Kapitel N

Stochastische Modelle und Näherungen

Inhalt dieses Kapitels

Motivation

Viele Zufallsexperimente beschreiben wir durch Standardmodelle:

- Produktraum bei unabhängig durchgeführten Experimenten,
- Ziehung von Losen (mit/ohne Zurücklegen, mit/ohne Reihenfolge),
- Schubfachmodelle (mit geeigneten zusätzlichen Bedingungen).

Die entstehenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind zwar vielfältig, haben aber Gemeinsamkeiten, die Sie kennen und nutzen sollten.

Drei besonders wichtige werden wir in diesem Kapitel behandeln:

- die hypergeometrische Verteilung $H(N, K, n)$ für Stichproben,
- die Binomialverteilung $B(n, t)$ für Trefferanzahlen,
- die Poisson–Verteilung $P(\lambda)$ als Näherung.

Viele Rechnungen vereinfachen wir durch asymptotische Näherungen:

- Für große Stichproben ($N \to \infty$) gilt $H(N, K, n) \approx B(n, K/N)$.
- Gesetz der kleinen Zahlen: $B(n, t) \approx P(nt)$ für kleines t.
- Lokaler Grenzwertsatz: $B(n, t) \approx N(\mu, \sigma^2)$.

Vorgehensweise

Abschätzung von Risiken ist eine typische und wichtige Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Ingenieurwissenschaften.

Ich beginne daher mit Produktexperimenten als Modell unabhängiger Ereignisse und ersten Anwendungen auf Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Nach Einführung der Urnenmodelle kommen wir zu Stichproben und damit zu hypergeometrischen, Binomial- und Poisson–Verteilungen.

Auf Grundlage eines stochastischen Modells können Sie die gesuchten Wkten exakt berechnen, d.h. aus dem angenommenen Modell ableiten.

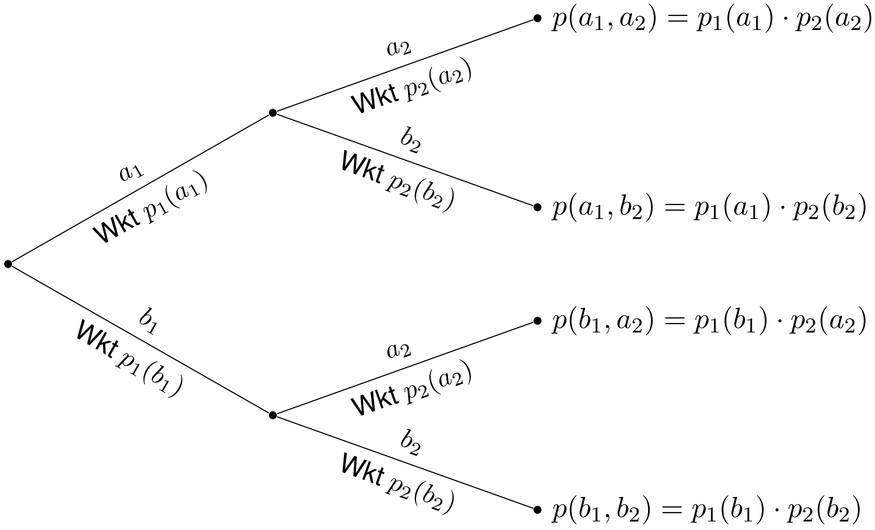
Oft ist die exakte Berechnung zu aufwändig und Sie begnügen sich mit einer guten Näherung. Nützliche Tricks sollten Sie kennen und nutzen!

Grenzwertsätze formuliere ich möglichst mit expliziten Fehlerschranken. Dies ermöglicht, die üblichen Approximationen nicht nur blind oder naiv nach Gefühl anzuwenden, sondern bequem ihre Güte abzuschätzen.

Ob neben der Berechnung der Approximation auch eine Abschätzung des Fehlers notwendig ist, hängt vom geforderten Sicherheitsniveau ab. Die Werkzeuge hierzu sind jedenfalls vorhanden und nicht schwierig.

Baummodell für unabhängige Experimente

Durchführung von zwei **unabhängigen Experimenten**:
$(\Omega_1 = \{a_1, b_1, \dots\}, \mathbf{P}_1)$ und $(\Omega_2 = \{a_2, b_2, \dots\}, \mathbf{P}_2)$.



Produkt von Wahrscheinlichkeitsräumen

Definition N1A (Produktwahrscheinlichkeit)

Seien $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ diskrete Wahrscheinlichkeitsräume.

Der Produktraum ist das **kartesische Produkt**

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \left\{ \, (\omega_1, \omega_2) \;\middle|\; \omega_1 \in \Omega_1, \; \omega_2 \in \Omega_2 \, \right\}.$$

Die **Produktwahrscheinlichkeit** $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ ist

$$\mathbf{P}\big(\{(\omega_1, \omega_2)\}\big) = \mathbf{P}_1\big(\{\omega_1\}\big) \cdot \mathbf{P}_2\big(\{\omega_2\}\big).$$

Per Additivität setzt sich dies auf alle Ereignisse $A \subset \Omega$ fort zu

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in A} \mathbf{P}_1\big(\{\omega_1\}\big) \cdot \mathbf{P}_2\big(\{\omega_2\}\big).$$

Der **Produktraum** $(\Omega, \mathbf{P}) = (\Omega_1, \mathbf{P}_1) \times (\Omega_2, \mathbf{P}_2) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2)$ ist selbst ein diskreter WRaum: $\mathbf{P}$ ist additiv und $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Ausfallwahrscheinlichkeit bei 2 Teilen

Aufgabe: Eine Maschine bestehe aus zwei unabhängigen Teilen. Ihre Ausfallwkten seien $p_1 = 0.1 = 10\%$ und $p_2 = 0.2 = 20\%$.

(1) Konstruieren Sie als Modell hierfür explizit einen WRaum $(\Omega, \mathbf{P})$.

(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren beide? fällt eins aus?

Lösung: (1) Stochastisches Modell $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$ für Teil T_1 allein:

$$\Omega_1 = \{0, 1\} \quad \text{mit} \quad 0 = \text{„}T_1 \text{ fällt aus“}, \qquad 1 = \text{„}T_1 \text{ funktioniert“}$$
$$\mathbf{P}_1(\{0\}) = p_1 = 0.1, \quad \mathbf{P}_1(\{1\}) = \overline{p_1} = 0.9$$

Stochastisches Modell $(\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ für Teil T_2 allein:

$$\Omega_2 = \{0, 1\} \quad \text{mit} \quad 0 = \text{„}T_2 \text{ fällt aus“}, \qquad 1 = \text{„}T_2 \text{ funktioniert“}$$
$$\mathbf{P}_2(\{0\}) = p_2 = 0.2, \quad \mathbf{P}_2(\{1\}) = \overline{p_2} = 0.8$$

Wegen Unabhängigkeit ist der Produktraum hier das richtige Modell: Wir betrachten also den Produktraum $(\Omega, \mathbf{P}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2)$, also $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$ mit Produktwahrscheinlichkeit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$.

Ausfallwahrscheinlichkeit bei 2 Teilen

(2) Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der beiden Teile ist die Produktwahrscheinlichkeit hier das richtige Modell:

T_1 fällt aus und T_2 fällt aus:	$\mathbf{P}(\{00\}) = p_1 \cdot p_2 = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$
T_1 fällt aus und T_2 funktioniert	$\mathbf{P}(\{01\}) = p_1 \cdot \overline{p_2} = 0.1 \cdot 0.8 = 0.08$
T_1 funktioniert und T_2 fällt aus:	$\mathbf{P}(\{10\}) = \overline{p_1} \cdot p_2 = 0.9 \cdot 0.2 = 0.18$
T_1 funktioniert und T_2 funktioniert:	$\mathbf{P}(\{11\}) = \overline{p_1} \cdot \overline{p_2} = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$

Mit Wahrscheinlichkeit 0.72 funktionieren beide Teile.
Mit Wahrscheinlichkeit 0.28 fällt (mindestens) eins aus.

Ausfallwahrscheinlichkeit bei n Teilen

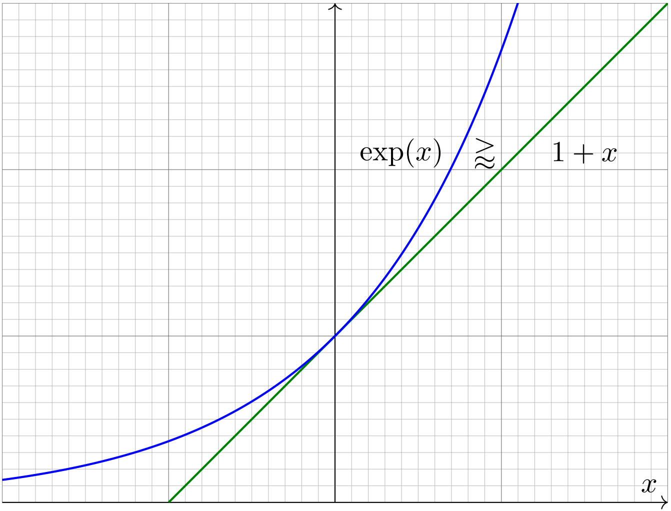
Eine Maschine bestehe aus **unabhängigen** Teilen $T_1, \dots, T_n$.
Jedes Teil T_k hat eine gewisse Ausfallwahrscheinlichkeit $p_k \in [0,1]$.

Aufgabe: Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren alle Teile?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt (mindestens) ein Teil aus?

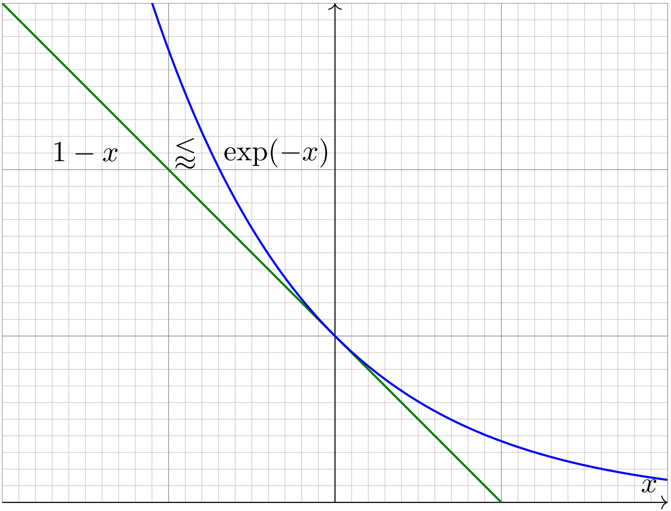
Lösung: Für diese Wkten gilt exakt bzw. näherungsweise:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\text{Alle Teile funktionieren}) &= (1-p_1)\cdots(1-p_n) \\
&\lessapprox \mathrm{e}^{-p_1}\cdots\mathrm{e}^{-p_n} = \mathrm{e}^{-(p_1+\dots+p_n)}. \\
\mathbf{P}(\text{Mindestens ein Teil fällt aus}) &= 1-(1-p_1)\cdots(1-p_n) \\
&\gtrapprox 1-\mathrm{e}^{-(p_1+\dots+p_n)}.
\end{aligned}$$

Erinnerung: Taylor–Entwicklung $\exp(x) \gtrapprox 1 + x$



Erinnerung: Taylor–Entwicklung $\exp(-x) \gtrapprox 1-x$



Ausfallwahrscheinlichkeit bei n Teilen

Satz N1B (Ausfallwahrscheinlichkeiten)

Von n unabhängigen Teilen habe jedes Ausfallwkt $p \in [0,1]$. Dann gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{P}(\textit{Alle Teile funktionieren}) &= (1-p)^n &&\lessapprox \mathrm{e}^{-np} \\ \mathbf{P}(\textit{Mindestens eins fällt aus}) &= 1-(1-p)^n &&\gtrapprox 1-\mathrm{e}^{-np} \end{aligned}}$$

Aufgabe: Bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit $p = 0.01$,
mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren alle Bauteile?

Bei 50 Bauteilen? Wahrscheinlichkeit $0.99^{50} \approx \mathrm{e}^{-0.5} \approx 0.61$

Bei 100 Bauteilen? Wahrscheinlichkeit $0.99^{100} \approx \mathrm{e}^{-1} \approx 0.37$

Bei 200 Bauteilen? Wahrscheinlichkeit $0.99^{200} \approx \mathrm{e}^{-2} \approx 0.14$

Wahrscheinlichkeit eines Reaktorunfalls

Aus der Presse (La Libération vom 3.6.2011):
„In $14\,000$ Reaktorjahren sind 4 Unfälle der höchsten Stufe aufgetreten. Demnach tritt bei 143 europäischen Reaktoren in 30 Jahren ein solcher Unfall mit Wahrscheinlichkeit von über 100% auf.“

Dieses katastrophale Argument verläuft mutmaßlich so:

Wahrscheinlichkeit $p = \frac{4}{14000} \approx 0.029\%$ pro Reaktorjahr.

Betrachtete Laufzeit $n = 143 \cdot 30 = 4290$ Reaktorjahre.

Falsche Rechnung: $np = \frac{4}{14000} \cdot 4290 \approx 1.23$, also 123% Wkt.

Wahrscheinlichkeit eines Reaktorunfalls

Aufgabe: (1) Was ist hier falsch? (2) Welche Rechnung wäre richtig?

Lösung: (1) Eine Wkt von „über 100%“ ist nach Definition nicht möglich!

(2) Annahme: Unfälle ereignen sich unabhängig mit Wkt p pro Jahr.
Wahrscheinlichkeit, in n Reaktorjahren **keinen Unfall** zu erleben:

$$(1-p)^n \;\lessapprox\; \mathrm{e}^{-np}$$

Wahrscheinlichkeit, **mindestens einen Unfall** zu erleben:

$$1-(1-p)^n \;\gtrapprox\; 1-\mathrm{e}^{-np}$$

Hier gilt $np = 1.23$ und $\mathrm{e}^{-1.23} \lessapprox 29.3\%$, also $1-\mathrm{e}^{-1.23} \gtrapprox 70.7\%$.

Die Wkt mindestens eines Unfalls beträgt also etwas über 70%.

Das Geburtstagsparadox

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit Q, dass unter $k = 25$ zufälligen Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres geboren sind?

Aufgabe: Berechnen Sie die Wkt Q exakt und näherungsweise.

Komplement: Alle k Personen haben verschiedene Geburtstage.
Die Wahrscheinlichkeit $P = 1 - Q$ ist leicht auszurechnen:

$$P = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \lessapprox \prod_{j=0}^{k-1}\exp\left(-\frac{j}{n}\right) = \exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{n}\right) = \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right)$$

Für $k = 25$ und $n = 365$ gilt $P \lessapprox \mathrm{e}^{-0.821} \lessapprox 0.44$ und somit $Q \gtrapprox 0.56$.

Kollisionswahrscheinlichkeit

Das Geburtstagsparadoxon beruht auf der Berechnung einer sogenannten **Kollisionswahrscheinlichkeit**:

Satz N1D

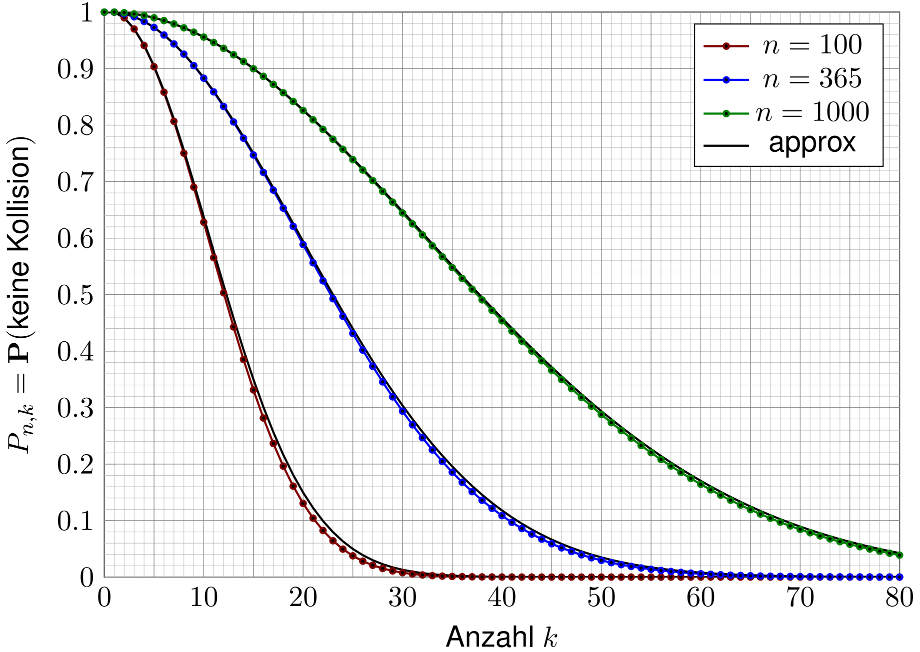
Aus n Möglichkeiten wird k mal zufällig ausgewählt (wobei $k \le n$).
Die Wahrscheinlichkeit $P_{n,k}$, dabei k verschiedene auszuwählen, ist

$$\boxed{P_{n,k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \lessapprox \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).}$$

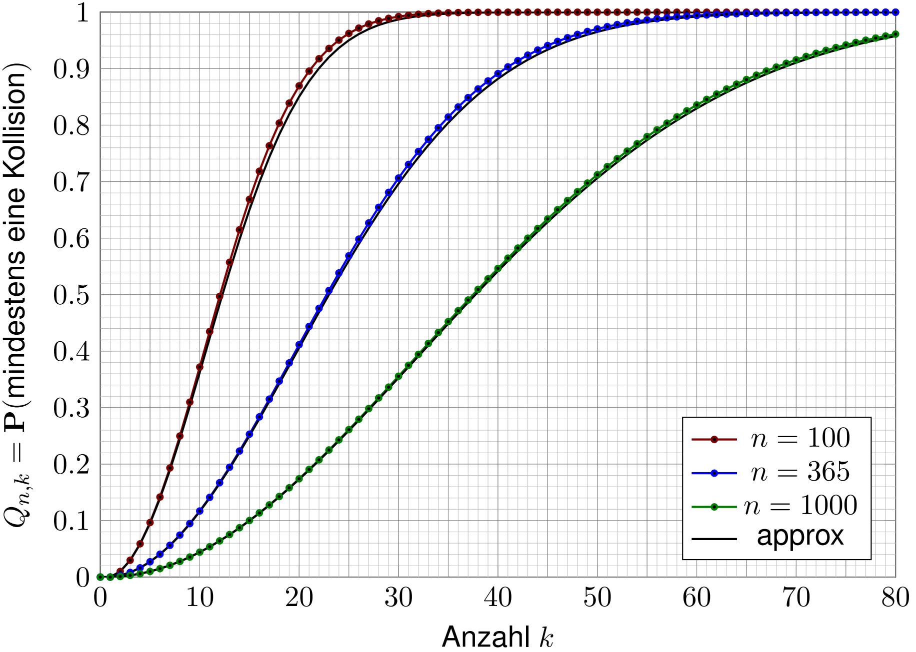
Die Wahrscheinlichkeit $Q_{n,k}$ mindestens einer Kollision ist demnach

$$\boxed{Q_{n,k} = 1 - P_{n,k} \gtrapprox 1 - \exp\left(-\frac{k(k-1)}{2n}\right).}$$

Kollisionswahrscheinlichkeit



Kollisionswahrscheinlichkeit



Gleichverteilung

Wir wollen jetzt Zufallsexperimente abstrakt durch W'keitsräume mit konkreter Verteilungsfunktionen modellieren. Wie kennen bereits das **Laplace–Modell**, d.h. einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ mit Gleichverteilung:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } A}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega} = \frac{\text{günstige Ergebnisse}}{\text{mögliche Ergebnisse}}$$

Ein typisches Beispiel sind viele Urnenmodelle, siehe unten.

⚠ Es genügt hier also, Elemente zu zählen. In realistischen Anwendungen können Ω und A allerdings sehr groß sein (z.B. Lotto „6 aus 49“). Hierzu nutzen wir im Folgenden kombinatorischen Abzählformeln. Für sehr große Werte helfen Näherungsformeln!

Beispiel: Große Straße beim Kniffel

Aufgabe: Wie wahrscheinlich ist eine große Straße beim Kniffel?

Lösung: Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^5$ mit Gleichverteilung.
In diesem Modell ist das Ereignis „große Straße“ die Teilmenge

$$S = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\} = \{1,2,3,4,5\} \text{ oder } \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\} = \{2,3,4,5,6\} \right\}.$$

Anzahl $|S| = 2 \cdot 5! = 240$. Die Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$\mathbf{P}(S) = \frac{|S|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 5!}{6^5} = \frac{240}{7776} = \frac{5}{162} \approx 0.0308$$

Urnenmodelle

Viele Zufallsexperimente lassen sich durch **Urnenmodelle** beschreiben.

Aus einer Urne mit n durchnummerierten Kugeln ziehen wir k Kugeln (oder Lose):

Ziehung mit oder ohne Zurücklegen, Ergebnis mit oder ohne Reihenfolge.

Die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse berechnet sich wie folgt:

Urnenmodell	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
ohne Zurücklegen	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$ Laplace	$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ Laplace
mit Zurücklegen	n^k Laplace	$\dbinom{n+k-1}{k}$ nicht Laplace!

Urnenmodell mit Zurücklegen mit Reihenfolge

Urnenmodell „k aus n“ mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge. Ergebnismenge:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1,\dots,n\}^k \\ &= \left\{ (\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k) \;\middle|\; \omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k \in \{1,\dots,n\} \right\}\end{aligned}$$

Anzahl der Elemente:

$$|\Omega| = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ mal}} = n^k$$

Nehmen wir eine Gleichverteilung an, so gilt für die Elementarw’keiten

$$p(\omega) = \frac{1}{n^k}.$$

(Ω, p) modelliert dann ein Laplace-Experiment: Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich.

Beispiel: Zweimaliges Würfeln

Zweimal Würfeln ergibt die Gleichverteilung auf $6^2 = 36$ Ergebnissen:

$$\Omega = \left\{\begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array}\right\}$$

Das entspricht dem Urnenmodell „2 aus 6“ mZmR und ist Laplacesch.
Umsortiert (also mZoR) bleiben nur noch $\binom{6+2-1}{2} = 21$ Ergebnisse:

$$\Omega^* = \left\{\begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ & & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ & & & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ & & & & (5,5), & (5,6), \\ & & & & & (6,6) \end{array}\right\}$$

Diese sind nicht gleichwahrscheinlich: $p(1,1) = \frac{1}{36}$ aber $p(1,2) = \frac{2}{36}$.

Beispiel: Zweimaliges Würfeln

Jetzt betrachten wir zweimaliges Würfeln, aber ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Dies entspricht einem Urnenmodell mZoR. Umsortiert bleiben nur noch $\binom{6+2-1}{2} = 21$ Ergebnisse:

$$\Omega^* = \left\{ \begin{array}{cccccc} \{1,1\}, & \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, & \{1,6\}, \\ & \{2,2\}, & \{2,3\}, & \{2,4\}, & \{2,5\}, & \{2,6\}, \\ & & \{3,3\}, & \{3,4\}, & \{3,5\}, & \{3,6\}, \\ & & & \{4,4\}, & \{4,5\}, & \{4,6\}, \\ & & & & \{5,5\}, & \{5,6\}, \\ & & & & & \{6,6\} \end{array} \right\}$$

Die W'verteilung p_{Ω^*} ist gegeben durch

$$p_{\Omega^*}(\{\omega_1,\omega_2\}) = \begin{cases} p_1(\omega_1)\cdot p_1(\omega_1) = \frac{1}{36}, & \omega_1 = \omega_2 \\ p_\Omega((\omega_1,\omega_2)) + p_\Omega((\omega_2,\omega_1)) = \frac{1}{18}, & \omega_1 \neq \omega_2. \end{cases}$$

Dies ist tatsächlich eine W'verteilung, da

$$\sum_{\omega\in\Omega^*} p_{\Omega^*}(\omega) = 6\cdot\frac{1}{36} + 15\cdot\frac{1}{18} = 1,$$

aber keine Gleichverteilung, da $p_{\Omega^*}(\omega) \neq \frac{1}{21} = \frac{1}{|\Omega^*|}$!

Urnenmodell ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge

Urnenmodell „k aus n“ ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge. Äquivalent hierzu: aufsteigende Anordnung, also

$$\begin{aligned}\Omega &= \big\{\, \omega \subset \{1,\dots,n\} \,\big|\, |\omega| = k \,\big\} \\ &= \big\{\, \{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k\} \subset \{1,\dots,n\} \,\big|\, \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k \,\big\} \\ &\cong \big\{\, (\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k) \in \{1,\dots,n\}^k \,\big|\, \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k \,\big\}\end{aligned}$$

Anzahl der Elemente:

$$|\Omega| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Nehmen wir eine Gleichverteilung an, so gilt für die Elementarw’keiten

$$p(\omega) = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \binom{n}{k}^{-1}$$

(Ω, p) modelliert dann ein Laplace-Experiment: Alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich.

Beispiel: Lotto entspricht dem Urnenmodell „6 aus 49“ oZoR
Dies ergibt $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ mögliche Ergebnisse.

Hypergeometrische Verteilung

Hypergeometrische Verteilung

Aufgabe: In einer Urne liegen N Kugeln, davon genau K rote.
Wir wählen zufällig n der N Kugeln aus. (Ziehung oZoR)
Sei $A_k =$ „Es werden genau k der K roten Kugeln gezogen".
Wie wahrscheinlich ist das Ereignis A_k?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_k ist

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$$

Hypergeometrische Verteilung

Satz N3A (hypergeometrische Verteilung)

Wir betrachten eine ***Stichprobe*** *ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge: Gesamtgröße N, davon K mögliche Treffer, Stichprobengröße $n \le N$. Die Wahrscheinlichkeit $p(k)$ für k Treffer in der Stichprobe ist dann*

$$p : \{0, 1, 2, \dots, n\} \to [0, 1] \quad \textit{mit} \quad p(k) = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}.$$

Dies nennen wir die ***hypergeometrische Verteilung*** *$H(N, K, n)$.*

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

Aufgabe: Gezogen werden 6 Zahlen aus 49.

(1) Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

(2) Wie wahrscheinlich sind $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ Richtige?

Lösung: Hierzu muss man das Ziehungsverfahren präzisieren:

(1) Urnenmodell „6 aus 49“ ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge.

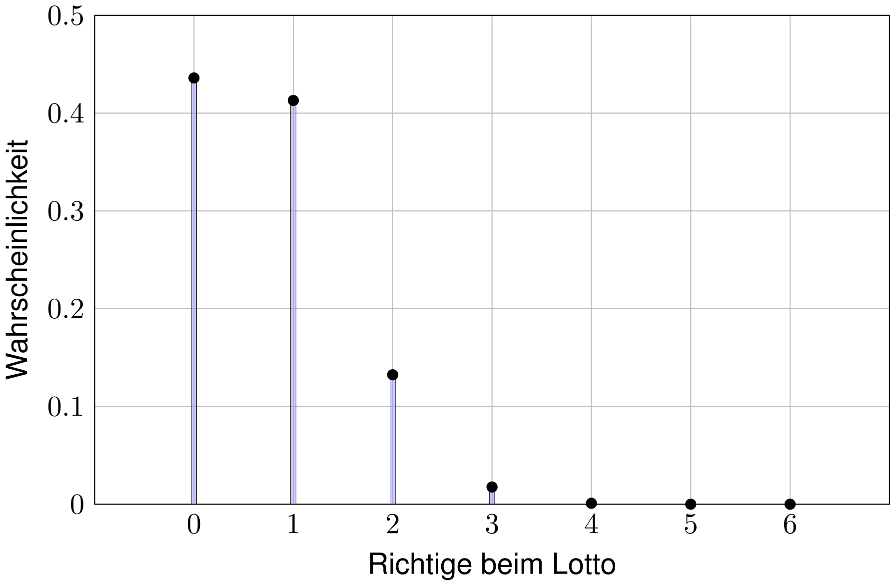
Von insgesamt 49 Zahlen wählt der Spieler 6 aus.

Hierzu gibt es $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ Möglichkeiten.

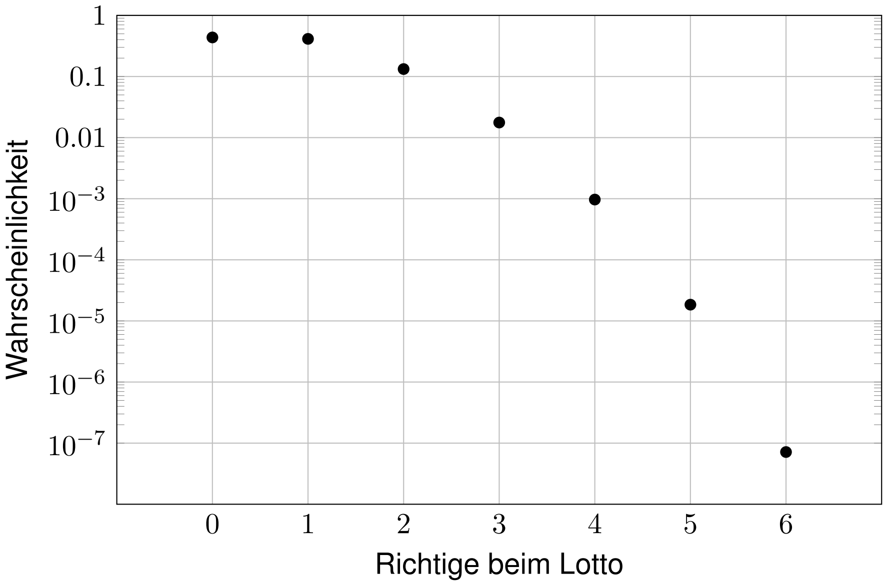
(2) Dies wird durch die hypergeometrische Verteilung gegeben:

$$H(49, 6, 6)(k) = \binom{6}{k}\binom{43}{6-k} \Big/ \binom{49}{6}$$

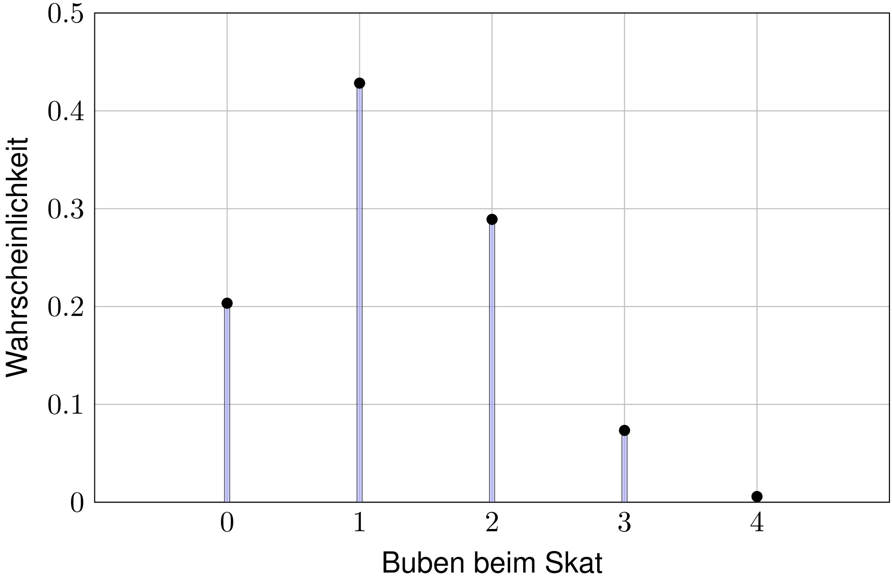
Beispiel: $H(49,6,6)$–Verteilung beim Lotto



Beispiel: $H(49, 6, 6)$–Verteilung beim Lotto



Beispiel: $H(32,4,10)$–Verteilung beim Skat



Binomialverteilung

Die Binomialverteilung $B(n,t)$

Es werden $n \in \mathbb{N}$ **unabhängige Experimente** ausgeführt. Die **Trefferwahrscheinlichkeit** $t \in [0,1]$ sei jedesmal gleich. Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^n =$ Produktraum über $\{1 = \text{Treffer}, 0 = \text{Niete}\}$. Für $\omega \in \Omega$ mit k Treffern und $n-k$ Nieten ist die W'kt $t^k(1-t)^{n-k}$. Es gibt genau $\binom{n}{k}$ solcher Ergebnisse $\omega \in \Omega$ mit k Treffern.

Satz N3B (Binomialverteilung)

Die Wahrscheinlichkeit $p(k)$ für genau k Treffer ist gegeben durch

$$p : \{0,1,2,\dots,n\} \to [0,1] \quad \textit{mit} \quad p(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

*Dies nennen wir die **Binomialverteilung** $B(n,t)$.*

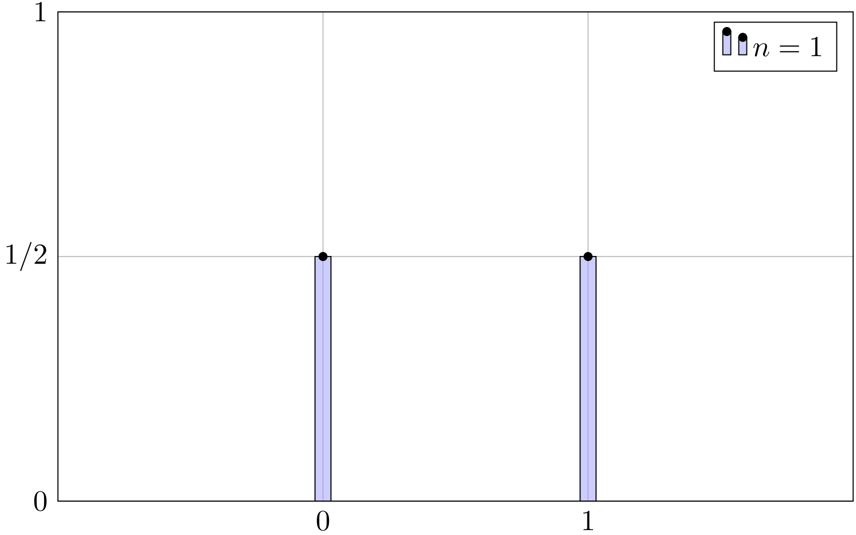
Aufgabe: Ist dies eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

Lösung: Zwei Eigenschaften sind zu prüfen: Es gilt $p(k) \ge 0$ und

$$\sum_{k=0}^{n} p(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \Big(t + (1-t)\Big)^n = 1.$$

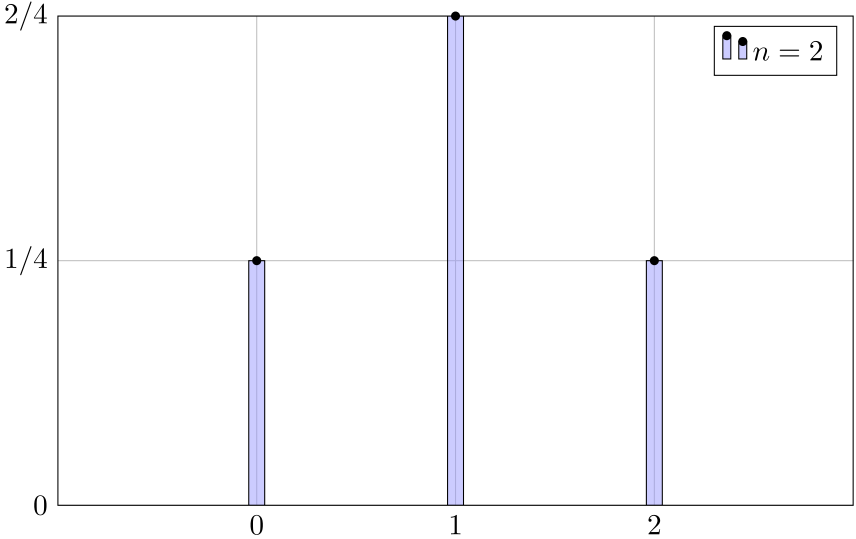
Beispiel: Wiederholter Münzwurf

Sie werfen n mal hintereinander unabhängig eine faire Münze.
Wie wahrscheinlich ist es, dabei genau k mal „Zahl“ zu werfen?



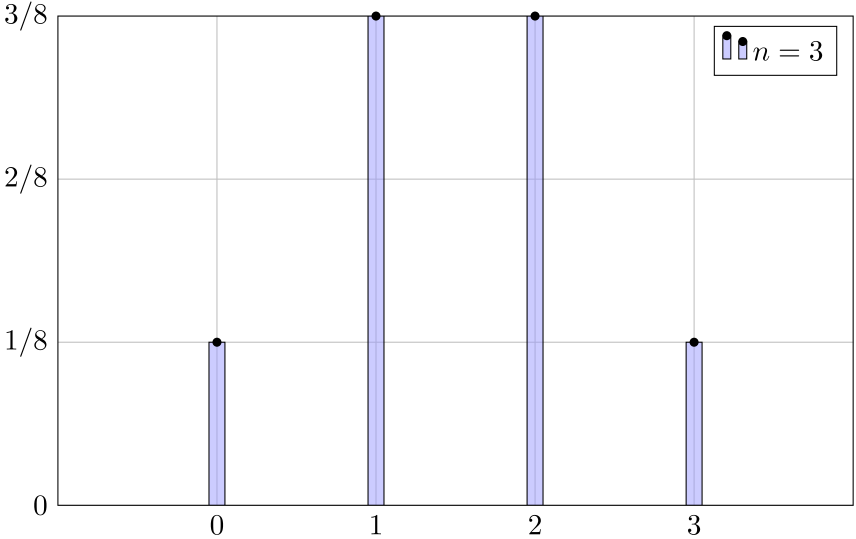
Wiederholter Münzwurf

Sie werfen n mal hintereinander unabhängig eine faire Münze.
Wie wahrscheinlich ist es, dabei genau k mal „Zahl“ zu werfen?



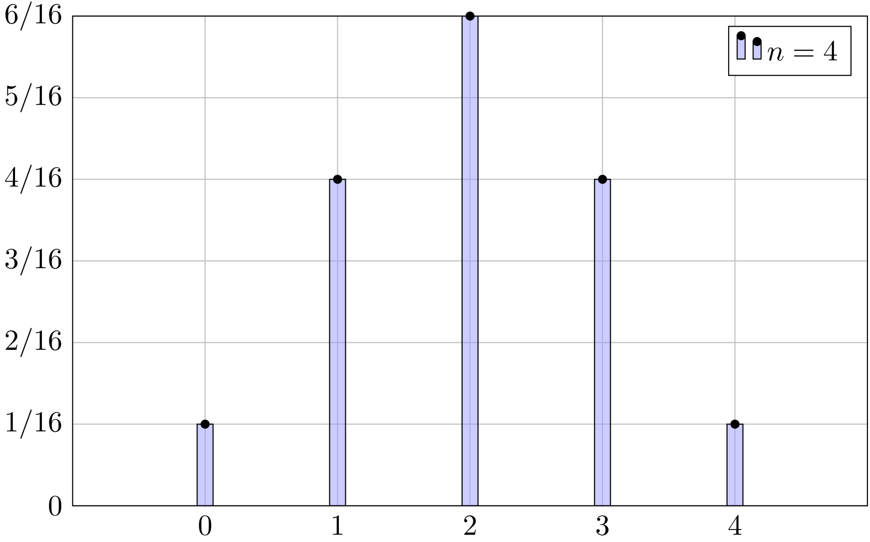
Wiederholter Münzwurf

Sie werfen n mal hintereinander unabhängig eine faire Münze.
Wie wahrscheinlich ist es, dabei genau k mal „Zahl“ zu werfen?



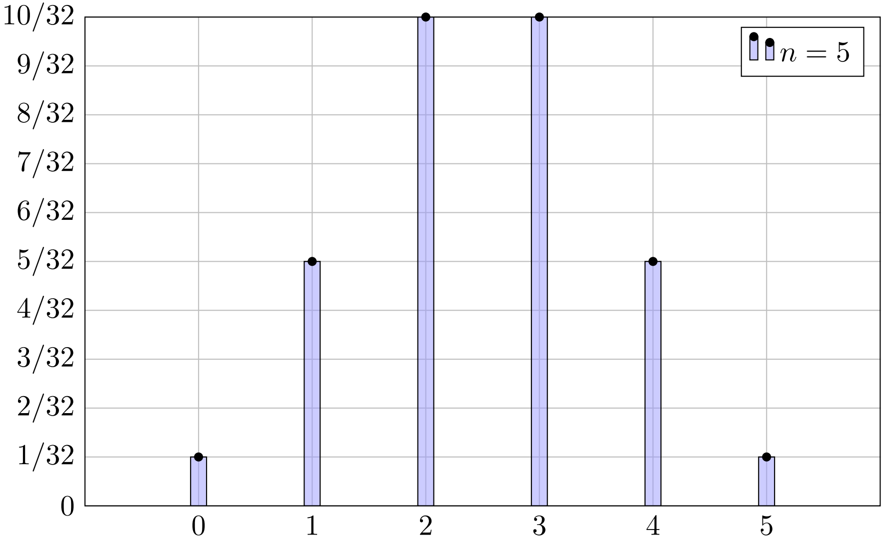
Wiederholter Münzwurf

Sie werfen n mal hintereinander unabhängig eine faire Münze.
Wie wahrscheinlich ist es, dabei genau k mal „Zahl“ zu werfen?



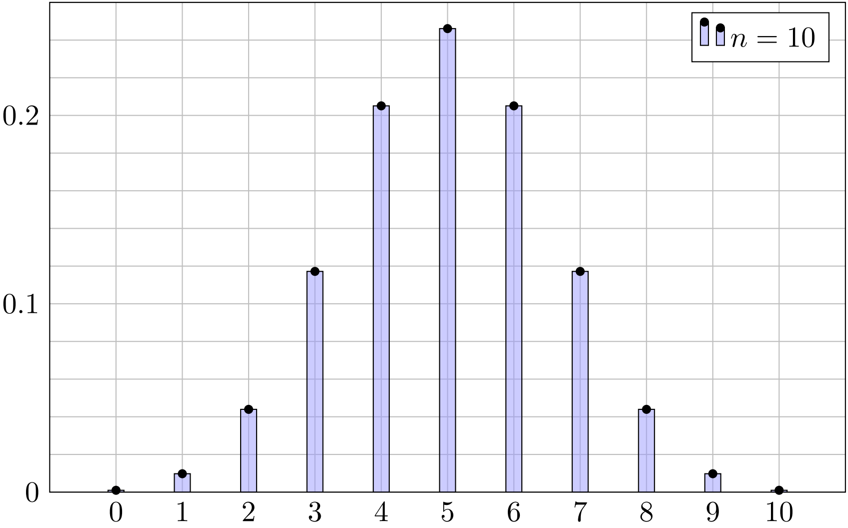
Wiederholter Münzwurf

Sie werfen n mal hintereinander unabhängig eine faire Münze.
Wie wahrscheinlich ist es, dabei genau k mal „Zahl“ zu werfen?



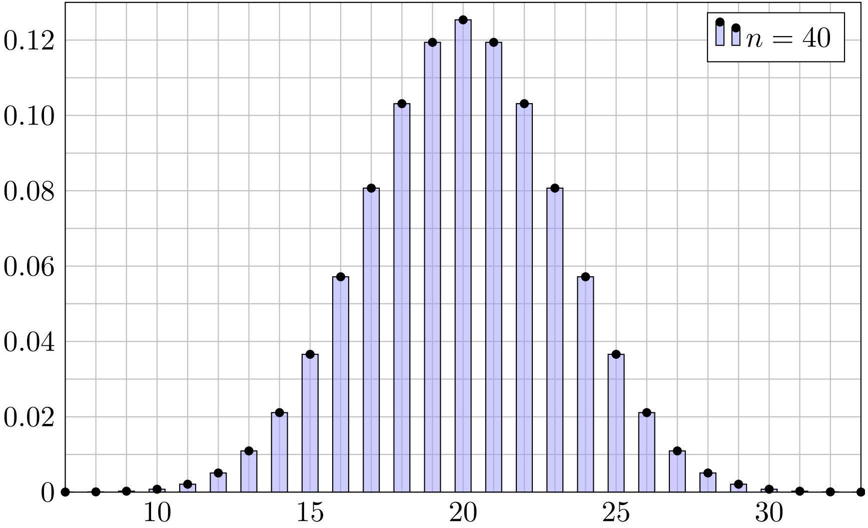
Wiederholter Münzwurf

Sie werfen n mal hintereinander unabhängig eine faire Münze.
Wie wahrscheinlich ist es, dabei genau k mal „Zahl“ zu werfen?

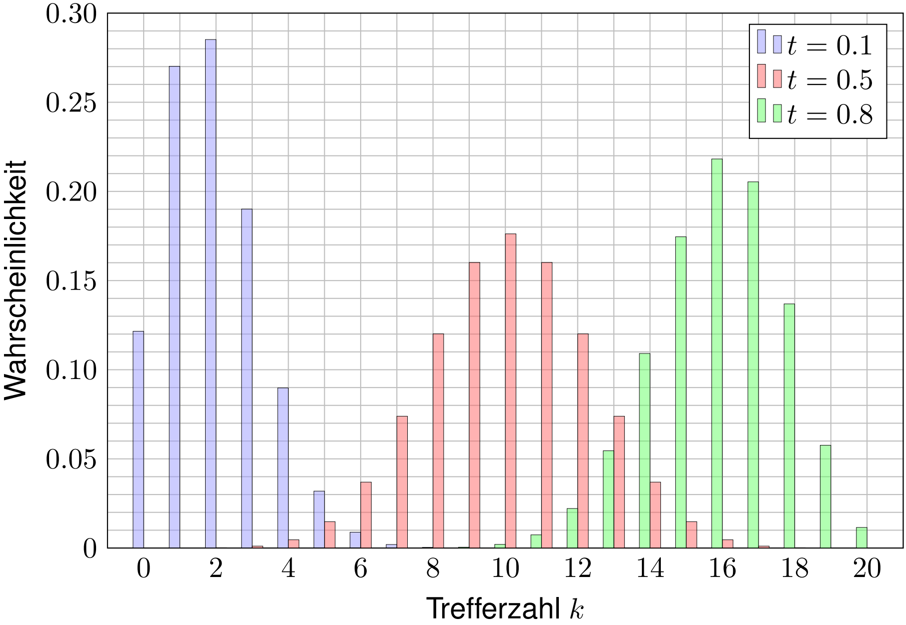


Wiederholter Münzwurf

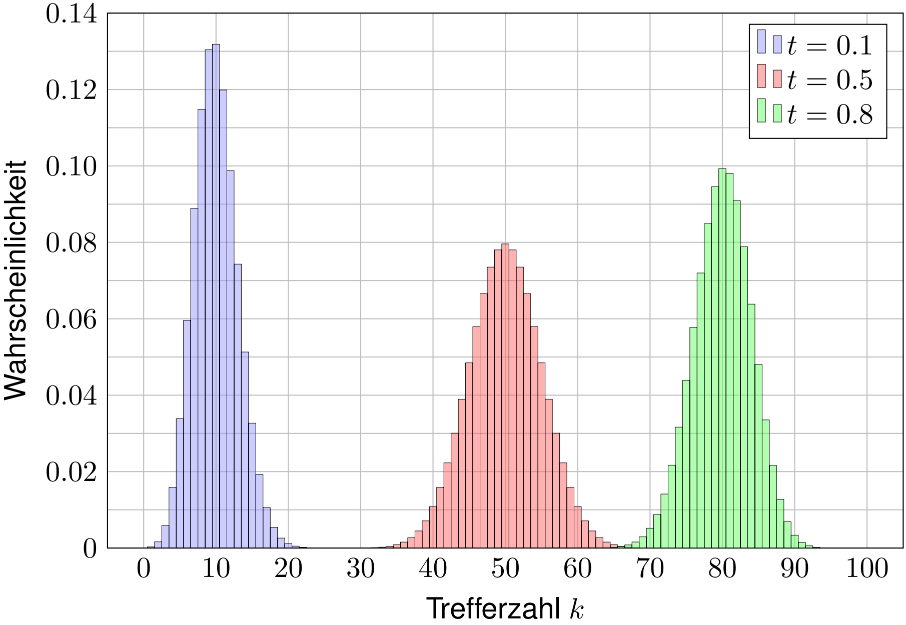
Sie werfen n mal hintereinander unabhängig eine faire Münze.
Wie wahrscheinlich ist es, dabei genau k mal „Zahl“ zu werfen?



Beispiel zur Binomialverteilung: $B(20, t)$



Beispiel zur Binomialverteilung: $B(100, t)$



Anwendung: Anzahl der Geburtstagskinder

Aufgabe: Im Hörsaal sitzen 300 Personen (zufällig und unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben $0, 1, 2, 3, \dots$ heute Geburtstag?

Lösung: Diese Anzahl $B(n,t)$–verteilt mit $n = 300$ und $t = 1/365$.

Wahrscheinlichkeit, dass keine dieser Personen heute Geburtstag hat:

$$B(n,t)(0) = \binom{300}{0} \left(\frac{1}{365}\right)^0 \left(\frac{364}{365}\right)^{300} \approx 0.4391$$

Wahrscheinlichkeit für genau ein Geburtstagskind:

$$B(n,t)(1) = \binom{300}{1} \left(\frac{1}{365}\right)^1 \left(\frac{364}{365}\right)^{299} \approx 0.3619$$

Wahrscheinlichkeit für genau zwei Geburtstagskinder:

$$B(n,t)(2) = \binom{300}{2} \left(\frac{1}{365}\right)^2 \left(\frac{364}{365}\right)^{298} \approx 0.1486$$

Wahrscheinlichkeit für genau drei Geburtstagskinder:

$$B(n,t)(3) = \binom{300}{3} \left(\frac{1}{365}\right)^3 \left(\frac{364}{365}\right)^{297} \approx 0.0406$$

Von der Binomial- zur Poisson–Verteilung

Aufgabe: Wir suchen eine praktische Näherung für n groß und t klein. Sei $\lambda > 0$ gegeben und $t = \lambda/n$. Berechnen Sie für $n \to \infty$ den Limes der Binomialverteilungen $B(n, \lambda/n)$. **Lösung:** Geduldig ausrechnen:

$$B\big(n, \tfrac{\lambda}{n}\big)(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to \mathrm{e}^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \to \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Beispiel: Für $n = 300$ und $t = 1/365$ gilt $\lambda = nt = 300/365 \approx 0.8219$.

Statt $B(n,t)(k)$ können wir viel leichter $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$ berechnen:

$$p(0) \approx 0.4396, \quad p(1) \approx 0.3613, \quad p(2) \approx 0.1485, \quad p(3) \approx 0.0407.$$

Die Poisson–Verteilung $P(\lambda)$

Definition N3D (Poisson–Verteilung)

Die **Poisson–Verteilung** $P(\lambda)$ für $\lambda \ge 0$ ist gegeben durch

$$p : \mathbb{N} \to [0,1] \quad \text{mit} \quad p(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Aufgabe: Ist dies eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

Lösung: Zwei Eigenschaften sind zu prüfen: Es gilt $p(k) \ge 0$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda} \;=\; 1.$$