Wiederholung (M, J) sei eine komplexe Mft.

- $f: M \to \mathbb{C}$ holomorph $\Leftrightarrow$ $f \circ \varphi_u^{-1} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ holomorph

$\Leftrightarrow$ $Z(f) = 0 \quad \forall\ Z \in T^{01}M$

$\Leftrightarrow$ df ist $(1,0)$-Form

$\Leftrightarrow$ $\bar\partial f = 0$

Beispiel. (U, φ_u) $(z_1, \dots, z_m)$ holomorphe Koordinaten

$\Rightarrow$ $z_\alpha : U \subset M \to \mathbb{C}$ ist lokal holomorph

- $Z \in \Gamma(T^{10}M)$ holomorph $\Leftrightarrow$ $Z(f)$ ist holomorph für alle f lokal holomorph

$\Leftrightarrow$ $Z = \sum Z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ lokal

zB $\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ lokal holomorph — mit Z_α holomorph auf U

- $X \in \Gamma(TM)$ reell-holomorph $\Leftrightarrow$ $X_{10} = X - iJX$ holomorph

$\Leftrightarrow$ $L_X J = 0$

- $\omega \in \Omega^{p,0}(M)$ holomorph $\Leftrightarrow$ $\bar\partial \omega = 0$

Bemerkung:
- (TM, J) ist ein komplexes VB, $J^2 = -\mathrm{Id}$ fast-komplexe Struktur

  man definiert: $(a+ib)X := aX + bJX$
- $(TM, J) \xrightarrow{\simeq} T^{10}M$ Isomorphie komplexer VB

  $\phi \quad X \mapsto X - iJX$ ist $\mathbb{C}$-linear

  da $\phi(iX) = \phi(JX) = JX + iX = i(X - iJX)$

  $= i\,\phi(X)$

9. Komplexe und holomorphe Vektorbündel

① Holomorphe Vektorbündel

Sei M eine komplexe Mft., $\pi: E \to M$ ein komplexes VB
d.h. $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{C}^k \quad \forall x \in M$

Definition: Ein komplexes VB $\pi: E \to M$ heisst holomorphes VB falls eine Trivialisierung (lokale) mit holomorphen Übergangsfunktionen existiert, d.h.

$\exists$ Atlas $\mathcal{U}$ von M und für alle $U \in \mathcal{U}$ Diffeomorphismen $\psi_U: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ mit

(i) $\pi = pr_U \circ \psi_U$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{C}^k \arrow[d, "pr_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$

(ii) $\forall U, V \in \mathcal{U}: \psi_U \circ \psi_V^{-1}(x, v) = (x, g_{UV}(x)v)$

mit $g_{UV}: U \cap V \to GL_k(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{k^2}$

holomorphe Funktionen

Beispiel 1: Sei M komplex, dann ist $TM \to M$ holomorph

da: $\mathcal{U} = \{(U, \varphi_U)\}$ holomorpher Atlas

$\psi_U: \pi^{-1}(U) = TM|_U \to U \times \mathbb{C}^m$

$\psi_U(X_x) = (x, (\varphi_U)_* X)$

$g_{UV}: U \cap V \to GL_m(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{m^2}$

$g_{UV}(x) = (\varphi_U)_* \circ (\varphi_V)_*^{-1} = (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})_*$

Beispiel 2: Sei M komplex, dann sind die Bündel $\Lambda^{p,0} T^* M$ holomorph

da $dz_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_{\alpha_p} = \sum_\beta \frac{\partial z_{\alpha_1}}{\partial w_{\beta_1}} \cdots \frac{\partial z_{\alpha_p}}{\partial w_{\beta_p}} dw_{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dw_{\beta_p}$

Bemerkung:
- $\Lambda^{p,q} T^* M$ für $q \neq 0$ ist nicht holomorph
- $TM \cong T^{10} M$ als komplexe Vektorbündel

Bemerkung: • $\pi : E \to M$ sei ein holomorphes VB

$\Rightarrow$ • E ist eine komplexe Mfk.

• π ist eine holomorphe Abbildung

• $(\pi^{-1}(U), \psi_U)$ sind holomorphe Karten für E

• äquivalente Definitionen:

! a) $\pi : E \to M$ komplexes VB, E komplexe Mfk., π holomorph

b) E komplexe Mfk., $\pi : E \to M$ holomorph, $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{C}^k$

$\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^k$ biholomorph

c) $\pi : E \to M$ komplexes VB mit holomorphen Übergangsfktl.

Bemerkung: E, F holomorphes VB, $f : M \to N$ holomorph

$\Rightarrow$ E^*, $\Lambda^k E$, $E \oplus F$, $E \otimes F$, $f^* E$, $\mathrm{Sym}^k E$

sind wieder holomorphe VB

Sei $E \to M$ ein holomorphes Vektorbündel

$\Lambda^{p,q} E := \Lambda^{p,q} T^*M \otimes E$ E-wertige (p,q)-Formen

$\Omega^{p,q}(E) := \Gamma(\Lambda^{p,q} E)$

$\bar\partial$ - Operator $\quad \bar\partial : \Omega^{p,q}(E) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(E)$

$\{e_1, \dots, e_k\}$ sei eine lokale holomorphe Basis von E, $\quad (e_i := \varphi_U^{-1}(x, e_i))$

$\Rightarrow \sigma = \sum \sigma_i \otimes e_i$ über U, $\sigma_i \in \Omega^{p,q}(U)$

man definiert: $\quad \bar\partial \sigma = \sum \bar\partial \sigma_i \otimes e_i$ - - - holomorphe Schnitt: $\bar\partial\sigma = 0$!

da e_i lok. holom.

Bemerkung: $\bar\partial$ ist wohl-definiert

da: sei $\{f_1, \dots, f_k\}$ eine weitere lokale holomorphe Basis von E

$\Rightarrow \sigma = \sum \tau_j \otimes f_j \quad$ mit $\quad \tau_j = \sum g_{je} \sigma_e$

$\Rightarrow \bar\partial\sigma = \sum_j \bar\partial \tau_j \otimes f_j \quad$ g_{je} holomorph

$= \sum_j \sum_e g_{je} \bar\partial \sigma_e \otimes f_j$

$= \sum_e \bar\partial \sigma_e \otimes e_e$

Lemma: • $\bar\partial^2 = 0$ definiert Dolbeault-Kohom.

• Leibniz - Regel

$\bar\partial(\omega \wedge \sigma) = (\bar\partial\omega) \wedge \sigma + (-1)^{p+q} \omega \wedge \bar\partial \sigma$

für alle $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$, $\sigma \in \Omega^{r,s}(E)$

$\rightarrow$

Beispiel: (M, J) komplexe Mfk., $\underset{\substack{\| \\ T^{10}M}}{TM}$ ist ein holomorphes VB

$Z \in \Gamma(T^{10}M)$ holomorph $\Leftrightarrow$ Z ist ein holomorpher Schnitt

$\Leftrightarrow Z = \sum Z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$

mit $\bar\partial Z_\alpha = 0$, d.h. Z_α ist holomorph

2 Holomorphe Strukturen

Sei $E \to M$ ein komplexes VB

- Bezeichnung: • Eine pseudo-holomorphe Struktur auf E ist ein Operator

$$\bar\partial : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$$

der die Leibniz-Regel erfüllt

• E hat eine holomorphe Struktur, falls zusätzlich $\bar\partial^2 = 0$ erfüllt ist

• Sei $(E, \bar\partial)$ ein pseudo-holomorphes Vektorbündel

$\sigma \in \Gamma(E)$ ist holomorph $\Leftrightarrow$ $\bar\partial \sigma = 0$

Lemma: Ein pseudo-holomorphes VB $(E, \bar\partial)$ ist genau dann holomorph, wenn zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U und holomorphe Schnitte σ_i von $E|_U$ existieren, für die $\{\sigma_i(x)\}$ eine Basis von E_x ist.

Beweis: • E holomorph, (U, ψ_U) holomorphe Trivialisierung

$\to$ $\sigma_i(x) := \psi_U^{-1}(x, e_i)$, $x \in U$

ist eine lokale Basis aus holomorphen Schnitten

• lokale Basis definiert lokale Trivialisierung von E

$\{\sigma_i\} \to (U, \psi_U)$, $\{\tilde\sigma_i\} \to (V, \psi_V)$

$\sigma_i = \sum g_{ij} \cdot \tilde\sigma_j$ für gewisse Funktionen g_{ij} auf $U \cap V$

$\to$ $0 = \bar\partial \sigma_i = \sum \bar\partial g_{ij} \cdot \tilde\sigma_j$ $\sigma_i, \tilde\sigma_j$ holomorph

$\to$ $\bar\partial g_{ij} = 0$ dh g_{ij} sind holomorph

$\to$ $g_{UV} = (g_{ij})$ ist holomorph

$\to$ E ist ein holomorphes VB

Bem: eventuell muss man U, V verkleinern, so dass $\{\sigma_y\}, \{\tilde\sigma_y\}$ für alle $y \in U \cap V$ Basen in E_y sind