Wiederholung

(T, J) komplexer Vektorraum: $T \cong \mathbb{R}^{2m}$, $J \in \operatorname{End}(T)$: $J^2 = -\mathrm{Id}$

Basis: $e_1, \dots, e_{2m}$ mit $J e_{2k-1} = e_{2k}$

$$T^{\mathbb{C}} = T^{10} \oplus T^{01}$$

$$\begin{aligned} T^{10} &= ER_J(i) \qquad\qquad T^{01} = \overline{T^{10}} \\ &= \{ x - iJx \mid x \in T \} \\ &= \operatorname{span}\{ e_{2k-1} - i e_{2k} \mid k = 1, \dots, m \} \\ &= \operatorname{span}\{ f_k \mid k = 1, \dots, m \} \qquad f_k := \tfrac{1}{2}(e_{2k-1} - i e_{2k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{10} &= ER_J(-i) \qquad\qquad (J\alpha)(x) := -\alpha(Jx) \\ &= \{ \alpha + iJ\alpha \mid \alpha \in T^* \} \\ &= \{ \alpha - i\alpha \circ J \mid \alpha \in T^* \} \\ &= \operatorname{span}\{ e^{2k-1} + i e^{2k} \mid k = 1, \dots, m \} \qquad e^j := g(e_j, \cdot) \\ &= \operatorname{span}\{ f^k \mid k = 1, \dots, m \} \qquad f^k := e^{2k-1} + i e^{2k} \\ &= \{ \lambda \in T^* \otimes \mathbb{C} \mid \lambda(z) = 0 \ \forall z \in T^{01} \} \end{aligned}$$

($\underline{\text{da}}$: $(\alpha - i\alpha J)(x + iJx) = \alpha(x) + i\alpha(Jx) - i\alpha(Jx) - \alpha(x) = 0$)

Bemerkung:

- $f^k(\overline{f_j}) = 0$, $\quad f^k(f_j) = \delta_{kj}$

- Seien $(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m)$ komplexe Koordinaten, dh:
$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}$$
dann:
$$f_k = \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$
$$f^k = dz_k = dx_k + i\, dy_k$$

- $T^* \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{10} \oplus \Lambda^{01}$

$$\Lambda^{p,0} := \Lambda^p(\Lambda^{10})$$
$$= \operatorname{span}\{ f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_p \le m \}$$

$$\Lambda^{0,q} = \Lambda^q(\Lambda^{01}) = \overline{\Lambda^{q0}}$$
$$= \operatorname{span}\{ \bar f^{i_1} \wedge \dots \wedge \bar f^{i_p} \mid \dots \} \qquad \bar f^k = e^{2k-1} - i e^{2k}$$

$$\Lambda^{p,q} = \Lambda^{p,0} \otimes \Lambda^{0,q}$$
$$= \operatorname{span}\{ f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \wedge \bar f^{j_1} \wedge \dots \wedge \bar f^{j_k} \mid \dots \} \qquad \otimes \, !$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda^k T \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}$$

<u>Bemerkung</u>:

- $\omega \in \Lambda^{0,k} \iff Z \lrcorner \omega = 0 \quad \forall Z \in T^{10}$ <u>da</u> $\bar f^j(f_i) = 0$
- $\omega \in \Lambda^{p,q}$
  $\iff Z_1 \lrcorner \dots \lrcorner Z_{p+1} \lrcorner \omega = 0, \quad Z_i \in T^{10}$
  $\quad\; Z_1 \lrcorner \dots \lrcorner Z_{q+1} \lrcorner \omega = 0, \quad Z_i \in T^{01}$

<u>Übertragung auf Mfk.</u>

$$TM \otimes \mathbb{C} = T^{10}M \oplus T^{01}M$$
$$T^*M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{10}M \oplus \Lambda^{01}M \qquad \Lambda^{10}M = \dot{\bigcup_{x \in M}} \Lambda^{1,0} \text{ bzgl. } T_x$$
$$\Lambda^{p,q}M = \Lambda^p(\Lambda^{10}M) \otimes \Lambda^q(\Lambda^{01}M)$$

$$\Omega^{p,q}(M) = \Gamma(\Lambda^{p,q}M)$$

<u>Bemerkung</u>:

$$dz_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z_\beta}\right) = \delta_{\alpha\beta}$$

$$dz_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \bar z_\beta}\right) = 0$$

zz: J integrabel $\Leftrightarrow$ $d(\Omega^{1,0}(M)) \subset \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M)$

$\Leftrightarrow$ $(d\alpha)^{(0,2)} = 0 \quad \forall\ \alpha \in \Omega^{1,0}(M)$

$\Leftrightarrow$ $(d\alpha)(Z,W) = 0 \quad \forall\ \alpha \in \Omega^{1,0}(M),\ Z,W \in \Gamma(T^{0,1}M)$

da $(d\alpha)^{(0,2)} = \sum a_{ij}\, \bar{f}^i \wedge \bar{f}^j$

$(d\alpha)^{(0,2)} = 0 \Leftrightarrow (d\alpha)^{(0,2)}(\bar{f}_i, \bar{f}_j) = 0$

$\Leftrightarrow d\alpha\, (\bar{f}_i, \bar{f}_j) = 0$

$\Leftrightarrow d\alpha\, (Z, W) = 0 \quad \forall Z,W \in \Gamma(T^{0,1}M)$

$\Leftrightarrow$ $\alpha([Z,W]) = 0 \quad \forall \alpha \in \Omega^{1,0},\ Z,W \in T^{0,1}$

da $d\alpha(Z,W) = Z(\alpha(W)) - W(\alpha(Z)) - \alpha([Z,W])$
$\alpha(W) = 0 = \alpha(Z)$

$\Leftrightarrow$ $[Z,W] \in \Gamma(T^{0,1}M)$

3 $\Leftrightarrow$ 4

- Vor: 3 : $d(\Omega^{1,0}(M)) \subset \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M)$

  $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$

  lokal is α Linearkombination von Formen.

  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \wedge \bar{\tau}_1 \wedge \dots \wedge \bar{\tau}_q \qquad ,\ \omega_i, \tau_j \in \Omega^{1,0}(U)$, $U \subset M$

  $d(\omega_1 \wedge \dots \wedge \bar{\tau}_q) = d\omega_1 \wedge \dots \quad \dots \pm \omega_1 \wedge \dots \wedge (d\bar{\tau}_q)$

  $d\omega_i \in \Omega^{2,0}(U) \oplus \Omega^{1,1}(U)$

  $d\bar{\tau}_i = \overline{d\tau_i} \in \Omega^{0,2}(U) \oplus \Omega^{1,1}(U)$

$\rightarrow d\alpha \in \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}$

umgekehrt: 3 ist Spezialfall von 4

Folgerung: Das Differential auf einer komplexen Mfk. ist die Summe zweier Differentialoperatoren:

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

wobei

$$\partial : \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$$

$$\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$$

ÜA: $\partial, \bar{\partial}$ in lokalen Koordinaten

2 Holomorphe Objekte auf komplexen Mfk.

<u>allgemeine Vor.:</u> (M, J) komplexe Mfk., der komplexen Dimension m

<u>Lemma.</u> Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine glatte komplex-wertige Funktion auf M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1. f ist holomorph
2. $Z(f) = 0 \quad \forall\, Z \in T^{01}M$
3. df ist eine $(1,0)$-Form
4. $\bar{\partial} f = 0$ siehe Bsp. 1

<u>Beweis:</u> 2 $\Leftrightarrow$ 3 : $df \in \Omega^{10}(M) \Leftrightarrow df(Z) = 0 \quad \forall\, Z \in T^{01}M$

$$\Leftrightarrow Z(f) = 0 \quad \forall\, Z \in T^{01}M$$

3 $\Leftrightarrow$ 4 klar: $d = \partial + \bar{\partial}$

1 $\Leftrightarrow$ 3 $\quad f$ holomorph $\Leftrightarrow f \circ \varphi_u^{-1}$ ist holomorph $\forall\, (U, \varphi_u)$

$$\Leftrightarrow f_* \circ (\varphi_u)^{-1}_* \circ j_m = i \cdot f_* \circ (\varphi_u)^{-1}_* \quad \big|\ \circ (\varphi_u)_*$$

$$\Leftrightarrow f_* \circ J = i\, f_*$$

$$\Leftrightarrow df(JX) = i\, df(X) \quad \forall\, X \in TM$$

$$\Leftrightarrow i\, df(X + iJX) = 0 \quad \forall\, X \in TM$$

$$\Leftrightarrow df \in \Omega^{10}(M)$$

<u>Lemma:</u> $\partial^2 = 0 \ , \ \bar{\partial}^2 = 0 \ , \ \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$

<u>Beweis:</u> $\cdot\ 0 = d^2 = (\partial + \bar{\partial})^2 = \partial^2 + \bar{\partial}^2 + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)$

- die drei Summanden haben Bilder in verschiedenen Unterbündeln von $\Lambda^*_{\mathbb{C}} T^*M$ und müssen daher separat Null sein

<u>Beispiel:</u> Die komplexen Koordinatenfunktionen $z_\alpha : U \subset M \to \mathbb{C}^m$, $\alpha = 1, \dots, m$ sind lokal-definierte holomorphe Funktionen

<u>Bemerkung:</u> $\partial f = \sum \frac{\partial f}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \ , \quad \bar{\partial} f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} d\bar{z}_\alpha$

<u>Definition:</u>

- Ein Vektorfeld $Z \in \Gamma(T^{10}M)$ heisst <u>holomorph</u>, falls $Z(f)$ holomorph ist für jede lokal definierte holomorphe Funktion f.

d.h. holom. VF erhalten beim Ableiten die Holomorphie

- Eine p-Form $\omega \in \Omega^{p,0}(M)$ heisst <u>holomorph</u>, falls $\bar\partial \omega = 0$
- Ein reelles Vektorfeld X heisst <u>reell-holomorph</u>, falls seine (1,0)-Komponente $X - iJX$ ein holomorphes Vektorfeld ist

<u>Lemma:</u> Sei X ein reelles Vektorfeld auf einer komplexen Mfk. (M, J). Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) X ist reell-holomorph

(ii) $L_X J = 0$ $\quad \left(\Leftrightarrow J \circ L_X = L_X \circ J \quad \Leftrightarrow J[X,Y] = [X, JY] \right)$

(iii) Der Fluß von X besteht aus holomorphen Transformationen von M.

<u>Bemerkung:</u> $f: (M_1, J_1) \to (M_2, J_2)$ heisst holomorph genau dann, wenn $f_* \circ J_1 = J_2 \circ f_*$

<u>Beweis des Lemmas</u>

- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): $\quad (\varphi_t)_* \circ J = J \circ (\varphi_t)_*$ $\qquad$ (iii) $\Rightarrow$ (ii)

$$\Leftrightarrow (\varphi_t)_* \circ J \circ (\varphi_t)_*^{-1} = J$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t)_* \circ J \circ (\varphi_t)_*^{-1} = 0 \quad \Rightarrow L_X J = 0$$

- $Z \in \Gamma(TM^{\mathbb{C}})$ ist vom Typ (0,1)

$\Leftrightarrow Z(f) = 0$ für jede lokal-definite holomorphe Funktion f

<u>da</u> $\left(Z \in \Gamma(T^{01}M) \Leftrightarrow Z = \sum_i Z_i \frac{\partial}{\partial \bar z_i} \right.$

$\left. \qquad \Rightarrow Z(f) = \sum_i Z_i \frac{\partial}{\partial \bar z_i}(f) \quad , \frac{\partial}{\partial \bar z_i} \in \Gamma(T^{01}M) \right)$

- $Z \in \Gamma(T^{01}M) \xrightarrow{\text{Lemma}} Z(f) = 0$ $\qquad$ f lok. holom.
- $Z(f) = 0 \Rightarrow Z(z_i) = 0$, $Z = \sum_i Z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_i \hat Z_i \frac{\partial}{\partial \bar z_i}$

$Z_i = Z(z_i) = 0 \quad \Rightarrow Z = \sum_i \hat Z_i \frac{\partial}{\partial \bar z_i} \in \Gamma(T^{01}M)$

(i) $\Rightarrow$ (ii): X sei ein reell-holomorphes VF, Y beliebiges reelles VF, f lokal-holom. Fkt.

$$\Leftrightarrow (X + iJX)(f) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - iJX)(f) = 2X(f)$$

$X - iJX$ holomorphes VF $\rightarrow$ $X(f)$ ist holomorph

$$\rightarrow (Y + iJY)(X(f)) = 0$$

$$(Y + iJY)(f) = 0$$

$\Rightarrow [Y + iJY, X](f) = 0$ $\quad\forall$ lokal-holom. Fkt. f (Lemma S. 11)

$\rightarrow [Y + iJY, X]$ ist vom Typ $(0,1)$

$[Y, X] + i[JY, X]$ ist vom Typ $(0,1)$

$$\Leftrightarrow [JY, X] = J[Y, X]$$

$$\rightarrow (L_X J)Y = L_X(JY) - J(L_X Y)$$

$$= [X, JY] - J[X, Y] \quad \forall Y$$

$$\rightarrow L_X J = 0$$

(ii) $\rightarrow$ (i) ÜA

Bemerkung: (Bochner-Montgomery) Sei M eine kompakte komplexe Mfk. Dann ist die Gruppe aller holomorphen Transformationen von M eine Lie-Gruppe, deren Lie-Algebra genau der Raum der reell-holomorphen Vektorfelder ist.

dim $< \infty$!
$\uparrow$
da $\bar\partial$ ellipt.!

Satz (**Lokales $i\partial\bar\partial$-Lemma**)

Sei $\omega \in \Omega^{11}(M) \wedge \Omega^2(M)$ eine reelle 2-Form vom Typ $(1,1)$ auf einer komplexen Mfk. M. Dann ist ω genau dann geschlossen, wenn jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass:

$$\omega|_U = i\partial\bar\partial u$$

für eine gewisse reelle Funktion u auf U.

Zum Beweis:

"$\Leftarrow$" $\quad \omega = i\,\partial\bar\partial u$ auf U

$$\Rightarrow d\omega = i\, d(\partial\bar\partial u) = i\,(\partial + \bar\partial)\,\partial\bar\partial u$$
$$= i\,(\partial^2\bar\partial u + \bar\partial\partial\bar\partial u) = i\,(\partial^2\bar\partial u - \partial\bar\partial^2 u) = 0$$

"$\Rightarrow$" $\quad$ Dolbeault-Lemma: Eine $\bar\partial$-geschlossene $(0,1)$-Form ist lokal $\bar\partial$-exakt.

(komplexe Form des Poincaré-Lemmas)

Sei ω geschlossen, reell, vom Typ $(1,1)$

(Poincaré-Lemma) $\exists$ lokale reelle 1-Form τ mit: $\omega = d\tau$

$\tau = \tau^{10} + \tau^{01}$, $\quad \overline{\tau^{10}} = \tau^{01}$ $\quad$ da reell

$$\Rightarrow \omega = d\tau = \underbrace{\bar\partial\tau^{01}}_{\Lambda^{02}} + \underbrace{(\partial\tau^{01} + \bar\partial\tau^{10})}_{\Lambda^{11}} + \underbrace{\partial\tau^{10}}_{\Lambda^{20}}$$

$\Rightarrow \bar\partial\tau^{01} = 0$

$\Rightarrow$ (Dolbeault) $\exists$ lokal-definierte Funktion f: $\quad \tau^{01} = \bar\partial f$

$\tau^{10} = \partial\bar f$

$$\Rightarrow \omega = \partial\tau^{01} + \bar\partial\tau^{10}$$
$$= \partial\bar\partial f + \bar\partial\partial\bar f$$
$$= \partial\bar\partial(f - \bar f)$$
$$= i\,\partial\bar\partial\,(2\,\mathrm{Im}(f))$$
$$= i\,\partial\bar\partial u \quad \text{für } u := 2\,\mathrm{Im}(f)$$

$\left(\begin{array}{l}(\mathrm{Re} + i\,\mathrm{Im}) - (\mathrm{Re} - i\,\mathrm{Im}) \\ = 2i\,\mathrm{Im}\end{array}\right)$

Vor: ω ist eine reelle 2-Form

Bemerkung: ω ist eine $(1,1)$-Form und reell

$\Leftrightarrow \omega(X,Y) = \omega(JX, JY)$ für alle reellen VF X, Y $\quad (*)$

da ω ist $(1,1)$-Form $\Leftrightarrow$ $\omega(X + iJX, Y + iJY) = 0$

$\omega(X - iJX, Y - iJY) = 0$ $\quad$ folgt durch Konjugation!

$$\Leftrightarrow \omega(X,Y) - \omega(JX, JY) + i\,(\omega(JX, Y) + \omega(X, JY)) = 0$$
$$\omega(X,Y) - \omega(JX, JY) - i\,(\omega(JX, Y) + \omega(X, JY)) = 0$$