T^{1,0}M$ sind.

**7.** Beweisen Sie, dass eine lokale $(1, 0)$-Form $\omega = \sum \omega_\alpha \, dz_\alpha$ genau dann holomorph ist, wenn die Funktionen $\omega_\alpha$ holomorph sind.

**8.** Zeigen Sie, dass wenn $X$ reell-holomorph ist, dies auch für $JX$ gilt.

**9.**$^*$ Zeigen Sie, dass $S^1 \times S^{2k-1}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

**10.**$^*$ Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte fast-komplexe Struktur auf $S^6$ nicht integrabel ist.

Die Aufgaben sollen dann in der Übung vom **20./21. November 2019** besprochen werden.