Exakte Differentialgleichungen

Exakte Differentialgleichungen: die Methode

Satz L2A (Lösung exakter Differentialgleichung)

Jedes stetige Vektorfeld $(f,g):\mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^2$ *definiert eine DG*

$$\boxed{f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0.}$$

Diese DG heißt ***exakt****, wenn ein Potential* Φ *zu* (f,g) *existiert, d.h. eine Funktion* $\Phi:\mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ *mit* $\operatorname{grad}\Phi = (f,g)$*, d.h.* $\partial_x\Phi = f$*,* $\partial_y\Phi = g$*. Die Lösungen der DG sind dann die Äquipotentialkurven von* Φ*:*

(1) Eine differenzierbare Funktion $y:\mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ *ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn* $\Phi(x,y(x)) = \mathrm{const}$ *für alle* $x \in I$ *gilt.*

(2) Zu jedem Punkt $(x_0,y_0) \in G$ *mit* $g(x_0,y_0) \neq 0$ *existiert ein offenes Intervall* I *um* x_0 *und eine eindeutige Lösung* $y: I \to \mathbb{R}$ *mit* $y(x_0) = y_0$*.*

🙂 Implizite Lösung 🙂 Eindeutigkeit 🙂 Stetig abhängig von (x_0,y_0)

Wie löst man exakte Differentialgleichungen?

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0$$

ist genau dann exakt, wenn das Vektorfeld $(f,g) : G \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

exakt ist, also ein Potential $\Phi : G \to \mathbb{R}$ besitzt. Zur Erinnerung (G2E):

(f,g) ist exakt, d.h. $\exists \Phi : \partial_x \Phi = f, \partial_y \Phi = g$	$\xrightarrow{\;(f,g)\text{ stetig diff'bar}\;}$ $\xleftarrow[\;G\text{ einfach zshgd}\;]{}$	f ist rotationsfrei, d.h. $\partial_x g = \partial_y f$

Was ist ein integrierender Faktor?

Sei $(f, g) : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^2$ stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung

$$\boxed{f(x,y) + g(x,y)\, y' = 0.}$$

Multiplikation mit $\lambda \neq 0$ ergibt die äquivalente Differentialgleichung

$$\boxed{\lambda(x,y)\, f(x,y) + \lambda(x,y)\, g(x,y)\, y' = 0.}$$

Definition L2B (integrierender Faktor)

Eine Funktion $\lambda : G \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt **integrierender Faktor** zu (f, g), wenn das skalierte Vektorfeld $(\lambda f, \lambda g) : G \to \mathbb{R}^2$ ein Potential hat.

Integrierender Faktor: ein einfaches Beispiel

Aufgabe: Wir betrachten das Vektorfeld $(f,g):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y^3+y \\ x^3y^2-x \end{pmatrix}.$$

Existiert ein Potential? Ist $\lambda(x,y)=(xy)^{-1}$ ein integrierender Faktor?

Lösung: (1) Das Vektorfeld (f,g) erlaubt kein Potential, denn

$$\operatorname{rot}(f,g)=\partial_x g-\partial_y f=(3x^2y^2-1)-(3x^2y^2+1)=-2\neq 0$$

(2) Multiplikation mit $\lambda(x,y)=(xy)^{-1}$ skaliert das Vektorfeld zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\lambda f)(x,y) \\ (\lambda g)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,y^2+1/x \\ x^2y-1/y \end{pmatrix}.$$

Dank dieser Korrektur verschwindet die Rotation, denn

$$\operatorname{rot}(\lambda f,\lambda g)=\partial_x(\lambda g)-\partial_y(\lambda f)=2xy-2xy=0$$

(3) Als Potential finden wir $\Phi(x,y)=x^2y^2/2+\ln|x|-\ln|y|$ für $x,y\neq 0$.

Wie berechnet man einen integrierenden Faktor?

Bedingung für einen integrierenden Faktor zum Vektorfeld (f, g):

$$\boxed{\partial_y\big[\lambda(x,y)\, f(x,y)\big] = \partial_x\big[\lambda(x,y)\, g(x,y)\big]}$$

Aufgabe: Lösen Sie diese Gleichung für $\lambda = \lambda(x)$, also $\partial_y \lambda = 0$.

Lösung: Die obige Gleichung vereinfacht sich für $\lambda(x)$ zu:

$$\lambda(x)\, \partial_y f(x,y) = \lambda'(x)\, g(x,y) + \lambda(x)\, \partial_x g(x,y)$$

Wir lösen nach λ auf und erhalten folgende gewöhnliche DG:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x,y) - \partial_x g(x,y)}{g(x,y)} \qquad = -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g}$$

🙂 Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von x abhängt!

Integrierende Faktoren in nur einer Variablen

Satz L2C

Für jeden nur von x abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(x)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\partial_y f(x,y) - \partial_x g(x,y)}{g(x,y)}, \qquad \textit{kurz:} \qquad \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g}}$$

Für jeden nur von y abhängigen integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(y)$ gilt:

$$\boxed{\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\partial_x g(x,y) - \partial_y f(x,y)}{f(x,y)}, \qquad \textit{kurz:} \qquad \frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = +\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{f}}$$

Dies ist lösbar, wenn auch die rechte Seite nur von x bzw. y abhängt.

Beispielrechnung für einen integrierenden Faktor

Aufgabe: Zu lösen sei für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$\boxed{\left[1 - x^2 y(x)\right] + \left[x^2 y(x) - x^3\right] y'(x) = 0.}$$

(1) Ist sie separierbar? (2) exakt? (3) Existiert ein integrierender Faktor?

Lösung: (1) Separierbar? $f(x,y) = \frac{x^2y-1}{x^2y-x^3} \stackrel{?}{=} g(x)\,h(y)$: Nein!
(2) Exakt? Hier ist $f(x,y) = 1 - x^2 y$ und $g(x,y) = x^2 y - x^3$, also

$$\operatorname{rot}(f,g) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = (2xy - 3x^2) + x^2 = 2xy - 2x^2 \neq 0$$

Die DG ist demnach leider nicht exakt. (3) Glücklicherweise gilt jedoch

$$-\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g} = -\frac{2xy - 2x^2}{x^2 y - x^3} = -\frac{2x(y-x)}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x}.$$

Daher gibt es einen nur von x abhängigen integrierenden Faktor:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\lambda(x)| = -2\ln|x| + \text{const} \quad \Rightarrow \quad \lambda(x) = c\,x^{-2}$$

Beispielrechnung für einen integrierenden Faktor

(4) Wir berechnen ein Potential zum reskalierten Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} (\lambda f)(x,y) \\ (\lambda g)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-2} - y \\ y - x \end{pmatrix}.$$

Nun gilt $\operatorname{rot}(\lambda f, \lambda g) = 0$. Probe! Wir integrieren koordinatenweise:

$$\begin{aligned}
\partial_x \Phi(x,y) &\stackrel{!}{=} x^{-2} - y & \implies \quad \Phi(x,y) &= \int x^{-2} - y \,\mathrm{d}x \\
& & &= -x^{-1} - xy + c(y). \\
\partial_y \Phi(x,y) &= -x + c'(y) \stackrel{!}{=} y - x & \implies \quad c(y) &= \int y \,\mathrm{d}y \\
& & &= y^2/2 + \mathrm{const}
\end{aligned}$$

Wir finden so das Potential $\Phi(x,y) = y^2/2 - xy - 1/x$.

(5) Die Lösungskurven $x \mapsto y(x)$ der DG sind die Niveaulinien von Φ:

$$y(x)^2/2 - x\,y(x) - 1/x = c.$$

Auflösen nach y ergibt $y(x) = x \pm \sqrt{x^2 + 2/x + 2c}$. Die Probe ist leicht!

Anwendung: inhomogene Lineare DG

Aufgabe: Lösen Sie die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Lösung: Separierbar? Nein, für $b(x) \neq 0$. Exakt? Leider auch nicht:

$$\underbrace{-a(x)\,y(x) - b(x)}_{f(x,y)} + \underbrace{1}_{g(x,y)}\,y'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot}(f,g) = a(x) \neq 0$$

Integrierender Faktor $\lambda(x)$? Löse $\lambda'(x)/\lambda(x) = -\operatorname{rot}(f,g)/g = -a(x)$!
Integration ergibt $\lambda(x) = \mathrm{e}^{-A(x)} > 0$ mit $A(x) = \int_{t=x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$. Also:

$$-\big[\mathrm{e}^{-A(x)} a(x)\,y(x) + \mathrm{e}^{-A(x)}\,b(x)\big] + \big[\mathrm{e}^{-A(x)}\big]y'(x) = 0$$

Diese DG ist exakt. (Probe!) Hierzu finden wir das Potential

$$\Phi(x,y) = \mathrm{e}^{-A(x)}\,y - \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \text{(Probe!)}$$

Auflösen der Gleichung $\Phi(x,y) = \Phi(x_0,y_0) = y_0$ nach y liefert

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0. \qquad \text{(Probe!)}$$

Inhomogene lineare Differentialgleichung

Satz L2E (Lösungsformel für lineare DG 1. Ordnung)

Zur inhomogenen Gleichung

$$\boxed{\;y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \quad \textit{mit} \quad y(x_0) = y_0\;}$$

existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$*, und diese ist gegeben durch*

$$\boxed{\;y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\, b(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \mathrm{e}^{A(x)}\, y_0.\;}$$

🙂 Lösungsformel 🙂 Eindeutigkeit 🙂 Stetig abhängig von (x_0, y_0)

Lineare Differentialgleichung: erstes Beispiel

Aufgabe: Lösen Sie für $x > 0$ die Differentialgleichung

$$\boxed{y' = y/x + x^3 \quad \text{mit} \quad y(1) = y_0.}$$

Lösung: Diese DG ist linear mit $a(x) = 1/x$ und $b(x) = x^3$.

$$A(x) = \int_{t=1}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln t\Big]_{t=1}^{x} = \ln x.$$

Der integrierende Faktor ist $\mathrm{e}^{A(x)} = x$. Damit finden wir:

$$\int_{t=1}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{x} t^{-1} \cdot t^3\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{x} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=1}^{x} = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$

Als Lösung unserer Differentialgleichung gewinnen wir schließlich:

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{A(x)}\,y_0 = \underbrace{\frac{x^4 - x}{3}}_{\text{partikuläre Lösung}} + \underbrace{x\,y_0}_{\text{homogene Lösung}}$$

Elementar lösbare Differentialgleichungen

Sei $f:\mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ stetig. Zu lösen sei die **Differentialgleichung**

$$\boxed{y' = f(x,y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Qualitativer Überblick dank **Existenz- und Eindeutigkeitssatz**:

(1) Im Inneren $\mathring{G}$ existieren Lösungen und laufen bis zum Rand ∂G.

(2) Ist f stetig diff'bar nach y, so ist die Lösung durch $(x_0, y_0) \in \mathring{G}$ eindeutig bestimmt und hängt stetig von diesen Anfangswerten ab.

Elementar lösen können wir vor allem **exakte Differentialgleichungen**:

- $f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0$ ist exakt, wenn $(f,g) = \operatorname{grad}\Phi$.

Wichtige **Spezialfälle** hiervon sind:

- $y' = f(x)$ durch Integration dank HDI.
- $y' = g(x)\,h(y)$ durch Trennung der Variablen.
- $y' = a(x)\,y + b(x)$ lineare DG, explizite Lösungsformel.

Durch **Substitution** hierauf zurückführbar sind:

- $y' = f(ax+by+c)$ mit Substitution $v = ax+by+c$.
- $y' = f(y/x)$ Ähnlichkeits-DG, mit Substitution $v = y/x$.
- $y' = a(x)\,y + b(x)\,y^n$ Bernoulli–DG, mit Substitution $v = y^{1-n}$.

Kapitel M

Differentialgleichungen höherer Ordnung

Inhalt dieses Kapitels

Einleitung

Im vorigen Kapitel haben wir Differentialgleichungen $y'(x) = f(x, y(x))$ erster Ordnung in einer Dimension kennen und lösen gelernt.

Nun: DG höherer Ordnung, diese sind von der Form:

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \ .$$

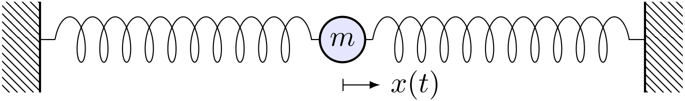
Wichtig und noch gut lösbar sind **lineare Differentialgleichungen**:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x).$$

Im Falle $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ haben wir **konstante Koeffizienten**.

Einführendes Beispiel: mechanische Schwingung

Schwingung einer Masse an einer Feder:



Zeit $t \in \mathbb{R}$, Auslenkung $x(t)$ aus Ruhelage, Rückstellkraft $F_1 = -k\,x$, zusätzlich Reibung / viskoser Strömungswiderstand $F_2 = -c\,\dot{x}$.

Newtons Bewegungsgesetz $m\,\ddot{x} = F_1 + F_2$, also $m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0$.

Dies führt zu einer **linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0}$$

mit konstanten Koeffizienten $\delta = c/2m \geq 0$ und $\omega_0^2 = k/m$, $\omega_0 \geq 0$.

Bei äußerer Anregung durch eine Kraft $F(t) = m\,f(t)$ gilt:

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = f(t)}$$

Freie harmonische Schwingung

Aufgabe: Finden Sie alle Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = 0.}$$

Lösung: Der Exponentialansatz $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ führt zu folgender Gleichung:

$$\underbrace{\left(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2\right)}_{\text{char. Polynom}} \mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \underbrace{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}_{\text{Eigenwerte}} \;\in\; \mathbb{C}$$

$\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**, zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
$\delta < \omega_0$: **schwache Dämpfung**, zwei komplex-konjugierte Nullstellen
$\delta = \omega_0$: **kritische Dämpfung**, doppelte reelle Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$

Starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$

Im Fall $\delta > \omega_0$ gibt es **zwei reelle Nullstellen** $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$:

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad < \quad \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad < \quad 0.$$

Hierzu gehören die Lösungen $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ und $\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$.
Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Linearkombination:

$$\boxed{u(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}}$$

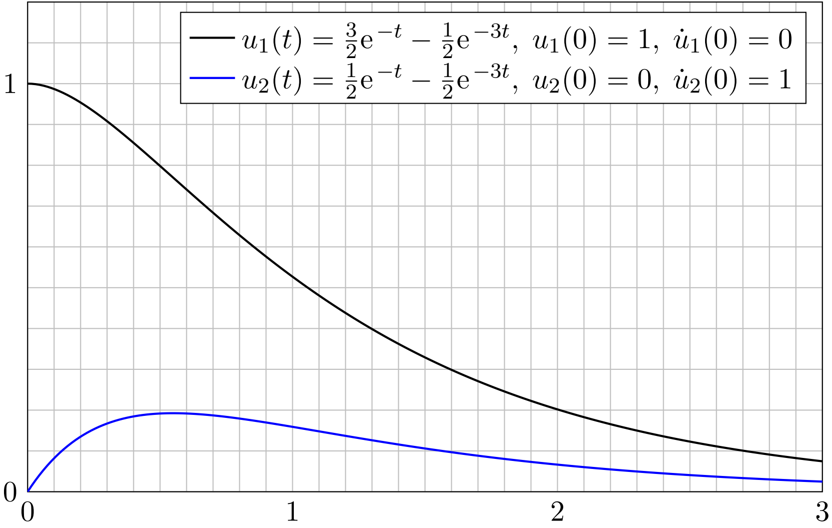
Beispiel: Die Differentialgleichung $\ddot{u}(t) + 4\,\dot{u}(t) + 3\,u(t) = 0$ führt zur Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, also $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -1$.

Linearfaktorzerlegung $(\partial_t + 3)(\partial_t + 1)\,u(t) = 0$, Lösungen e^{-3t}, e^{-t}.
Die DG hat als reelle Lösungen $u(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-3t} + c_2\,\mathrm{e}^{-t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Anfangswerte $u(0) = 1$ und $\dot{u}(0) = 0$ führen zu $u(t) = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3t}$.

Anfangswerte $u(0) = 0$ und $\dot{u}(0) = 1$ führen zu $u(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3t}$.

Starke Dämpfung: $\delta > \omega_0$



Schwache Dämpfung: $\delta < \omega_0$

Im Fall $0 \le \delta < \omega_0$ gibt es **zwei komplex-konjugierte Nullstellen**

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \mathrm{i}\,\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad 0 < \omega \le \omega_0.$$

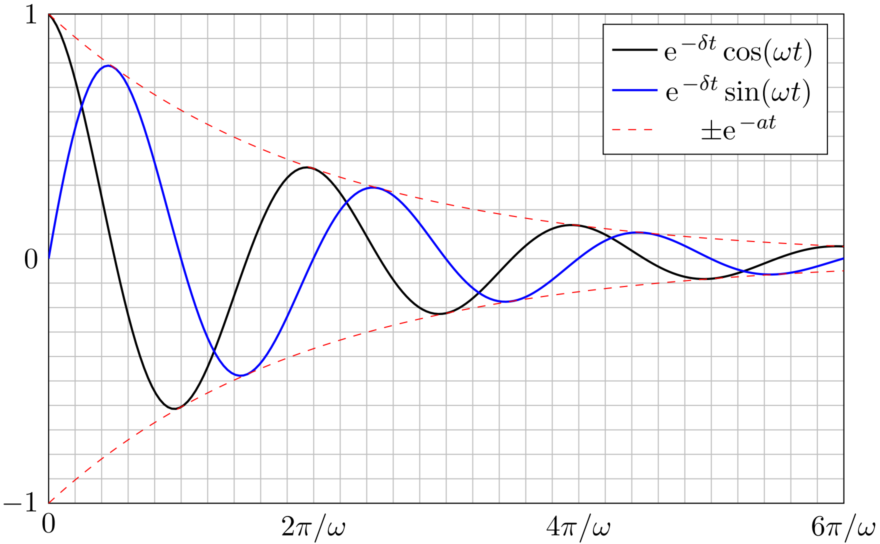
Die komplexen Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Differentialgleichung sind

$$\boxed{u(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.}$$

Die reellen Lösungen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung sind

$$\boxed{u(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left[\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)\right] \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.}$$

Schwache Dämpfung: $\delta < \omega_0$



Kritische Dämpfung: $\delta = \omega_0$

Im Fall $\delta = \omega_0$ gibt es eine **doppelte reelle Nullstelle** $\lambda = -\delta$.

Wir finden die Lösung $\mathrm{e}^{\lambda t}$ und zusätzlich $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist demnach:

$$\boxed{u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)}$$

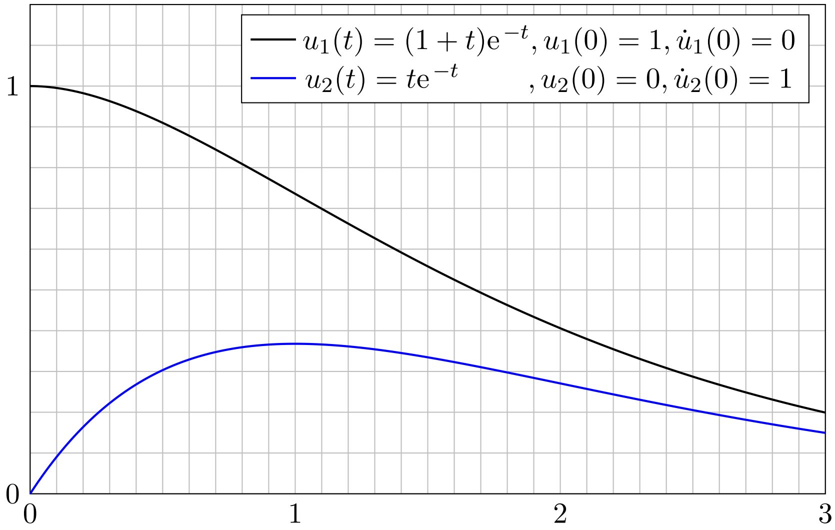
Nachrechnen: Zu lösen ist hier $\ddot{u}(t) - 2\lambda\,\dot{u}(t) + \lambda^2\,u(t) = 0$.

Linearfaktorzerlegung $(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda)\,u(t) = 0$. Einsetzen:

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda)\left[\mathrm{e}^{\lambda t}\right] &= (\partial_t - \lambda)\big[\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t} - \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}\big] \\
&= (\partial_t - \lambda)\big[0\big] && = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \lambda)(\partial_t - \lambda)\left[t\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right] &= (\partial_t - \lambda)\big[\mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda t\,\mathrm{e}^{\lambda t} - \lambda t\,\mathrm{e}^{\lambda t}\big] \\
&= (\partial_t - \lambda)\big[\mathrm{e}^{\lambda t}\big] && = 0
\end{aligned}$$

Kritische Dämpfung: $\delta = \omega_0$



Erzwungene harmonische Schwingung

Aufgabe: Bei Anregung durch $f(t) = a\cos(\omega_1 t)$ ist als DG zu lösen

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = a\cos(\omega_1 t).}$$

Lösung: Dies ist der Realteil der komplexen Differentialgleichung

$$\ddot{z}(t) + 2\delta\,\dot{z}(t) + \omega_0^2\,z(t) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}.$$

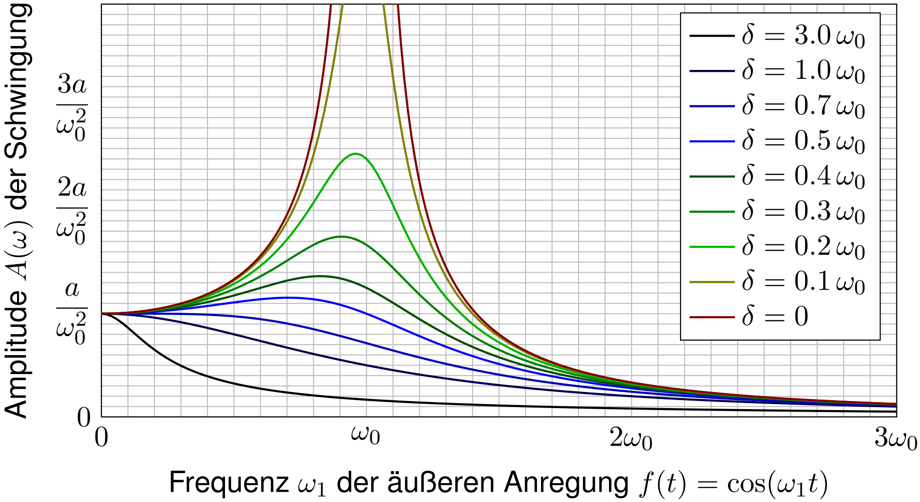
Der Exponentialansatz $z(t) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ führt uns zur Gleichung

$$\left[-\omega^2 + 2\delta\,\mathrm{i}\omega + \omega_0^2\right] c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \stackrel{!}{=} a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}.$$

Damit finden wir die Werte $\omega = \omega_1$ und $c = a/(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\delta\,\mathrm{i}\omega)$.
In Polardarstellung $c = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ erhalten wir $z(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t - \varphi)}$ mit

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}}, \quad \varphi = \arctan\frac{2\delta\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

Erzwungene harmonische Schwingung



Zusammenfassung: Die **homogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = 0}$$

hat einen zweidimensionalen Lösungsraum; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right] & \text{für } \delta < \omega_0 \text{ und } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \\ \mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right] & \text{für } \delta > \omega_0 \text{ und } \lambda = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \\ \mathrm{e}^{-\delta t}\left[c_1 + c_2 t\right] & \text{für } \delta = \omega_0 \text{ (kritische Dämpfung).} \end{cases}$$

Freie und erzwungene harmonische Schwingung

Zusammenfassung: Die **inhomogene lineare Differentialgleichung**

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\delta\,\dot{u}(t) + \omega_0^2\,u(t) = a\cos(\omega_1 t)}$$

hat einen zweidim. affinen Lösungsraum; die allgemeine Lösung ist

$$u(t) = u_p(t) + c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad \text{mit freien Konstanten } c_1, c_2 \text{ und}$$

$$u_p(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_1 t - \varphi) & \text{für } \delta > 0 \text{ oder } \omega_1 \neq \omega_0 \text{ (generisch)}, \\ \dfrac{at}{2\omega_1}\sin(\omega_1 t) & \text{für } \delta = 0 \text{ und } \omega_1 = \omega_0 \text{ (Resonanz).} \end{cases}$$

„Allgemeine Lösungen = partikuläre Lösung + homogene Lösungen“

Lineare DG mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten eine **lineare DG mit konstanten Koeffizienten**:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = b(x)}$$

Wir lösen zunächst die zugehörige **homogene Differentialgleichung**:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0}$$

Exponentialansatz: $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y' = \lambda y$, $y'' = \lambda^2 y$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n y$.
Einsetzen dieser Funktion in unsere Differentialgleichung ergibt

$$\big(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\big)\,\mathrm{e}^{\lambda x} = 0.$$

Wir erhalten also genau dann eine Lösung der homogenen DG, wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des **charakteristischen Polynoms** ist:

$$\boxed{p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

Erstes Beispiel: einfache Nullstellen

Aufgabe: Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$\boxed{y'' + 3y' + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.}$$

Lösung: (a) Das char. Polynom unserer Gleichung $p(\partial)\, y = 0$ ist

$$p(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

Nullstellen: -1, -2. Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}.$$

Die allgemeine reelle Lösung ist also

$$y(x) = \alpha_1\, \mathrm{e}^{-x} + \alpha_2\, \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \alpha_1 + \alpha_2 &&= 1 \\ y'(0) &= -\alpha_1 - 2\alpha_2 &&= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= -1 \end{aligned}\right.$$

Die gesuchte Lösung des AWP ist also $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}$.

Zweites Beispiel: doppelte Nullstelle

Aufgabe: Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$\boxed{y'' + 2y' + y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.}$$

Lösung: (a) Das char. Polynom unserer Gleichung $p(\partial)\, y = 0$ ist

$$p(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Doppelte Nullstelle -1. Als Fundamentallösungen der DG erhalten wir

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Die allgemeine reelle Lösung ist also

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}(\alpha_1 + \alpha_2 x) \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \alpha_1 &&= 1 \\ y'(0) &= -\alpha_1 + \alpha_2 &&= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 1 \end{aligned}\right.$$

Die gesuchte Lösung des AWP ist also $y(x) = \mathrm{e}^{-x}(1+x)$.

Drittes Beispiel: komplex vs reell

Aufgabe: Lösen Sie (a) allgemein und (b) das Anfangswertproblem

$$\boxed{y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3}$$

Lösung: (a) Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 + 2x + 5$.
Die Nullstellen $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2\mathrm{i}$ sind komplex-konjugiert.
Komplexes Fundamentalsystem: $\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x},\ \mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})x}$
Komplexe Lösungen: $z(x) = c_1\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})x} + c_2\,\mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
Reelles Fundamentalsystem: $\mathrm{e}^{-x}\cos(2x),\ \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)$
Reelle Lösungen: $y(x) = \alpha_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + \alpha_2\,\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

(b) Die Anfangsdaten bestimmen eindeutig die freien Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= \alpha_1 &&= 1 \\ y'(0) &= -\alpha_1 + 2\alpha_2 &&= 3 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2 \end{aligned}\right.$$

Probe! Die Lösung des Anfangswertproblems ist demnach

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\cos(2x) + 2\sin(2x)\big).$$

Lineare DG: Fundamentallösungen

Wir zerlegen $p \in \mathbb{C}[x]$ in Linearfaktoren: $p(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{k_\ell}$
Hieraus erhalten wir n linear unabhängige **Fundamentallösungen**

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{\lambda_1 x},\; x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\; x^2\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \dots,\; x^{k_1-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\; \dots \\ \mathrm{e}^{\lambda_\ell x},\; x\,\mathrm{e}^{\lambda_\ell x},\; x^2\,\mathrm{e}^{\lambda_\ell x}, \dots,\; x^{k_\ell-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_\ell x}. \end{array}}$$

Ist $p \in \mathbb{R}[x]$ reell und $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega \neq 0$ eine k–fache Nullstelle, so gilt dies auch für die komplex-konjugierte Zahl $\overline{\lambda} = \sigma - \mathrm{i}\omega$. Durch Linearkombination erhalten wir die zugehörigen **reellen Lösungen**; sie entsprechen Real- und Imaginärteil der komplexen Lösungen:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \mathrm{e}^{\lambda x}, \dots,\; x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\ \mathrm{e}^{\overline{\lambda} x}, \dots,\; x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\overline{\lambda} x} \end{array}\right\} \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x), \dots,\; x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x) \\ \mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x), \dots,\; x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) \end{array}\right.}$$

Damit finden wir n linear unabhängige Lösungen $y_1, \dots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$.

🙂 Jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ der homogenen DG $p(\partial)\,y = 0$ hat die Form $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ mit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$. Kurz: Lösungsraum $L_0 \cong \mathbb{K}^n$.