Lineare DG mit konstanten Koeffizienten

Lineare DG mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten eine **lineare DG mit konstanten Koeffizienten**:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = b(x)}$$

Wir lösen zunächst die zugehörige **homogene Differentialgleichung**:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0}$$

Exponentialansatz: $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y' = \lambda y$, $y'' = \lambda^2 y$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n y$.
Einsetzen dieser Funktion in unsere Differentialgleichung ergibt

$$\big(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\big)\, \mathrm{e}^{\lambda x} = 0.$$

Wir erhalten also genau dann eine Lösung der homogenen DG, wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des **charakteristischen Polynoms** ist:

$$\boxed{p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

Lineare DG: Fundamentallösungen

Wir zerlegen $p \in \mathbb{C}[x]$ in Linearfaktoren: $p(x) = (x-\lambda_1)^{k_1} \cdots (x-\lambda_\ell)^{k_\ell}$
Hieraus erhalten wir n linear unabhängige **Fundamentallösungen**

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{\lambda_1 x},\; x\,e^{\lambda_1 x},\; x^2\,e^{\lambda_1 x}, \dots,\; x^{k_1-1}\,e^{\lambda_1 x},\; \dots \\ e^{\lambda_\ell x},\; x\,e^{\lambda_\ell x},\; x^2\,e^{\lambda_\ell x}, \dots,\; x^{k_\ell-1}\,e^{\lambda_\ell x}. \end{array}}$$

Ist $p \in \mathbb{R}[x]$ reell und $\lambda = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega \neq 0$ eine k–fache Nullstelle, so gilt dies auch für die komplex-konjugierte Zahl $\overline{\lambda} = \sigma - i\omega$. Durch Linearkombination erhalten wir die zugehörigen **reellen Lösungen**; sie entsprechen Real- und Imaginärteil der komplexen Lösungen:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} e^{\lambda x}, \dots,\; x^{k-1}\,e^{\lambda x} \\ e^{\overline{\lambda} x}, \dots,\; x^{k-1}\,e^{\overline{\lambda} x} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} e^{\sigma x}\cos(\omega x), \dots,\; x^{k-1}\,e^{\sigma x}\cos(\omega x) \\ e^{\sigma x}\sin(\omega x), \dots,\; x^{k-1}\,e^{\sigma x}\sin(\omega x) \end{array}\right.}$$

Damit finden wir n linear unabhängige Lösungen $y_1, \dots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$.

🙂 Jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ der homogenen DG $p(\partial)\,y = 0$ hat die Form $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ mit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$. Kurz: Lösungsraum $L_0 \cong \mathbb{K}^n$.

Inhomogen Lineare DG

Inhomogene lineare DG

Sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ein Polynom. Zu lösen sei die lineare DG $p(\partial_x)\, y = b$ mit **beliebiger rechter Seite**, ausgeschrieben:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = b(x).}$$

Satz M2A (Greensche Fundamentallösung und Lösungsformel)

*Die homogene Gleichung $p(\partial)\, u = 0$ hat genau eine Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ zu den **Anfangswerten** $u(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$ und $u^{(n-1)}(0) = 1$.*

*Man nennt u die **Greensche Fundamentallösung**. Hieraus erhält man eine Lösung der inhomogenen Gleichung $p(\partial)\, y = b$ durch **Faltung**:*

$$\boxed{y_b(x) = \int_{t=x_0}^{x} u(x-t)\, b(t)\, \mathrm{d}t.}$$

⚠ Allgemeine Lösung $y = y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ mit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$, d.h.:

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Beispiel: Greensche Lösungsformel

Aufgabe: Zu lösen sei, für $-\pi/2 < x < \pi/2$, die Differentialgleichung

$$\boxed{y''(x) + y(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0.}$$

Lösung: Allgemeine homogene Lösung ist $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Die Anfangswerte $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$ erfüllt nur $u(x) = \sin x$.

Faltung dieser **Fundamentallösung** u mit der **rechten Seite** b:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{t=0}^{x} \sin(x-t) \frac{1}{\cos t} \, \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} \big(\sin x \cos t - \cos x \sin t\big) \frac{1}{\cos t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{x} \sin x - \cos x \cdot \frac{\sin t}{\cos t} \, \mathrm{d}t = \Big[t \sin x + \cos x \cdot \ln \cos t \Big]_{t=0}^{x} \\ &= x \sin x + \cos x \cdot \ln \cos x \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sin x + x \cos x - \sin x \cdot \ln \cos x - \sin x \\ y''(x) &= \cos x - x \sin x - \cos x \cdot \ln \cos x + \sin(x)^2 / \cos x \end{aligned}$$

Einsetzen: $y''(x) + y(x) = \cos x + \sin(x)^2 / \cos x = 1/\cos x$.

Lösungsansatz für spezielle rechte Seiten

Satz M2F

Seien $p, r \in \mathbb{C}[x]$ *Polynome. Zu lösen sei die Differentialgleichung*

$$\boxed{p(\partial)\, y(x) = r(x)\, \mathrm{e}^{\mu x}.}$$

Ist μ *eine* k*–fache Nullstelle von* p*, so existiert eine Lösung der Form*

$$\boxed{y_b(x) = q(x)\, x^k\, \mathrm{e}^{\mu x}}$$

mit einem eindeutigen Polynom $q \in \mathbb{C}[x]$ *vom Grad* $\deg q = \deg r$*.*
Speziell $p(\partial)\, y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}$ *wird gelöst durch* $y_b(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\, x^k / p^{(k)}(\mu)$*.*

🙂 Man berechnet q leicht durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich.
Hier ist $k = 0$ erlaubt; bei $k > 0$ spricht man von k–facher **Resonanz**.

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\boxed{y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = b(x)}$$

mit rechten Seiten $b(x) = 0,\ \ 24\,\mathrm{e}^{2x},\ \ 24\,x\,\mathrm{e}^{2x},$

Lösung: (a) Das char. Polynom unserer Gleichung $p(\partial)\,y = 0$ ist

$$p(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

Nullstellen -1, -2. Fundamentallösungen unserer DG sind $\mathrm{e}^{-x},\ \mathrm{e}^{-2x}$.
Die allgemeine Lösung ist demnach $y(x) = \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\,\mathrm{e}^{-2x}$.

(b) Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = 24\,\mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = 2$.
Dies ist keine Nullstelle von p (Vielfachheit $k = 0$!), genauer $p(2) = 12$.
Nach obigem Satz gelingt der Ansatz $y_b(x) = c\,\mathrm{e}^{2x}$. Einsetzen in die DG:

$$y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) = p(2)\,c\,\mathrm{e}^{2x} \quad \stackrel{!}{=} \quad 24\,\mathrm{e}^{2x}$$

Koeffizientenvergleich: $c = 2$. Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} + \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Spezielle rechte Seite mit & ohne Resonanz

(c) Wir lösen $p(\partial)\,y(x) = 24\,x\,\mathrm{e}^{\mu x}$ für $\mu = 2$.

Dies ist keine Nullstelle von p. Nach dem letzten Satz gelingt der Ansatz

$$\begin{aligned} y_b(x) &= (c_0 + c_1 x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ y_b'(x) &= (2c_0 + c_1 + 2c_1 x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ y_b''(x) &= (4c_0 + 4c_1 + 4c_1 x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

$$y_b''(x) + 3y_b'(x) + 2y_b(x) = \big[(12c_0 + 7c_1) + 12c_1 x\big]\,\mathrm{e}^{2x} \quad \stackrel{!}{=} \quad 24\,x\,\mathrm{e}^{2x}$$

Koeffizientenvergleich: $c_1 = 2$ und $c_0 = -\frac{7}{6}$.

Unser Partikulärlösung ist also $y_b(x) = \big(2x - \frac{7}{6}\big)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Die allgemeine Lösung ist demnach

$$y(x) = \big(2x - \tfrac{7}{6}\big)\,\mathrm{e}^{2x} + \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Lineare Differentialgleichungen n–ter Ordnung

Eine **lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung** ist von der Form

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = b(x).}$$

Die linke Seite ist der **Differentialoperator** $L : C^n(I, \mathbb{K}) \to C^0(I, \mathbb{K})$,

$$L\;:\;y \mapsto a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)}.$$

Gesucht sind Funktionen $y : I \to \mathbb{K}$, die die Gleichung $L\,y = b$ erfüllen.
Linearität bedeutet: Aus Lösungen y_1 zu b_1 und y_2 zu b_2 ergibt die Linearkombination $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ eine Lösung zu $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$.

Die zugehörige **homogene lineare Differentialgleichung** ist

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = 0.}$$

Kurz $L\,y = 0$: Wir suchen nach dem Kern der linearen Abbildung L.

Lineare Struktur des Lösungsraumes

Satz M3A (Struktursatz für lineare Differentialgleichungen)

(0) ***Globale Existenz und Eindeutigkeit****: Zu jedem Anfangsdatum $(x_0, v_0, \dots, v_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{K}$ mit $Ly = b$ und $y(x_0) = v_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1}$.*

(1) Die Lösungsmenge $L_0 = \{\, y \mid L\,y = 0 \,\}$ ist ein ***Vektorraum****. Die Auswertung $\Psi : L_b \to \mathbb{K}^n : y \mapsto \big(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)\big)$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus, d.h. $\dim_{\mathbb{K}} L_0 = n$.*

Wählt man ein ***Fundamentalsystem*** *$y_1, \dots, y_n \in L_0$, also eine Basis von L_0 bestehend aus n linear unabhängigen Lösungen, so ist:*

$$L_0 = \left\{\, c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\} \quad \cong \quad \mathbb{K}^n$$

(2) Die Lösungsmenge $L_b = \{\, y \mid L\,y = b \,\}$ ist ein ***affiner Raum****. Für jede* ***Partikulärlösung*** *$y_b \in L_b$ gilt $L_b = y_b + L_0$, ausgeschrieben:*

$$L_b = y_b + L_0 = \left\{\, y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Die Besselsche Differentialgleichung

Die Besselsche Differentialgleichung

Für viele Differentialgleichungen existiert keine elementare Lösung. In diesem Fall kann der Potenzreihenansatz meist weiterhelfen:

Aufgabe: (1) Bestimmen Sie die Potenzreihe $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit

$$\boxed{x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0 \quad \text{und} \quad J_0(0) = 1,\ J_0'(0) = 0.}$$

(2) Berechnen Sie aus den Koeffizienten den Konvergenzradius.

(3) Skizzieren Sie die so dargestellte Funktion J_0.

Die Besselsche Differentialgleichung

Lösung: (1) Einsetzen von $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in die DG ergibt:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = 0$$

Dies fassen wir als eine einzige Potenzreihe zusammen:

$$a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \big[k^2 a_k + a_{k-2} \big] x^k = 0$$

Wir erhalten $a_k = -a_{k-2}/k^2$ für alle $k \ge 2$. Aus $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ folgt

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j}{4^j (j!)^2} \quad \text{und} \quad a_{2j+1} = 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

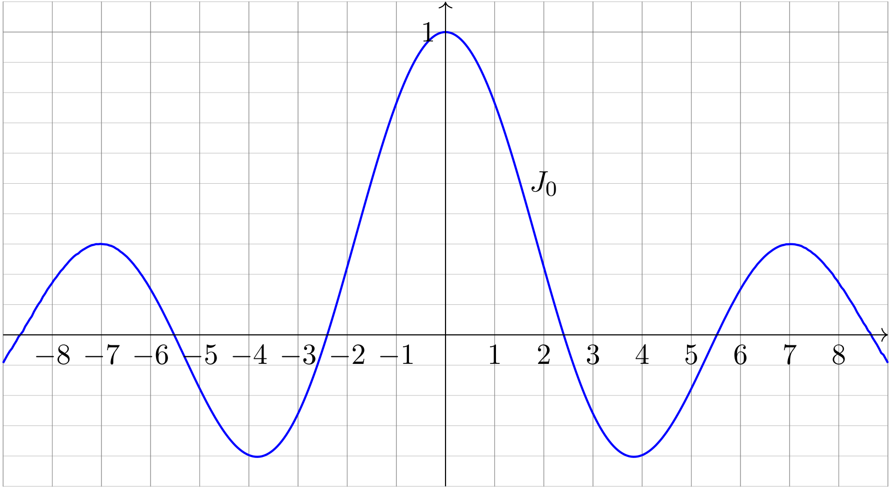
Wenn es also eine Lösung in Form einer Potenzreihe gibt, dann diese!

(2) Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, definiert also eine Funktion $J_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Besselsche Differentialgleichung

(3) Wir skizzieren schließlich den Graphen der Bessel–Funktion

$$J_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{4^j (j!)^2}\, x^{2j} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots$$



Kapitel N

Differentialgleichungssysteme

Inhalt dieses Kapitels

Motivation und Überblick

Jedes **Differentialgleichungssystem** erster Ordnung hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ \qquad \vdots \\ y_n'(t) = f_n\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big). \end{cases}$$

Mit $y = (y_1, \dots, y_n)$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$ bündeln wir dies kürzer und übersichtlicher als eine **vektorwertige Differentialgleichung**:

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t))}$$

Gegeben ist rechts die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supset G \to \mathbb{K}^n$.

Als Lösung gesucht sind alle diff'baren Funktionen $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{K}^n$ auf einem (maximalen) Intervall I mit $(t, y(t)) \in G$ und $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$. Meist ist zudem ein Anfangswert $(t_0, y_0) \in G$ vorgegeben (**Anfangswertproblem**).

Motivation und Überblick

Wichtige Klasse: **lineare Differentialgleichungssystem** von der Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)\, y_1(t) + a_{12}(t)\, y_2(t) + \dots + a_{1n}(t)\, y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) = a_{21}(t)\, y_1(t) + a_{22}(t)\, y_2(t) + \dots + a_{2n}(t)\, y_n(t) + b_2(t) \\ \quad\vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)\, y_1(t) + a_{n2}(t)\, y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)\, y_n(t) + b_n(t). \end{cases}$$

Solche Gleichungssysteme bündeln wir prägnant zu einer Gleichung:

$$\boxed{y'(t) = A(t)\, y(t) + b(t).}$$

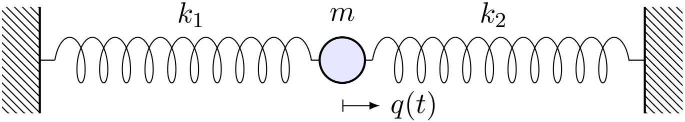
Hier heißt A **Koeffizientenmatrix** und b **rechte Seite** des DGSystems.

Bei linearen DG sind zwei strukturelle Aspekte grundlegend:

- Die Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung ist immer ein **Vektorraum** ($b = 0$) bzw. ein **affiner Raum** ($b \neq 0$).
- Dieser Raum hat immer **Dimension n:** Dies folgt aus Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenen Anfangsdaten.

Dies struktuiert und vereinfacht das Problem, alle Lösungen zu finden!

Der harmonische Oszillator



Aufgabe: Formulieren und lösen Sie den harmonischen Oszillator
(1) als eine eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung,
(2) als ein zweidim. Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

Lösung: (1) Zeit $t \in \mathbb{R}$, Position $q(t) \in \mathbb{R}$, Geschwindigkeit $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}$, Beschleunigung $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}$, Kraft $-\omega_0^2\, q(t) - 2\delta\, \dot{q}(t)$, Bewegungsgesetz:

$$\boxed{\ddot{q}(t) + 2\delta\, \dot{q}(t) + \omega_0^2\, q(t) = 0}$$

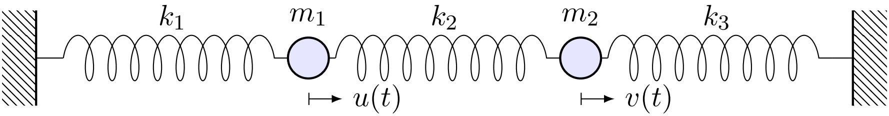
Allg. Lösung $q(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\big[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big]$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

(2) Zustand $(x_1(t), x_2(t)) = (q(t), \dot{q}(t))$, Zustandsraum $\mathbb{R}^2$, DGSystem:

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= & & x_2 \\ \dot{x}_2 &= & -\omega_0^2 x_1 & -2\delta x_2 \end{aligned}\right\} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

Gekoppelte Schwingungen

Aufgabe: Formulieren Sie folgendes dynamische System:



Lösung: Auslenkungen $u(t), v(t)$ aus der Ruhelage. Kräftebilanz:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= -k_1\, u(t) - k_2\big[u(t) - v(t)\big] \\ F_2(t) &= -k_3\, v(t) - k_2\big[v(t) - u(t)\big] \end{aligned}$$

Bewegungsgesetz: $m_1 u''(t) = F_1(t)$ und $m_2 v''(t) = F_2(t)$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} u''(t) &= -\tfrac{k_1+k_2}{m_1}\, u(t) + \tfrac{k_2}{m_1}\, v(t) \\ v''(t) &= +\tfrac{k_2}{m_2}\, u(t) - \tfrac{k_2+k_3}{m_2}\, v(t) \end{aligned}$$

Gekoppelte Schwingungen

Wir haben ein (lineares) DGSystem zweiter Ordnung:

$$\begin{cases} u''(t) = a\,u(t) + b\,v(t) \\ v''(t) = c\,u(t) + d\,v(t) \end{cases}$$

Dies reduzieren wir zu einem (linearen) DGSystem erster Ordnung:
Neue Variablen $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = u'$, $y_4 = v'$. Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \text{kurz} \quad y' = A\,y.$$

🙂 Hier zahlen sich Matrizenrechnung und lineare Algebra aus:

Der Lösungsraum ist ein Vektorraum der Dimension 4. Das hilft:
Wir suchen eine Basis aus vier unabhängigen Lösungsfunktionen!

Gekoppelte Schwingungen

Aufgabe: (1) Lösen Sie den symmetrischen Fall $m_1 = m_2$, $k_1 = k_3$.
(2) Welche Bewegung folgt aus $u(0) = 2$, $u'(0) = v(0) = v'(0) = 0$?

Lösung:

Erster Ansatz $u = v$.

Entkoppelte Differentialgleichungen: $u'' = -\frac{k_1}{m_1} u,\; v'' = -\frac{k_1}{m_1} v$.

Lösungen: $u_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ und $u_2(t) = \sin(\omega_1 t)$ mit $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$.

Zweiter Ansatz $u = -v$.

Entkoppelte Differentialgleichungen: $u'' = -\frac{k_1+2k_2}{m_1} u,\; v'' = -\frac{k_1+2k_2}{m_1} v$.

Lösungen: $u_3(t) = \cos(\omega_2 t)$ und $u_4(t) = \sin(\omega_2 t)$ mit $\omega_2^2 = \frac{k_1+2k_2}{m_1}$.

☺ Damit sind wir fertig: Jede Lösung ist eine Linearkombination

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} u_3(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} u_4(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix}.$$

Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Jedes **Differentialgleichungssystem erster Ordnung** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big), \\ \qquad \vdots \\ y_n'(t) = f_n\big(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\big). \end{cases}$$

Mit $y = (y_1, \dots, y_n)$ und $f = (f_1, \dots, f_n)$ bündeln wir dies kürzer und übersichtlicher als eine **vektorwertige Differentialgleichung**:

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t))}$$

Beispiel: Newtons Himmelsmechanik

Aufgabe: Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen von n Körpern mit Masse $m_k > 0$, Position $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $v_k(t) \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Newtons Gravitationsgesetz ergibt die Differentialgleichungen

$$\boxed{\dot{u}_k = v_k, \quad \dot{v}_k = f_k(u) := \sum\nolimits_{j \neq k} \gamma\, m_j \frac{u_j - u_k}{|u_j - u_k|^3}.}$$

Vorgegeben sind die Anfangssdaten $u_k(0)$ und $v_k(0)$ zur Zeit $t = 0$.
Als Lösung gesucht ist die Bewegung $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) : [0, T[\to \mathbb{R}^{6n}$.

🙂 Den Fall $n = 2$ lösen Kegelschnitte: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.

☹ Für $n \geq 3$ lässt sich dieses DGSystem i.A. nicht geschlossen lösen!

Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Satz N0B (Cauchy Existenz- und Eindeutigkeitssatz, kurz E&E)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \supset G \to \mathbb{K}^n$ *stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung*

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t)) \quad \textit{mit Anfangswert} \quad y(t_0) = y_0.}$$

(1) Zu jedem Startpunkt $(t_0, y_0) \in \mathring{G}$ *existieren Lösungen* $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{K}^n$*. Jede kann beidseitig bis zum Rand* ∂G *(oder* ∞*) fortgesetzt werden.*

(2) Ist $f(t, y)$ *stetig diff'bar nach* y*, so ist die Lösung durch* $(t_0, y_0) \in \mathring{G}$ *eindeutig bestimmt. Sie hängt stetig differenzierbar von* (t_0, y_0) *ab.*

Lineare Differentialgleichungssysteme

Lineare Differentialgleichungssysteme

Jedes **lineare Differentialgleichungssystem** hat die Form

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)\,y_1(t) + a_{12}(t)\,y_2(t) + \dots + a_{1n}(t)\,y_n(t) + b_1(t), \\ y_2'(t) = a_{21}(t)\,y_1(t) + a_{22}(t)\,y_2(t) + \dots + a_{2n}(t)\,y_n(t) + b_2(t), \\ \qquad \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)\,y_1(t) + a_{n2}(t)\,y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)\,y_n(t) + b_n(t). \end{cases}$$

Wir bündeln dies prägnant zu einer vektorwertigen Gleichung:

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t)}$$

Die zugehörige **homogene Gleichung** erhalten wir für $b = 0$:

$$\boxed{y'(t) = A(t)\,y(t)}$$

Lineare Differentialgleichungssysteme

Beispiel: Unser einführendes Beispiel ist das homogene DGSystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Lemma N1G (Linearkombination von Lösungen)

Sei $y_1 : I \to \mathbb{K}^n$ *eine Lösung der Gleichung* $y_1' = A\,y_1 + b_1$
und $y_2 : I \to \mathbb{K}^n$ *eine Lösung der Gleichung* $y_2' = A\,y_2 + b_2$.

Die Linearkombination $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 : I \to \mathbb{K}^n$ *mit* $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ *ist dann eine Lösung der Gleichung* $y' = A\,y + b$ *mit Störterm* $b = c_1 b_1 + c_2 b_2$.

Nachrechnen: Wir nutzen die Linearität der Ableitung:

$$\begin{aligned} y' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' = c_1(A\,y_1 + b_1) + c_2(A\,y_2 + b_2) \\ &= A(c_1 y_1 + c_2 y_2) + (c_1 b_1 + c_2 b_2) = A\,y + b \end{aligned}$$

Lineare Struktur des Lösungsraumes

Satz N1H (Struktursatz für lineare Differentialgleichungen)

Wie zuvor sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetig. Wir betrachten die Lösungsmenge $L_b = \{\, y \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \mid y' = A\,y + b \,\}$.

(0) ***Globale Existenz und Eindeutigkeit****: Für jeden Zeitpunkt $t_0 \in I$ ist die Auswertung $\Psi : L_b \to \mathbb{K}^n : y \mapsto y(t_0)$ bijektiv; zu jedem Anfangsdatum $y_0 \in \mathbb{K}^n$ existiert genau eine Lösung $y \in L_b$ mit $y(t_0) = y_0$.*

(1) $L_0 = \{\, y \mid y' = A\,y \,\}$ ist ein ***Vektorraum*** *der Dimension n über $\mathbb{K}$. Wir finden ein* ***Fundamentalsystem*** *$y_1, \dots, y_n \in L_0$, also eine Basis von L_0 bestehend aus n linear unabhängigen Lösungen, und erhalten:*

$$L_0 = \left\{\, c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\} \quad \cong \quad \mathbb{K}^n$$

(2) $L_b = \{\, y \mid y' = A\,y + b \,\}$ ist ein ***affiner Raum*** *der Dimension n. Für jede* ***Partikulärlösung*** *$y_b \in L_b$ gilt $L_b = y_b + L_0$, ausgeschrieben:*

$$L_b = y_b + L_0 = \left\{\, y_b + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \;\middle|\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} \,\right\}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Lösungen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ bündeln wir zur **Fundamentalmatrix**:

$$\begin{aligned} &Y : I \to \mathbb{K}^{n\times n}, \\ &Y(t) = \big(y_1(t), \dots, y_n(t)\big) = \end{aligned} \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) & \dots & y_{n1}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(t) & y_{2n}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Man nennt $Y(t)$ auch die **Wronski–Matrix** der Funktionen $y_1, \dots, y_n$ und $\det Y(t)$ ihre **Wronski–Determinante**. Diese sind oft nützlich:

Korollar N1ı (Unabhängigkeitskriterium)

Folgende Aussagen sind zueinander äquivalent:

(i) Die Funktionen $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{K}^n$ sind linear unabhängig.

(ii) Die Determinante erfüllt $\det Y(t) \ne 0$ für ein und damit alle $t \in I$.