Lineare Differentialgleichungssysteme

Lineare Differentialgleichungssysteme

Jedes **lineare Differentialgleichungssystem** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)\, y_1(t) + a_{12}(t)\, y_2(t) + \dots + a_{1n}(t)\, y_n(t) + b_1(t), \\ y_2'(t) = a_{21}(t)\, y_1(t) + a_{22}(t)\, y_2(t) + \dots + a_{2n}(t)\, y_n(t) + b_2(t), \\ \quad \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)\, y_1(t) + a_{n2}(t)\, y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)\, y_n(t) + b_n(t). \end{cases}$$

Wir bündeln dies prägnant zu einer vektorwertigen Gleichung:

$$\boxed{y'(t) = A(t)\, y(t) + b(t)}$$

Die zugehörige **homogene Gleichung** erhalten wir für $b = 0$:

$$\boxed{y'(t) = A(t)\, y(t)}$$

Lineare Differentialgleichungssysteme

Beispiel: Unser einführendes Beispiel ist das homogene DGSystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Lemma N1G (Linearkombination von Lösungen)

Sei $y_1 : I \to \mathbb{K}^n$ *eine Lösung der Gleichung* $y_1' = A\,y_1 + b_1$ *und* $y_2 : I \to \mathbb{K}^n$ *eine Lösung der Gleichung* $y_2' = A\,y_2 + b_2$.

Die Linearkombination $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 : I \to \mathbb{K}^n$ *mit* $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ *ist dann eine Lösung der Gleichung* $y' = A\,y + b$ *mit Störterm* $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$.

Nachrechnen: Wir nutzen die Linearität der Ableitung:

$$\begin{aligned} y' \;=\; c_1 y_1' + c_2 y_2' &= c_1(A\,y_1 + b_1) + c_2(A\,y_2 + b_2) \\ &= A(c_1 y_1 + c_2 y_2) + (c_1 b_1 + c_2 b_2) \;=\; A\,y + b \end{aligned}$$

Lineare Struktur des Lösungsraumes

Satz N1H (Struktursatz für lineare Differentialgleichungen)

Wie zuvor sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetig. Wir betrachten die Lösungsmenge $L_b = \{\, y \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \mid y' = A\,y + b \,\}$.

*(0) **Globale Existenz und Eindeutigkeit**: Für jeden Zeitpunkt $t_0 \in I$ ist die Auswertung $\Psi : L_b \to \mathbb{K}^n : y \mapsto y(t_0)$ bijektiv; zu jedem Anfangsdatum $y_0 \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $y \in L_b$ mit $y(t_0) = y_0$.*

*(1) $L_0 = \{\, y \mid y' = A\,y \,\}$ ist ein **Vektorraum** der Dimension n über $\mathbb{K}$. Wir finden ein **Fundamentalsystem** $y_1, \dots, y_n \in L_0$, also eine Basis von L_0 bestehend aus n linear unabhängigen Lösungen, und erhalten:*

$$L_0 = \left\{\, c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\} \quad \cong \quad \mathbb{K}^n$$

*(2) $L_b = \{\, y \mid y' = A\,y + b \,\}$ ist ein **affiner Raum** der Dimension n. Für jede **Partikulärlösung** $y_b \in L_b$ gilt $L_b = y_b + L_0$, ausgeschrieben:*

$$L_b = y_b + L_0 = \left\{\, y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Lösungen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ bündeln wir zur **Fundamentalmatrix**:

$$\begin{aligned} &Y : I \to \mathbb{K}^{n\times n}, \\ &Y(t) = \big(y_1(t), \dots, y_n(t)\big) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \dots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man nennt $Y(t)$ auch die **Wronski–Matrix** der Funktionen $y_1, \dots, y_n$ und $\det Y(t)$ ihre **Wronski–Determinante**. Diese sind oft nützlich:

Korollar N1ı (Unabhängigkeitskriterium)

Folgende Aussagen sind zueinander äquivalent:

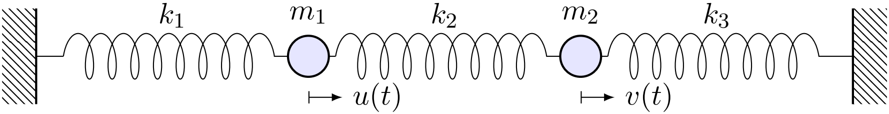
(i) Die Funktionen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ sind linear unabhängig.

(ii) Die Determinante erfüllt $\det Y(t) \neq 0$ für ein und damit alle $t \in I$.

Beispiel: gekoppelte Schwingungen

Anwendungsbeispiel: gekoppelte Schwingungen

Aufgabe: Formulieren und lösen Sie folgendes dynamische System:



(1) Formulieren Sie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung.
(2) Welche Struktur hat der Lösungsraum?
(3) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen.
(4) Wie erhält man hieraus eine allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$?
(5) Wie löst man das Anfangswertproblem $y(t_0) = y_0$ für $y_0 \in \mathbb{R}^n$?

Lösung: (1) Für die Variablen $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = u'$, $y_4 = v'$ ist die Bewegungsgleichung ein **DGSystem erster Ordnung**:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m} & \frac{k_2}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m} & -\frac{k_2+k_1}{m} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Anwendungsbeispiel: gekoppelte Schwingungen

(2) Die Menge aller Lösungen $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ ist ein **$\mathbb{R}$–Vektorraum**. Dank des E&E-Satzes hat dieser Vektorraum die **Dimension 4**.

(3) Durch Entkopplung finden wir Lösungen $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$. Diese bündeln wir übersichtlich zur **Fundamentalmatrix**

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_2 t) & \sin(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) & -\cos(\omega_2 t) & -\sin(\omega_2 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) & \omega_1 \cos(\omega_1 t) & -\omega_2 \sin(\omega_2 t) & \omega_2 \cos(\omega_2 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) & \omega_1 \cos(\omega_1 t) & \omega_2 \sin(\omega_2 t) & -\omega_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}.$$

Lineare Unabhängigkeit testen wir in einem beliebigen Punkt:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & \omega_2 \\ 0 & \omega_1 & 0 & -\omega_2 \end{pmatrix}, \qquad \det Y(0) = -4\omega_1\omega_2 \neq 0$$

Anwendungsbeispiel: gekoppelte Schwingungen

(4) Jede Lösung $y:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ unserer homogenen Gleichung $y' = A\,y$ ist eine **Linearkombination**:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_4 y_4(t) = Y(t)\,c$$

mit **eindeutig bestimmten Koeffizienten** $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4$.

(5) Ist ein **Anfangswert** $y(t_0) = y_0$ vorgegeben durch $y_0 \in \mathbb{R}^4$, so gilt

$$Y(t_0)\,c \overset{!}{=} y_0 \quad \Longrightarrow \quad c = Y(t_0)^{-1}\,y_0$$

🙂 Die Matrix $Y(t)$ ist invertierbar zu jedem Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$.

Das AWP $y(t_0) = y_0$ wird demnach gelöst durch $y(t) = Y(t)\,Y(t_0)^{-1}\,y_0$.

Anwendungsbeispiel zur Entkopplung

Aufgabe: Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = 2, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t), & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

(0) Welche Struktur hat der allgemeine Lösungsraum?
(1) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen.
(2) Formulieren Sie die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
(3) Lösen Sie speziell das Anfangswertproblem.

Lösung: (1) Wir nutzen weiterhin die Methode des scharfen Hinsehens: Der Ansatz $y_1 = y_2$ entkoppelt zu $y_1' = y_2' = 0$. Wir erhalten die Lösung

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz $y_1 = -y_2$ entkoppelt zu $y_1' = -2y_1$. Wir erhalten die Lösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Anwendungsbeispiel zur Entkopplung

Sind beide Lösungen linear unabhängig? Wir betrachten die Matrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & v_1(t) \\ u_2(t) & v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \det Y(t) = -2\,\mathrm{e}^{-2t} \neq 0.$$

(2) Damit haben wir eine **Fundamentalmatrix** gefunden. Diese erfüllt

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 0 & 2\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y(t) \quad \text{mit} \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jede Lösung y hat die Form $y = c_1 u + c_2 v = Y c$. (3) Anfangswert:

$$y(0) = Y(0)\,c \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; c = Y(0)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte **Lösung des Anfangswertproblems** ist demnach:

$$y(t) = u(t) + v(t) = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 - \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

Variation der Konstanten

Variation der Konstanten

Zu lösen sei nun ein **inhomogenes Differentialgleichungssystem**

$$\boxed{y'(t) = A(t)\, y(t) + b(t).}$$

Einfacher ist das zugehörige homogene DGSystem $y'(t) = A(t)\, y(t)$.
Hierzu sei eine Fundamentalmatrix $Y : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ bereits gefunden:

$$Y'(t) = A(t)\, Y(t) \quad \text{mit} \quad \det Y(t) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in I.$$

Jede Lösung $y : I \to \mathbb{K}^n$, $y' = A\, y$, ist **eindeutige Linearkombination**

$$y(t) = c_1\, y_1(t) + \dots + c_n\, y_n(t) = Y(t)\, c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{K}^n.$$

Ansatz für eine Partikulärlösung durch **Variation der Konstanten**:

$$y_b(t) = c_1(t)\, y_1(t) + \dots + c_n(t)\, y_n(t) = Y(t)\, c(t) \quad \text{mit} \quad c : I \to \mathbb{K}^n.$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Funktionen $c_1, \dots, c_n$ möglichst explizit.

Variation der Konstanten

Lösung: Ableiten von $y_b(t) = Y(t)\,c(t)$ nach der Produktregel:

$$y_b' = \big[Y\,c\big]' = Y'\,c + Y\,c' = A\,Y\,c + Y\,c'$$

Einsetzen in unser DGSystem $y' = A\,y + b$ ergibt die Gleichung

$$A\,Y\,c + Y\,c' \overset{!}{=} A\,Y\,c + b.$$

Wir erhalten $Y\,c' = b$, umgeformt $c' = Y^{-1}b$, und integriert:

$$c(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} Y(\tau)^{-1}\,b(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;+\; c(t_0)$$

🙂 Die **Partikulärlösung** $y_b = Y\,c$ löst unsere Gleichung $y' = A\,y + b$.

Partikulärlösung inhomogener DGSysteme

Satz N1J (Variation der Konstanten)

Zu lösen sei das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t) \quad \textit{mit} \quad y(t_0) = y_0.}$$

Zu jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{K}^n$ *existiert genau eine Lösung, nämlich*

$$\boxed{y_b(t) = Y(t) \int_{\tau=t_0}^{t} Y(\tau)^{-1}\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad + \quad Y(t)Y(t_0)^{-1} y_0.}$$

Anwendungsbeispiel

Aufgabe: Lösen Sie das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t) + t, & y_1(0) = 2, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t) + \mathrm{e}^{-t}, & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Lösung: In Matrixschreibweise gilt $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

Eine **Fundamentalmatrix** des homogenen Systems kennen wir:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \det Y(t) = -2\,\mathrm{e}^{-2t} \neq 0$$

Zur Inversion (kleiner) Matrizen ist die Cramersche Regel nützlich:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

$$Y(t)^{-1} = -\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-2t} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

Anwendungsbeispiel

Wir berechnen die **Partikulärlösung** $y_b(t) = Y(t)\,c(t)$ gemäß Satz:

$$
\begin{aligned}
c(t) &= \int_{\tau=0}^{t} Y(\tau)^{-1}\, b(\tau)\,\mathrm{d}\tau &&= \int_{\tau=0}^{t} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{2\tau} & -\mathrm{e}^{2\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau \\ \mathrm{e}^{-\tau} \end{pmatrix}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_{\tau=0}^{t} \begin{pmatrix} \tau + \mathrm{e}^{-\tau} \\ \tau\,\mathrm{e}^{2\tau} - \mathrm{e}^{\tau} \end{pmatrix}\mathrm{d}\tau &&= \frac{1}{8}\left[\begin{pmatrix} 2\tau^2 - 4\,\mathrm{e}^{-\tau} \\ (2\tau-1)\,\mathrm{e}^{2\tau} - 4\,\mathrm{e}^{\tau} \end{pmatrix}\right]_{\tau=0}^{t} \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2t^2 + 4 - 4\,\mathrm{e}^{-t} \\ (2t-1)\,\mathrm{e}^{2t} - 4\,\mathrm{e}^{t} + 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Partikulärlösung ist demnach:

$$
\begin{aligned}
y_b(t) &= Y(t)\,c(t) &&= \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2t^2 + 4 - 4\,\mathrm{e}^{-t} \\ (2t-1)\,\mathrm{e}^{2t} - 4\,\mathrm{e}^{t} + 5 \end{pmatrix} \\
&= \dots &&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2t^2 + 2t + 3 - 8\,\mathrm{e}^{-t} + 5\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 2t^2 - 2t + 5 \qquad\qquad - 5\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

🙂 Diese erfüllt das inhomgene DGSystem $y_b'(t) = A\,y_b(t) + b(t)$.

Anwendungsbeispiel

Die Integration zu c wurde so ausgeführt, dass $y_b(0) = 0$ gilt.

Wir addieren zu y_b den homogenen Lösungsteil $Y(t)Y(0)^{-1}\binom{2}{0}$.

Die Lösung unseres Anfangswertproblems ist schließlich

$$y(t) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2t^2 + 2t + 3 - 8\,\mathrm{e}^{-t} + 5\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 2t^2 - 2t + 5 \qquad\qquad - 5\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 - \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Probe: Unsere Lösung $y(0)$ erfüllt den gewünschten Anfangswert

$$y(0) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 - 8 + 5 \\ 5 - 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ist auch das Differentialgleichungssystem erfüllt? Nachrechnen:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \tfrac{1}{8}\big[4t - 2 - 8\,\mathrm{e}^{-t} + 10\,\mathrm{e}^{-2t}\big] + 2\,\mathrm{e}^{-2t} \\ y_2'(t) &= \tfrac{1}{8}\big[4t - 2 \qquad\qquad + 10\,\mathrm{e}^{-2t}\big] + 2\,\mathrm{e}^{-2t} &&= \quad y_1 - y_2 + \mathrm{e}^{-t} \\ y_1'(t) &= \tfrac{1}{8}\big[4t + 2 + 8\,\mathrm{e}^{-t} - 10\,\mathrm{e}^{-2t}\big] - 2\,\mathrm{e}^{-2t} &&= -y_1 + y_2 + t \end{aligned}$$

Kapitel O

Autonome Systeme, Gleichgewicht und Stabilität

Inhalt dieses Kapitels

Langzeitverhalten und Stabilität von Lösungen

Anfangsdaten sind oft zufälligen kleinen Schwankungen unterworfen, etwa durch kleine äußere **Störungen** oder ungenaue **Messdaten**.

Die **Stabilitätstheorie** untersucht die Auswirkung von Störungen, die als Abweichung von Gleichgewichtszuständen dynamischer Systeme auftreten, etwa in der Technischen Mechanik.

Zur Vereinfachung betrachten wir **autonome Systeme** $x'(t) = f(x(t))$. Hier hängt die rechte Seite $f(x)$ nicht explizit von der Zeit t ab.

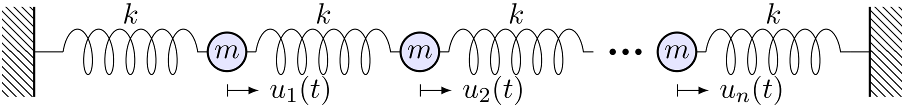
Ein **Fixpunkt** x_0 (Ruhelage) zeichnet sich durch $f(x_0) = 0$ aus: Bei Start in $x(t_0) = x_0$ verharrt das System in dieser Ruhelage.

Die Ruhelage x_0 ist **instabil**, wenn eine zufällige kleine Störung im weiteren zeitlichen Verlauf immer größer wird und von x_0 wegführt. Sie ist (asymptotisch) **stabil**, wenn kleine Störungen beschränkt bleiben (bzw. abklingen und das System langfristig in die Ruhelage zurückkehrt).

Kleine Auslenkungen $x(t) = x_0 + u(t)$ aus der Ruhelage befolgen in erster Näherung $u(t) = A\,u'(t)$ mit Jacobi–Matrix $A = f'(x_0) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten! Hierdurch erhalten lineare DGSysteme ihre zentrale Bedeutung.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Aufgabe: Formulieren und lösen Sie folgendes dynamische System:



(1) Formulieren Sie das Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

(2) Welche Struktur hat der Lösungsraum?

(3) Finden Sie alle Lösungen zum Produktansatz $u_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

(4) Gewinnen Sie hieraus eine reelle Basis des Lösungsraumes.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

Lösung: (1) Auslenkung $u_j(t) \in \mathbb{R}$ aus der Ruhelage,
lineare Rückstellkraft $F_j = k(u_{j+1} - u_j) + k(u_{j-1} - u_j)$,
Newtons Bewegungsgesetz $F_j = m\ddot{u}_j$. Mit $c^2 = k/m$ gilt demnach

$$\boxed{\ddot{u}_j(t) = c^2\big[u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)\big] \quad \text{mit} \quad u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0.}$$

Diese **Bewegungsgleichung** ist zweiter Ordnung in n Unbekannten.
Wir reduzieren sie äquivalent zu erster Ordnung in $2n$ Unbekannten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ c^2 B_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}$$

Die Bandmatrix B_n kodiert hierbei die geometrische Anordnung:

$$B_n := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(2) Wir suchen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ mit $\dot{y}(t) = A\,y(t)$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ c^2 B & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Die Menge aller Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ ist ein **$\mathbb{R}$–Vektorraum**.

Dank des E&E–Satzes hat dieser Vektorraum die **Dimension $2n$**.

Gekoppelte Oszillatoren und stehende Wellen

(3) Einsetzen des Produktansatzes $u_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j}$ ergibt:

$$-\,\omega^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j} = c^2\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(j-1)} - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha j} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(j+1)}\big] \quad \text{also}$$

$$\omega^2 = -c^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - 2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) = -c^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2})^2 = 4c^2\sin(\alpha/2)^2$$

Zu jedem α erhalten wir $\omega = \pm 2c\sin(\alpha/2)$. Reelle Lösungen sind:

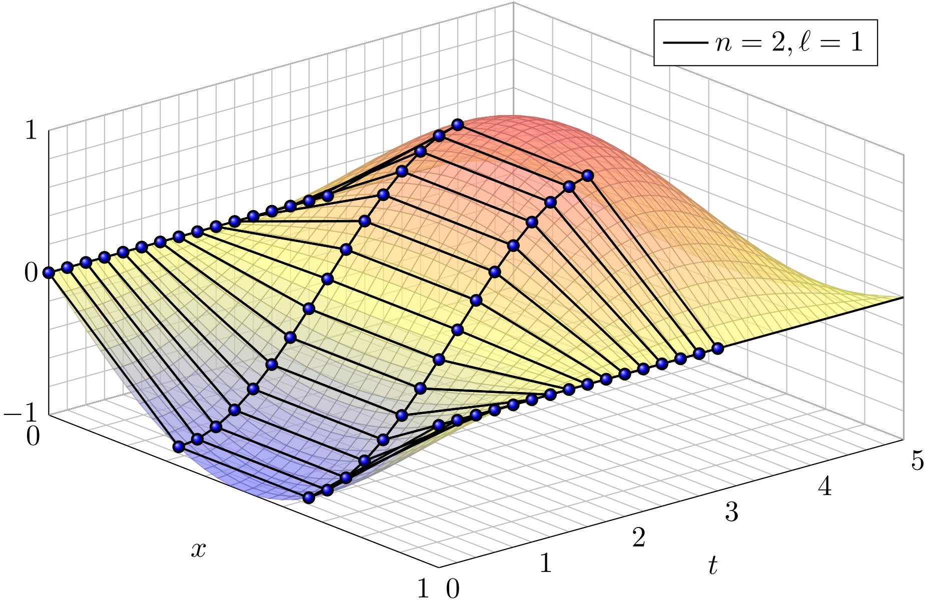
$$u_j(t) = \begin{cases} \sin(\alpha j)\cos(\omega t), & \cos(\alpha j)\cos(\omega t), \\ \sin(\alpha j)\sin(\omega t), & \cos(\alpha j)\sin(\omega t), \end{cases}$$

Randbedingungen: Die beiden linken Lösungen erfüllen $u_0(t) = 0$, und $u_{n+1}(t) = 0$ für $\alpha = \ell\pi/(n+1)$ und $\ell = 1, \dots, n$. **Eigenfunktionen**:

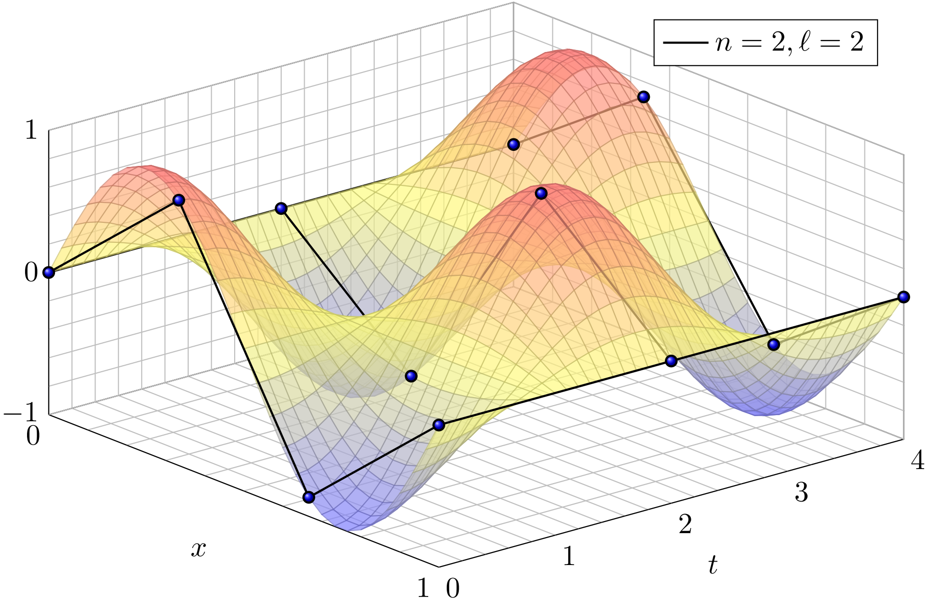
$$\boxed{\left.\begin{aligned} u_{\ell,j}(t) &= \sin(\alpha_\ell j)\cos(\omega_\ell t) \\ v_{\ell,j}(t) &= \sin(\alpha_\ell j)\sin(\omega_\ell t) \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad \left\{\begin{aligned} \alpha_\ell &= \ell\pi/(n+1), \\ \omega_\ell &= 2c\sin(\alpha_\ell/2). \end{aligned}\right.}$$

(4) Dies sind $2n$ linear unabhängige Lösungen, also eine **Basis**!

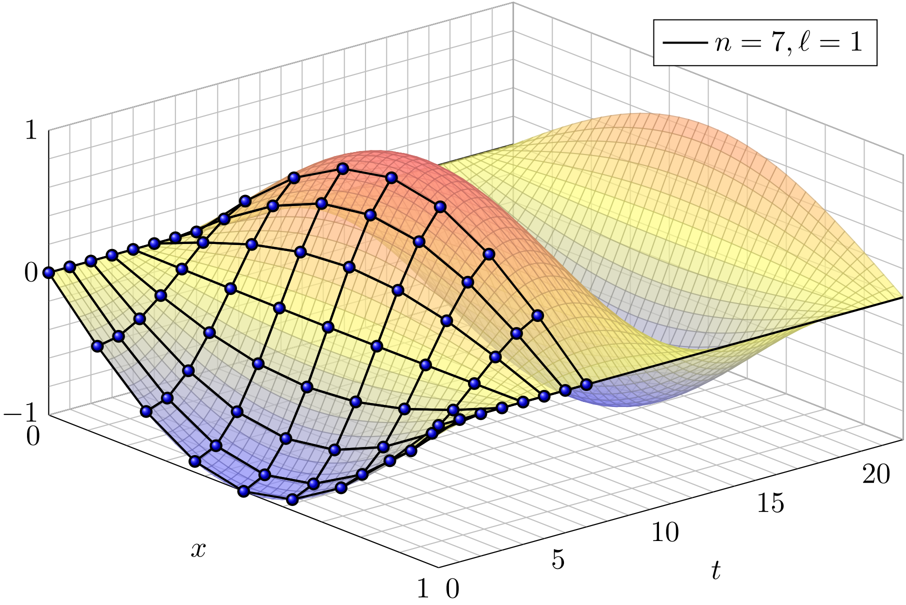
Eigenfunktionen: Grundschwingung ($\ell = 1$)



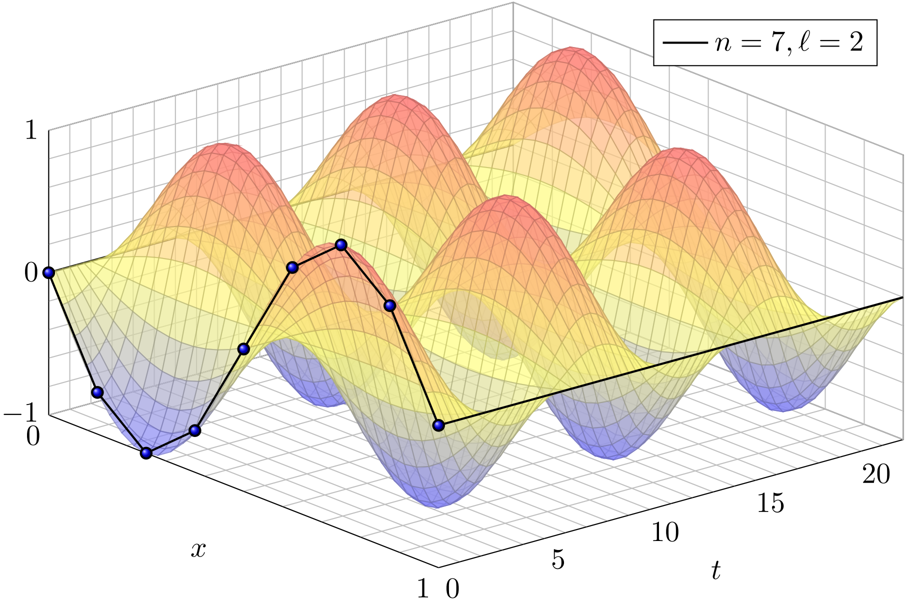
Eigenfunktionen: Oberschwingung ($\ell = 2$)



Eigenfunktionen: Grundschwingung ($\ell = 1$)



Eigenfunktionen: erste Oberschwingung ($\ell = 2$)



Lösungen mittels Eigenvektoren und Eigenfunktionen

Eigenfunktionen und Eigenvektoren

Lemma O1A (Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$\boxed{y'(t) = A\,y(t).}$$

Eine ***Eigenfunktion*** *ist eine Lösung $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,v$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}^n$: Hier gilt einerseits $y'(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,v$ und andererseits $A\,y(t) = A\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,v$. Wegen $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ ist dies äquivalent zur Eigenvektorgleichung $Av = \lambda v$.*

Eigenfunktionen und Eigenvektoren

Satz O1B (Lösung eines DGSystems durch Eigenfunktionen)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zu lösen sei das DGSystem

$$\boxed{y'(t) = A\,y(t).}$$

Der $\mathbb{C}$–Vektorraum aller Lösungen $y:\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ hat Dimension n.
Eigenvektoren $v_1,\dots,v_\ell \in \mathbb{C}^n$ mit $Av_k = \lambda_k v_k$ liefern Eigenfunktionen

$$\boxed{y_1,\dots,y_\ell:\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \quad \textit{mit} \quad y_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t}\, v_k.}$$

Genau dann sind die Eigenfunktionen $y_1,\dots,y_\ell$ ***linear unabhängig****, wenn die Eigenvektoren $v_1,\dots,v_\ell \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig sind.*

Genau dann sind $y_1,\dots,y_n$ eine ***Basis*** *des Lösungsraumes der DG, wenn die Vektoren $v_1,\dots,v_n$ eine Basis des Raumes $\mathbb{C}^n$ sind.*

Anwendungsbeispiel zu Eigenfunktionen

Aufgabe: Lösen Sie das Differentialgleichungssystem mit AWP

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = 1, \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t), & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

(1) Welche Struktur hat der allgemeine Lösungsraum?

(2) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem aus Eigenfunktionen.

(3) Wie erhalten Sie hieraus eine allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

(4) Lösen Sie damit speziell das Anfangswertproblem!

Lösung: (1) Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung:

$$y'(t) = A\,y(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ bilden einen $\mathbb{R}$–Vektorraum der Dimension 2.

Anwendungsbeispiel zu Eigenfunktionen

(2) Wir berechnen das **charakteristische Polynom** von A:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(A - xE) = \det\begin{pmatrix} -1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix} \\ &= (-1-x)^2 - 1 = x^2 + 2x = x(x+2) \end{aligned}$$

Wir suchen **Eigenvektoren**. Zu $\lambda_1 = 0$ lösen wir $(A - \lambda_1 E)v_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu $\lambda_2 = -2$ lösen wir entsprechend $(A - \lambda_2 E)v_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_2 = 0, \quad \text{eine Lösung } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das **Fundamentalsystem** bzw. die **Fundamentalmatrix**:

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{0t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

Anwendungsbeispiel zu Eigenfunktionen

(3) **Allgemeine Lösung** unseres DGSystems $y'(t) = A\,y(t)$:

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Y(t)\,c$$

(4) **Spezielle Lösung** zu den gegebenen Anfangsdaten:

$$y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist hierzu das LGS $Y(0)\,c = y(0)$, also $c = Y(0)^{-1} y(0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte **Lösung des Anfangswertproblems** ist demnach:

$$y(t) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 - \mathrm{e}^{-2t} \\ 3 + \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

Lösungen mittels Hauptvektoren und Hauptfunktionen

Von Eigenvektoren zu Hauptvektoren

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{C}^n$ aus **Eigenvektoren** gibt, also $Av_k = \lambda_k v_k$.
Bezüglich dieser Basis hat die Abbildung $v \mapsto Av$ die Diagonalgestalt

$$
{}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)
$$

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar! Typisch ist der **Jordan–Block**:

$$
B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad B - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Es gibt nicht genug Eigenvektoren: $\ker(B - \lambda) = \mathbb{C}e_1$ ist eindimensional und wir haben $Be_k = \lambda e_k + e_{k-1}$ für $k \geq 2$, d.h. eine **Hauptvektorkette**.