Wiederholung

- holomorphe Vektorbündel: $E \xrightarrow{\pi} M$
  - M komplexe Mfk.
  - E " – " + $\mathbb{C}$-VB über M
  - π holomorphe Abbildung

äquivalent: E ist ein $\mathbb{C}$-VB über der komplexen Mfk. M mit holomorphen Übergangsfunktionen

M komplex $\to TM$ $\mathbb{C}$-VB

- $\Lambda^{p,q}E = \Lambda^{p,q}M \otimes E$

  $\Omega^{p,q}(E) = \Gamma(\Lambda^{p,q}E)$

- E, F holomorphe VB
  Isomorphismus von holom. VB: $\varphi: E \to F$ mit holom. + VB Iso.

- $E \xrightarrow{\pi} M$ holomorphes VB

  $\rightsquigarrow$ $\bar\partial$ - Operator auf $\Omega^{p,q}(E)$

  $\bar\partial\sigma := \sum_i \bar\partial\sigma_i \otimes e_i$ $\qquad$ $\sigma = \sum_i \sigma_i \otimes e_i$ über $U \subset M$

  $\{e_i\}$ lokale holomorphe Basis von E (holomorphe Schnitte)
  $\sigma_i \in \Omega^{p,q}(U)$

- nicht jedes $\mathbb{C}$-VB hat eine holom. Struktur, ein $\mathbb{C}$-VB kann verschiedene holom. Strukturen tragen

① Leibniz-Regel: $\bar\partial(\omega \wedge \sigma) = (\bar\partial\omega)\wedge\sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge \bar\partial\sigma$

für $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$, $\sigma \in \Omega^{r,s}(E)$

② $\bar\partial^2 = 0$

- pseudo-holomorphe Struktur auf $\mathbb{C}$-VB E: $\bar\partial: \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$ mit Leibniz-Regel ①

  holomorphe Schnitte in E: $\sigma \in \Gamma(E)$ mit $\bar\partial\sigma = 0$

- holomorphe Struktur: $\mathbb{C}$-VB E, $\bar\partial$ mit Leibniz-Regel und $\bar\partial^2 = 0$ (① + ②)

- Lemma: $(E, \bar\partial)$ pseudo-holomorph

  holomorph $\Leftrightarrow$ $\forall x \in M\ \exists U, \sigma_i \in E|_U$ holomorph so dass $\{\sigma_i(x)\}$ eine Basis von E_x ist

Theorem: Ein komplexes VB E ist genau dann holomorph, wenn eine holomorphe Struktur $\bar\partial$ existiert.

Beweis: • E holomorph $\to$ es ex. holomorphe Struktur $\bar\partial$, schon gezeigt

• $E \to M$ komplexes VB, $\bar\partial$ holomorphe Struktur

ZZ E besitzt eine Trivialisierung durch holomorphe Schnitte (mit Lemma)

Sei $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ eine beliebige lokale Trivialisierung über U, $x \in U$

$\to$ $\bar\partial \sigma_i = \sum_j \tau_{ij} \otimes \sigma_j$

für gewisse $(0,1)$-Formen τ_{ij} auf U

$\to$ $0 = \bar\partial^2 \sigma_i = \sum_j \bar\partial \tau_{ij} \otimes \sigma_j - \sum \tau_{il} \wedge \tau_{lj} \otimes \sigma_j$

$\to$ $\bar\partial \tau_{ij} = \sum_l \tau_{il} \wedge \tau_{lj}$ $\quad \forall\ 1 \le i,j \le k$ $\qquad (*)$

• Sei $f = (f_{ij}) : U' \to GL_k(\mathbb{C})$ eine Abbildung mit

$0 = \bar\partial f_{ij} + \sum_l f_{il} \tau_{lj}$ $\qquad U' \subset U$ offen, $x \in U'$ $\qquad (**)$

$\Rightarrow$ $s_j := \sum_l f_{jl} \sigma_l$ sind holomorphe Schnitte von $E|_{U'}$

dg: $\bar\partial s_j = \sum_l \bar\partial f_{jl} \otimes \sigma_l + \sum_{r,l} f_{jr} \tau_{rl} \otimes \sigma_l = 0$

Lemma: Sei $\tau = (\tau_{ij})$ eine $gl_k(\mathbb{C})$-wertige $(0,1)$-Form auf U mit

Lemma $\Downarrow$ Theorem

$$\bar\partial \tau = \tau \wedge \tau \qquad (*)'$$

Dann existiert zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung U' und eine Abbildung $f : U' \to GL_k(\mathbb{C})$, $f = (f_{ij})$ mit

$$\bar\partial f + f \cdot \tau = 0 \qquad (**)'$$

Beweis: • definiere fast-komplexe Struktur auf $U \times \mathbb{C}^k$ mit τ

• Integrabilität wegen $(*)$

• f als Matrix

Motivation: • stabile Bündel $\Longleftrightarrow$ Einstein-Hermite Metriken

• holomorphe Bündel $\Longleftrightarrow$ Instantonen / Yang-Mills-Gln. in Dimension 4

- $N := U \times \mathbb{C}^k$, oBdA $U \subset \mathbb{C}^m$ offen

holom. (komplexe) Koordinaten z_i ; w_i irgendwelche Koor.

ein beliebiges Komplement

T mit $\Lambda^1_{\mathbb{C}} T^*N = \overline{T} \oplus T^*N$ mit $i\,T = T$ (ÜA)

$\to$ T definiert fast-komplexe Struktur auf N mit T = Raum der (1,0)-Formen

- man definiert $T := \operatorname{span}\{dz_\alpha,\ dw_i - \sum \tau_{ie} w_e \mid 1 \le \alpha \le m, 1 \le i \le k\} \subset \Lambda^1_{\mathbb{C}} T^*N$

Behauptung: J_T ist integrabel

$\Lambda^{20} \oplus \Lambda^{11}$, $T = \Lambda^{10}$

$\Lambda^1_{\mathbb{C}} N = \Lambda^{10} \oplus \Lambda^{01}$

Beweis: zz $d\,\Gamma(T) \subset \Gamma(T \wedge \Lambda^1_{\mathbb{C}} T^*N)$

es genügt diese Beziehung auf einer Basis von T zu überprüfen

$\cdot\ d(dz_\alpha) = 0$

$\cdot\ d(dw_i - \sum_e \tau_{ie} w_e) = -\sum \partial\tau_{ie} \cdot w_e - \underline{\overline{\partial}\tau_{ie}} \cdot w_e + \tau_{ie} \wedge dw_e$

$\overset{(*)}{=} -\sum \partial\tau_{ie} \cdot w_e - \sum \tau_{is} \wedge \tau_{se} \cdot w_e + \sum \tau_{is} \wedge dw_s$

$= -\sum \partial\tau_{ie} \cdot w_e + \sum_s \tau_{is} \wedge (dw_s - \sum_e \tau_{se} \cdot w_e)$

$\in \Gamma(T \wedge \Lambda^1_{\mathbb{C}} T^*N)$ $\tau_{ik} \in \Omega^{01}(U)$

$\Rightarrow$ komplexe Koordinaten (z_α, u_e) auf $U' \times \mathbb{C}^k$, $U' \subset U$

$U' \subset U$ kleiner mit neuen komplexen Koordinaten nach Newlander-Nirenberg, die $\{z_i\}$ vervollständigen

du_e sind Schnitte von T $(\overline{\partial} u_e = 0)$

$\to \exists\ F_{ei}, F_{e\alpha}$ $1 \le i, e \le k$, $1 \le \alpha \le m$

$du_e = \sum_i F_{ei}\,(dw_i - \sum_k \tau_{ik} w_k) + \sum_\alpha F_{e\alpha}\, dz_\alpha$

$\to 0 = \sum_i dF_{ei} \wedge (dw_i - \sum_k \tau_{ik} w_k) + F_{ei}(-\sum_k d\tau_{ik} w_k + \tau_{ik} \wedge dw_k)$
$+ \sum dF_{e\alpha} \wedge dz_\alpha$ (*)

! $\xrightarrow{w_i = 0}$ $0 = \sum_k dF_{ek}(z,0) \wedge \underline{dw_k} + \sum F_{ei}(z,0)\,\tau_{ik} \wedge \underline{dw_k} + \sum dF_{e\alpha} \wedge \underline{d\overline{z}_\alpha}$
$(i \leftrightarrow k)$

$f_{ek}(z) := F_{ek}(z,0)$, $\overline{\partial} f_{ek} = \Lambda^{01} T^*U'$-Teil von $dF_{ek}(z,0)$

man betrachtet den $\Lambda^{01} T^*U' \otimes \Lambda^{10} \mathbb{C}^k$ - Teil von (*)

$\to$ $0 = \overline{\partial} f_{ek} + \sum_i f_{ei} \tau_{ik}$ $\tau_{ik} \in \Omega^{01}(U')$

(*): $0 = \sum (dF_{ek}(z,0) + F_{ei}(z,0)\tau_{ik}) \wedge \underline{dw_k} + \sum dF_{e\alpha} \wedge \underline{dz_\alpha}$

③ Das kanonische Bündel von $\mathbb{C}P^m$

Sei (M, J) eine komplexe Mfk., $\dim_{\mathbb{C}} M = m$

Definition: Das kanonische Bündel von M ist definiert als

$$K_M := \Lambda^{m,0} M$$

Lemma: Das kanonische Bündel ist ein holomorphes Geradenbündel.

Definition: Das tautologische Geradenbündel auf $\mathbb{C}P^m$ ist definiert durch:

$$\pi : L \longrightarrow \mathbb{C}P^m, \quad L_{[z]} = \mathbb{C}z \subset \mathbb{C}^{m+1}, \quad [z] \in \mathbb{C}P^m$$

dh $L = \{ (\ell, v) \in \mathbb{C}P^m \times \mathbb{C}^{m+1} \mid v \in \ell \}$

Lemma: $L \to \mathbb{C}P^m$ ist ein holomorphes Geradenbündel

Beweis: $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ seien die Standard-holomorphen Koordinaten auf $\mathbb{C}P^m$

lokale Trivialisierung, $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$ $\qquad \alpha = 0, \dots, m$

$$\psi_\alpha([z], w) = ([z], w_\alpha) \qquad w_\alpha \neq 0 \text{ auf } U_\alpha!$$

$\Rightarrow \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}([z], \lambda) = ([z], g_{\alpha\beta}([z]) \cdot \lambda)$

mit $g_{\alpha\beta}([z]) = \dfrac{z_\alpha}{z_\beta}$ $\qquad$ da $\psi_\beta^{-1}([z], \lambda) = ([z], \frac{\lambda}{z_\beta} \cdot z)$

dh $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ist holomorph

$(w_1, \dots, w_m) \mapsto w_\alpha$ in lokalen Koordinaten

da $(w_1, \dots, w_m) \mapsto [w_1 : \dots : \underset{\beta}{1} : \dots w_m] \quad (\varphi_\beta^{-1})$

$\mapsto w_\alpha \quad (g_{\alpha\beta})$

$\rightarrow L$ ist holomorphes Geradenbündel

Bezeichnung: $L^* = \mathcal{O}(1)$, $\quad L = \mathcal{O}(-1)$

$L^m = \mathcal{O}(m) \qquad L^* = H$ Hyperebenenbündel