Kapitel R

Die Wärmeleitungsgleichung

Inhalt dieses Kapitels

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Ziel: Wie berechnet man den Wärmefluss in einem Körper?

Bild- und Wärmequelle: Momo

Wir betrachten ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ und suchen eine Beziehung zwischen **Wärmeleistungsdichte** $q : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, **Wärmedichte** $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ und **Wärmefluss** $\vec{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: (1) Sei $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, etwa ein Würfel. Formulieren Sie die Wärmebilanz für K in Worten und als Volumen-/Flussintegrale.

(2) Formen Sie dies um zu einem einzigen Volumenintegral.

(3) Folgern Sie hieraus die zugehörige Differentialgleichung.

(4) Vereinfachen Sie schließlich durch die Annahme $\vec{f} = -\kappa \nabla u$.

Lösung: (1) Für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ gilt die Wärmebilanz:

Von den Wärmequellen in K zugeführte Energie
$=$ Zuwachs der in K enthaltenen Wärmeenergie
$+$ Wärmefluss über den Rand von K nach außen

Als Integralgleichung formuliert bedeutet dies:

$$\boxed{\iiint_K q(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_K u(t,x)\,\mathrm{d}x + \oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x) \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}S}$$

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(2) Mit Gauß (F2I) verwandeln wir Flussintegrale in Volumenintegrale:

$$\oiint_{S=\partial K} \vec{f}(t,x) \bullet \vec{n} \,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauß}}{\underset{\text{F2I}}{=}} \iiint_K \nabla \bullet \vec{f}(t,x) \,\mathrm{d}x$$

Die Ableitung darf man unters Integral ziehen (K kompakt, $\partial_t u$ stetig):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_K u(t,x) \,\mathrm{d}x \overset{\text{Kpkt}}{\underset{\text{??}}{=}} \iiint_K \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) \,\mathrm{d}x$$

Wir erhalten zusammenfassend ein einziges Volumenintegral:

$$\iiint_K \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \nabla \bullet \vec{f}(t,x) - q(t,x) \right] \mathrm{d}x = 0.$$

(3) Diese lokale Wärmebilanz gilt für jedes Kompaktum $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$.
Das gilt genau dann, wenn der (stetige!) Integrand verschwindet:

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + \nabla \bullet \vec{f}(t,x) = q(t,x)}$$

Fouriers Wärmeleitungsgleichung

(4) Wärme fließt von warm nach kalt, also $\vec{f} = -\kappa \nabla u$. Einsetzen:

$$\partial_t u(t,x) + \nabla \bullet \big[-\kappa \nabla u(t,x)\big] = q(t,x)$$

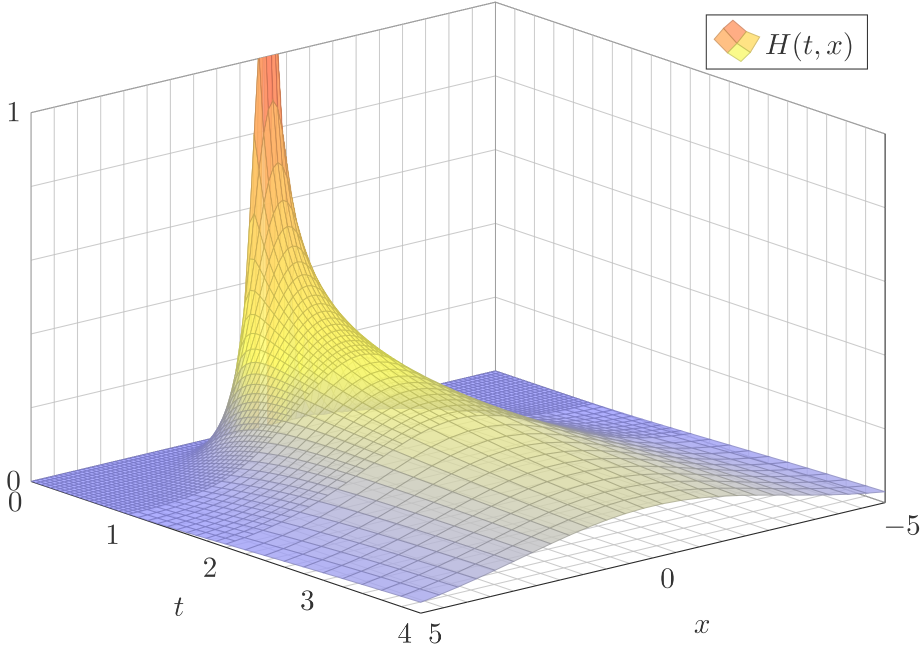
Mit dem Laplace–Operator $\Delta = \nabla \bullet \nabla$ schreiben wir dies kurz

$$\partial_t u - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2.$$

Wir erhalten so Fouriers berühmte **Wärmeleitungsgleichung**:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u = q \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}}$$

Wärmeleitungskern und Superposition



Lösung durch Fourier–Transformation

Wir untersuchen die homogene **Wärmeleitungsgleichung**

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \kappa\, \partial_x^2\, u(t,x) && \text{für } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R},\\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für } t=0 \text{ und } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe: Lösen Sie dies durch Fourier–Transformation bezüglich x.

Lösung: Die $\mathscr{F}$–Transformierte $\widehat{u}(t,\xi)$ erfüllt $\partial_t\widehat{u}(t,\xi) = -\kappa\,\xi^2\,\widehat{u}(t,\xi)$.
Wir trennen die Variablen gemäß $[\partial_t\widehat{u}(t,\xi)]/\widehat{u}(t,\xi) = -\kappa\xi^2$
und integrieren von 0 bis t zu $\ln\widehat{u}(t,\xi) - \ln\widehat{u}(0,\xi) = -\kappa\xi^2 t$.
Wir erhalten so die Lösung $\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u}_0(\xi)\,\mathrm{e}^{-\kappa\xi^2 t}$.
Rücktransformation $\mathrm{e}^{-\kappa\xi^2 t} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\ \mathrm{e}^{-x^2/4\kappa t}/\sqrt{2\kappa t}$ und Faltung ergibt:

$$u(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} u_0(y)\cdot\frac{\mathrm{e}^{-(x-y)^2/4\kappa t}}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\,\mathrm{d}y \quad \text{für } t>0.$$

Lösung durch Fourier–Transformation

Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \kappa\, \partial_x^2 u$ für $(t, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$
hat als sogenannte Fundamentallösung den **Wärmeleitungskern**

$$\boxed{H \;:\; \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; H(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right).}$$

Die Konstanten sichern die Normierung $\int_{\mathbb{R}^n} H(t, x)\,\mathrm{d}x = 1$ für $t > 0$.

Ist für $t = 0$ die Wärmeverteilung $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vorgegeben, so erhalten wir die Lösung $u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch **Superposition** (Faltung, siehe C5A):

$$\boxed{u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}} H(t, x - y)\, u_0(y)\,\mathrm{d}y = \int_{z \in \mathbb{R}} H(t, z)\, u_0(x - z)\,\mathrm{d}z}$$

Homogene Wärmeleitungsgleichung

Satz R1A

Die n–dimensionale ***Wärmeleitungsgleichung*** $\partial_t u - \kappa\,\Delta u = 0$ *hat als sog.* ***Fundamentallösung*** $H : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *die Glockenkurve*

$$\boxed{H(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\kappa t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\kappa t}\right).}$$

Der ***Anfangswert*** $u(0,x) = u_0(x)$ *wird gelöst durch Superposition:*

$$\boxed{u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\, H(t, x-\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad t > 0}$$

Man rechnet nach, dass H tatsächlich $(\partial_t - \kappa\,\partial_x^2)H = 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} H(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$ erfüllt. Für festes t ist $H(t, x-\xi)$ eine Glockenkurve mit Mittelwert ξ mit Streuung $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$. Die Anfangsverteilung u_0 sei absolut integrierbar und im Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig. Für $t \searrow 0$ gilt dann $u(t,x) \to u_0(x)$, wie gewünscht. Durch Ableiten unter dem Integral finden wir schließlich

$$(\partial_t - \kappa\,\partial_x^2)u = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi)\,(\partial_t - \kappa\,\partial_x^2)H(t, x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Inhomogene Wärmeleitungsgleichung

Satz R1D (Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung)

Zu lösen sei die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\boxed{\begin{array}{ll} \partial_t u(t,x) - \kappa\,\Delta u(t,x) = f(t,x) & \textit{für alle } t > 0 \textit{ und } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & \textit{Anfangswerte für } x \in \mathbb{R}^n. \end{array}}$$

Gegeben sei $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *stetig mit Schranke* $|u_0(x)| \le a\,\mathrm{e}^{b|x|^\alpha}$, $\alpha < 2$ *sowie* $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *beschränkt und stetig differenzierbar.*

Existenz: *Dann wird unser Problem gelöst durch das Integral*

$$\boxed{u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} H(t, x-\xi)\,u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} H(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.}$$

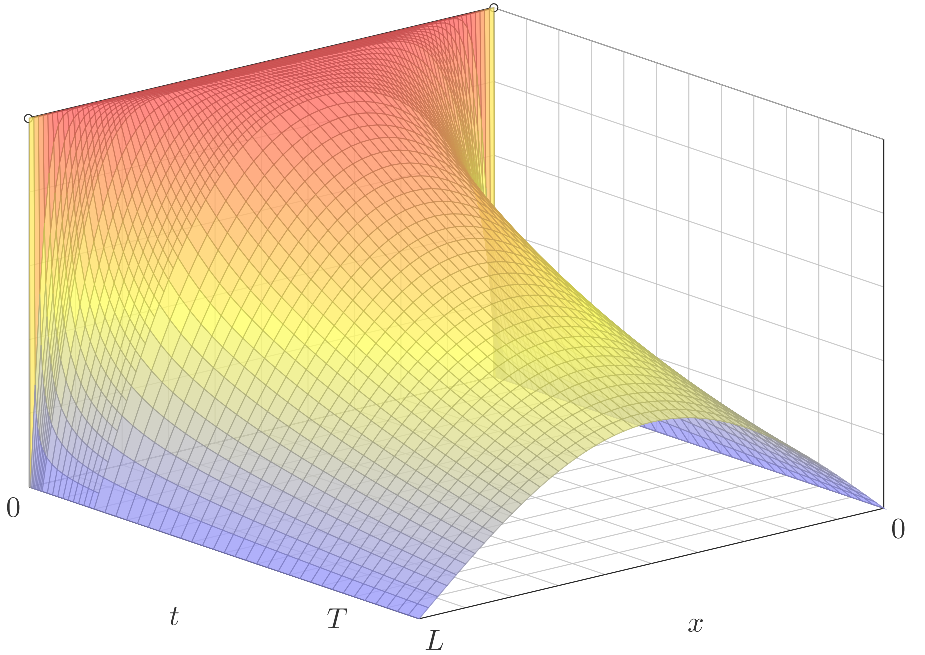
Zu jedem $T > 0$ *gilt eine Schranke* $|u(t,x)| \le A\,\mathrm{e}^{B|x|^2}$ *auf* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$*.*

Eindeutigkeit: *Unsere Lösung* u *ist die einzige mit dieser Schranke.*

⚠ Ohne diese Schranke gibt es exotische Gegenbeispiele.

Beispiele

Wie schnell kühlt ein Stab über seine Enden ab?



Die homogene Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: Lösen Sie die homogene Wärmeleitungsgleichung

$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 0$	für alle $t > 0$ und $0 < x < L$,
$u(t,0) = u(t,L) = 0$	Randbedingungen für $t \ge 0$,
$u(0,x) = g(x)$	Anfangswerte für $0 < x < L$.

Lösung: Wir trennen die Variablen durch den Produktansatz

$$u(t,x) = v(t)\,w(x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$v'(t)\,w(x) = \kappa\,v(t)\,w''(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\kappa}\,\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Bestimmung der Ortsfunktion $w(x)$

Wir lösen zunächst das erste Teilproblem: $w''(x) - \lambda\, w(x) = 0$

1. Fall: $\lambda = 0$, also $w''(x) = 0$. Allgemeine Lösung:

$$w(x) = a + bx \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Randbedingungen:

$$w(0) = a \stackrel{!}{=} 0, \qquad w(L) = a + bL \stackrel{!}{=} 0$$

☹ Hieraus folgt $a = b = 0$.

2. Fall: $\lambda = \alpha^2 > 0$, also $w''(x) - \alpha^2 w(x) = 0$. Allgemeine Lösung:

$$w(x) = a\,\mathrm{e}^{\alpha x} + b\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Randbedingungen:

$$w(0) = a + b \stackrel{!}{=} 0, \qquad w(L) = a\,\mathrm{e}^{\alpha L} + b\,\mathrm{e}^{-\alpha L} \stackrel{!}{=} 0$$

☹ Hieraus folgt $a = b = 0$.

Bestimmung der Ortsfunktion $w(x)$

3. Fall: $\lambda = -\omega^2 < 0$, also $w''(x) + \omega^2 w(x) = 0$. Allgemeine Lösung:

$$w(x) = a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x) \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Randbedingungen:

$$w(0) = b \stackrel{!}{=} 0, \qquad w(L) = a\sin(\omega L) \stackrel{!}{=} 0$$

☹ Für $a = 0$ erhalten wir erneut die triviale Lösung.

☺ Für $a \neq 0$ benötigen wir $\sin(\omega L) = 0$, also $\omega L = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Bestimmung der Zeitfunktion $v(t)$

Erstes Teilproblem: $w''(x) = \lambda\, w(x)$ mit $w(0) = w(L) = 0$

Lösungen: $w_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ mit $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2$.

Zweites Teilproblem: $v'(t) = \kappa\lambda\, v(t)$ mit $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2$

Lösung: $v_n(t) = \mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2\kappa t} = \mathrm{e}^{-n^2 t/T}$ mit Abklingzeit $T = L^2/\kappa\pi^2$

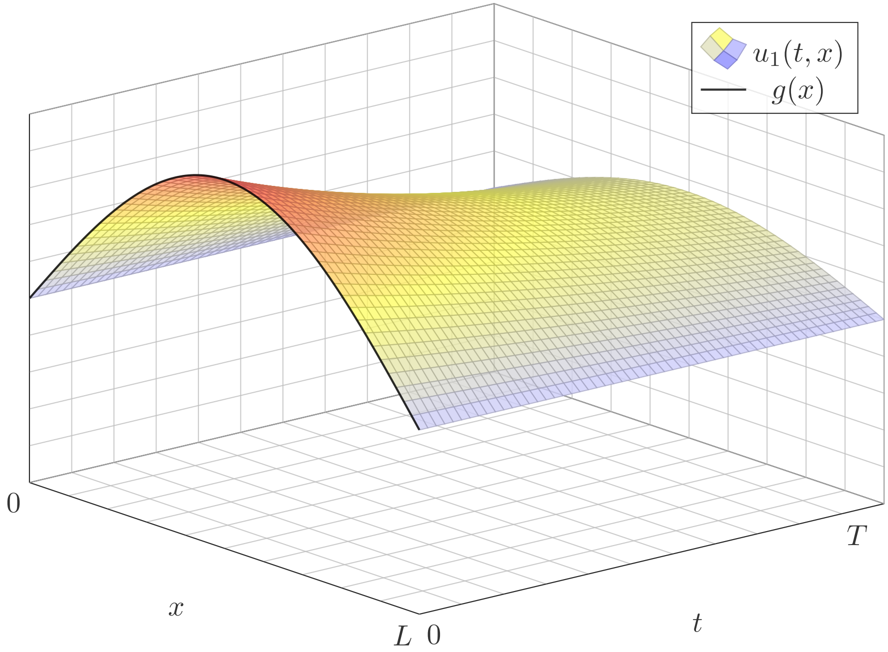
Zusammengesetzte Eigenfunktionen:

$$\boxed{u_n(t,x) \;=\; v_n(t)\, w_n(x) \;=\; \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L)}$$

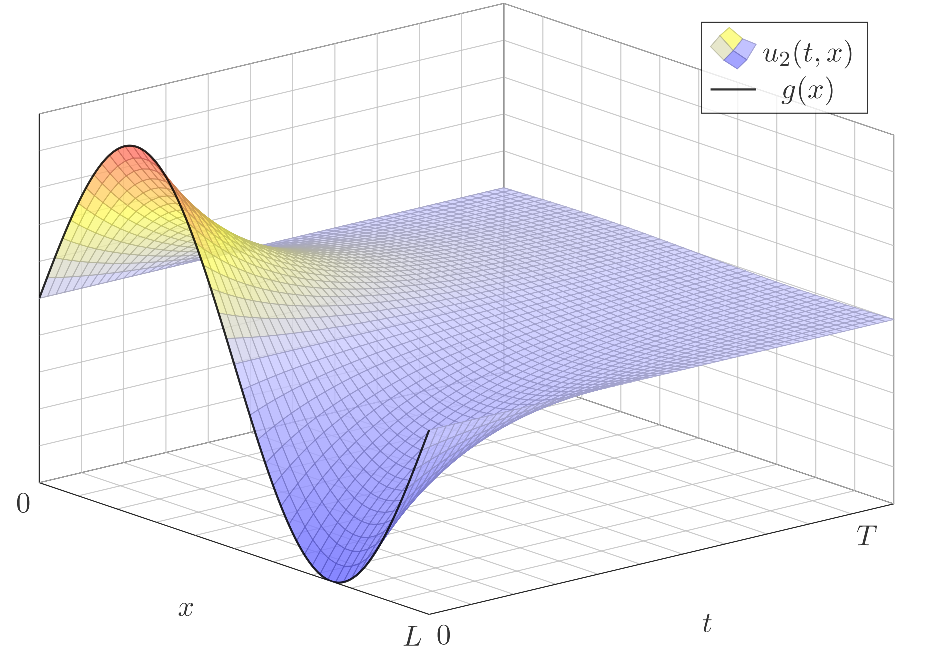
Die allgemeine Lösung erhalten wir hieraus durch Superposition:

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L)}$$

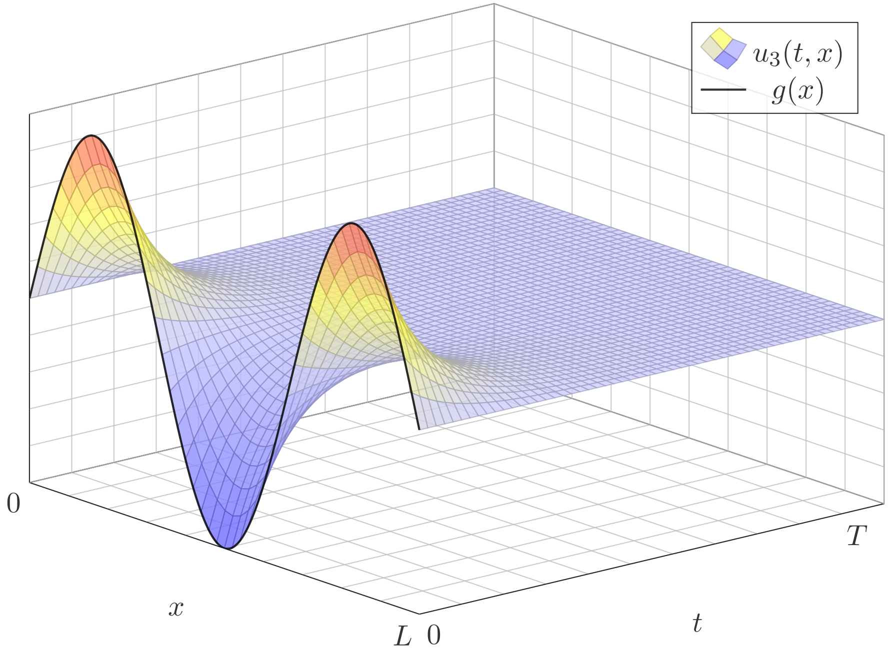
Lösungen des Produktansatzes: $u_1(t, x)$



Lösungen des Produktansatzes: $u_2(t, x)$



Lösungen des Produktansatzes: $u_3(t, x)$



Lösung der Anfangsbedingungen

Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Superposition:

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L)}$$

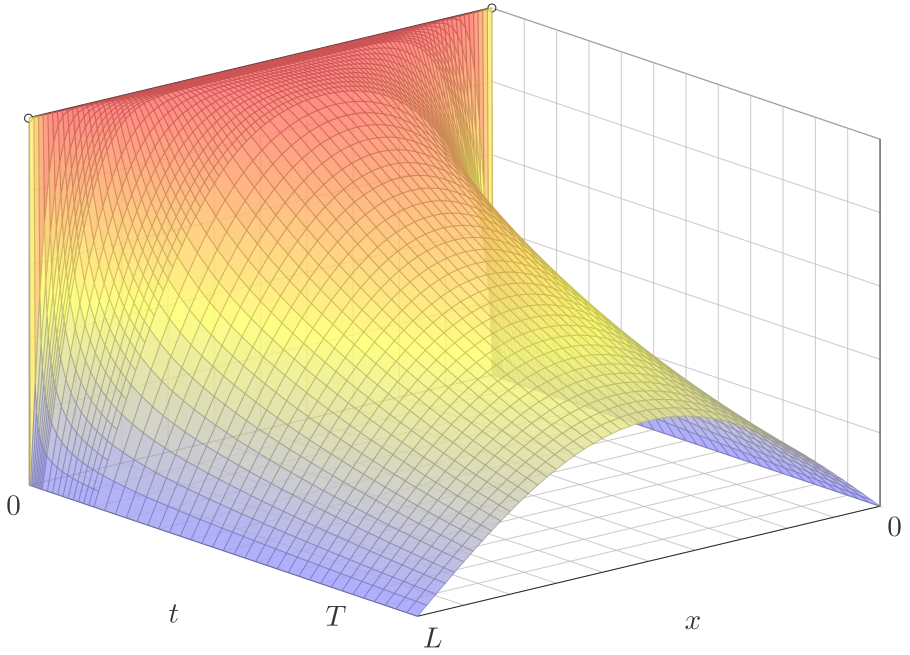
Einsetzen der Startzeit $t = 0$ liefert die vorgegebenen Anfangswerte:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\big(n\pi x/L\big) \stackrel{!}{=} g(x) \quad \text{für } 0 < x < L$$

Die Koeffizienten a_n erhalten wir aus den Anfangsdaten g dank Fourier:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{L} g(x) \, \sin\big(n\pi x/L\big) \, \mathrm{d}x}$$

Beispiel: Kühlung an den Rändern



Beispiel: Kühlung an den Rändern

Aufgabe: Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\boxed{\begin{array}{ll} \partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 0 & \text{für alle } t>0 \text{ und } 0<x<L,\\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \text{Randbedingungen für } t \ge 0,\\ u(0,x) = 1 & \text{Anfangswerte für } 0<x<L. \end{array}}$$

Lösung: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t/T} \sin(n\pi x/L)$$

Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion:

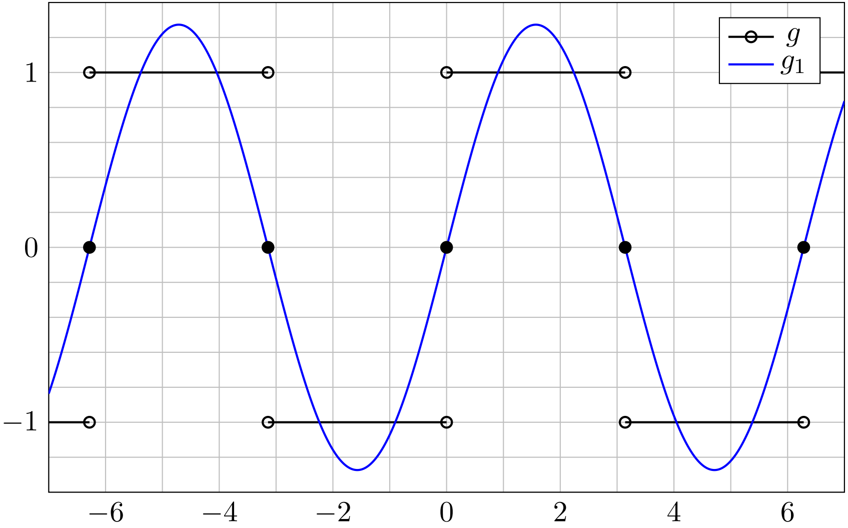
$$g(x) = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L) \quad \text{also} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 4/(n\pi) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die gesuchte Lösungsfunktion ist demnach

$$\boxed{u(t,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T} \frac{\sin\big((2k+1)\pi x/L\big)}{(2k+1)}.}$$

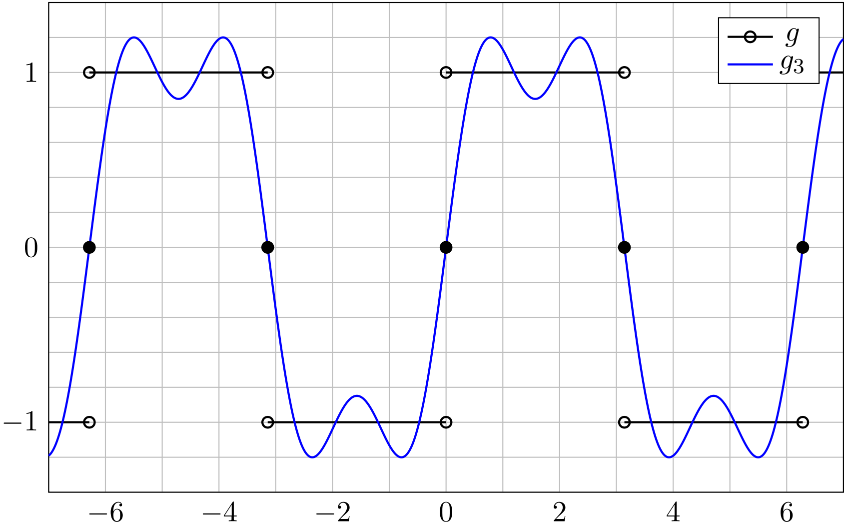
Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion

$$g(x) \sim \frac{4}{\pi}\Big[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \dots\Big]$$



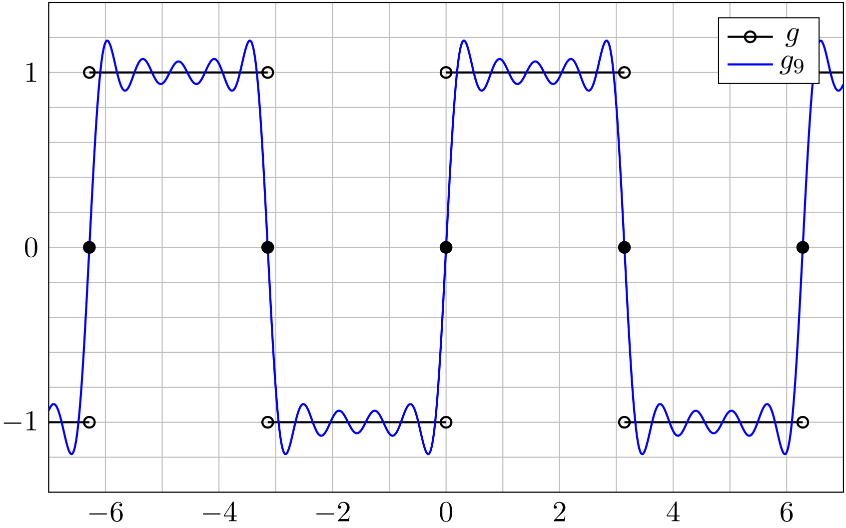
Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion

$$g(x) \sim \frac{4}{\pi}\Big[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \dots\Big]$$

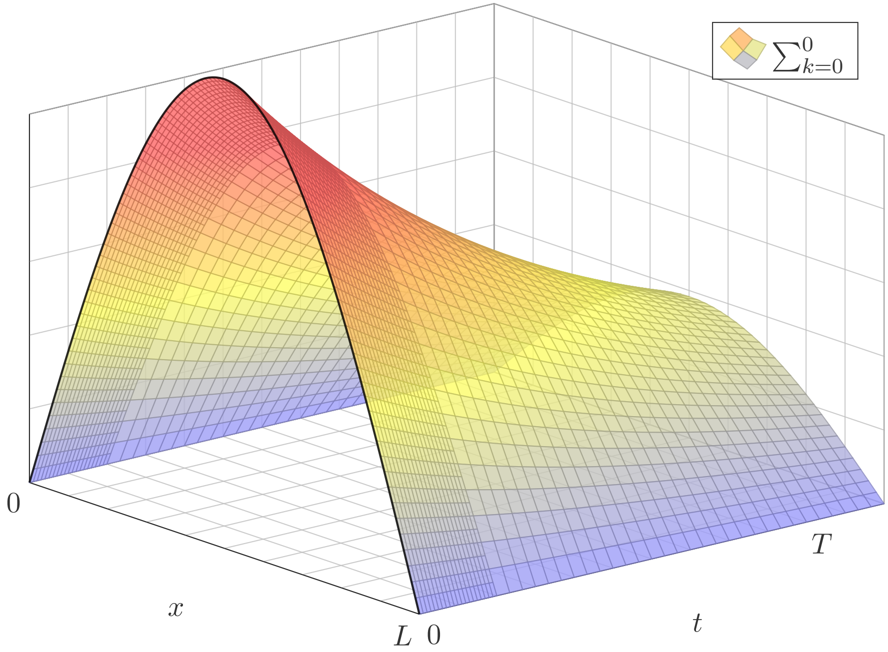


Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion

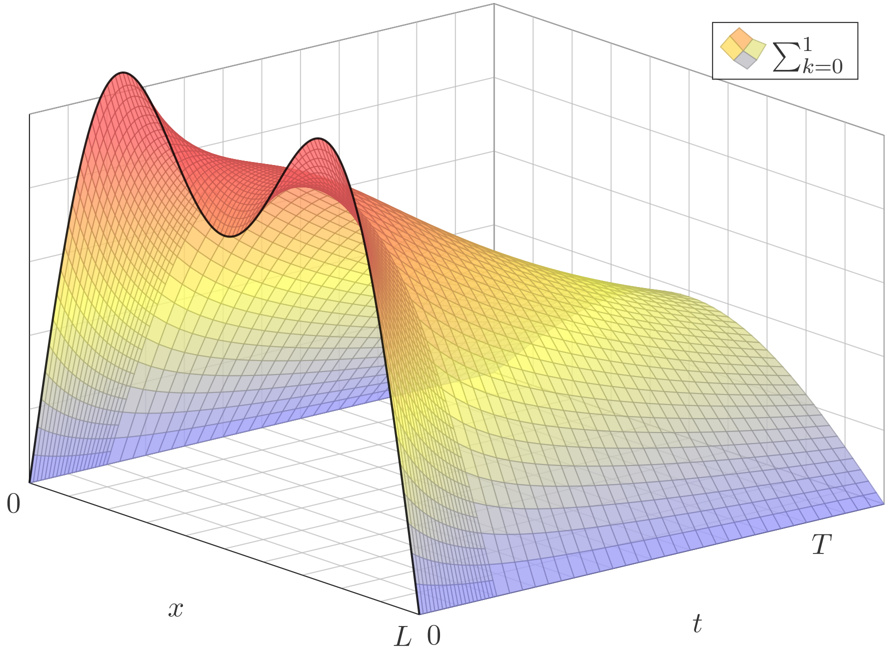
$$g(x) \sim \frac{4}{\pi}\left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \dots\right]$$



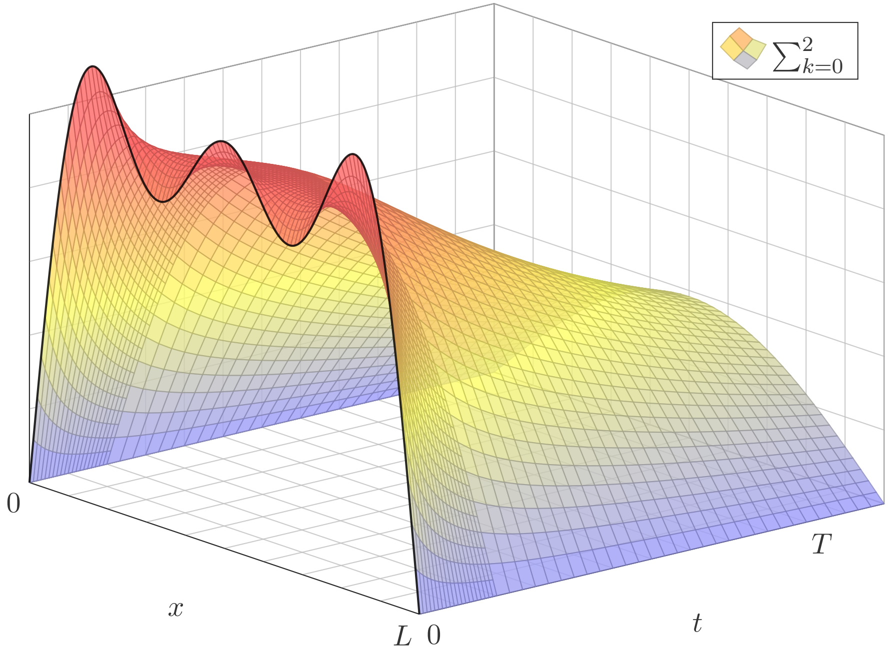
Fourier–Entwicklung und Wärmeleitung



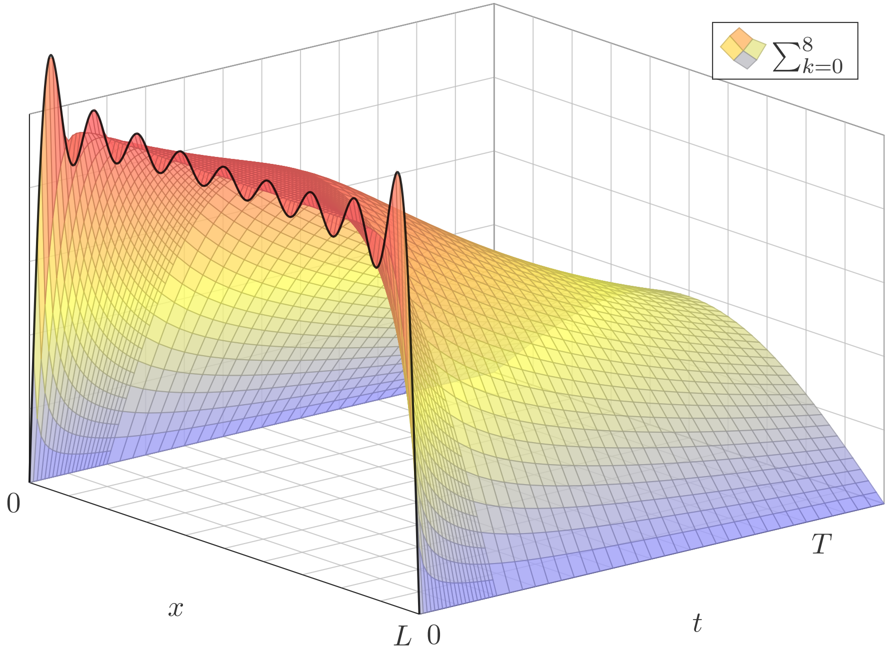
Fourier–Entwicklung und Wärmeleitung



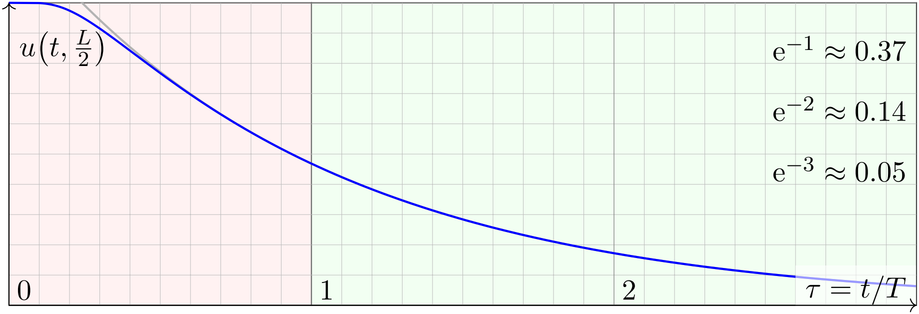
Fourier–Entwicklung und Wärmeleitung



Fourier–Entwicklung und Wärmeleitung



Zeitliche Entwicklung der Kerntemperatur



Die natürliche Zeitskala ist hier $\tau = (\pi/L)^2 \kappa t = t/T$ mit $T = L^2/\kappa\pi^2$.

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T} \, \frac{\sin\big((2k+1)\pi x/L\big)}{(2k+1)}$$

$$u(t, \tfrac{L}{2}) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T} \, \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \quad \sim \quad \frac{4}{\pi} \, \mathrm{e}^{-t/T}$$

Plausibilitätscheck: Wie lange toastet Brot?

Aufgabe: Wie lange toastet Brot? Welche Temperatur wird erreicht?

Lösung: Toastbrot der Dicke $L = 14\mathrm{mm}$ wird bei $220°\mathrm{C}$ getoastet.
Die Temperaturleitfähigkeit beträgt etwa $\kappa \approx 0.5 \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$: Messen!
Die natürliche Zeitskala ist hier $T = L^2/\kappa\pi^2 \approx 40\mathrm{s}$: Plausibel!
Der Temperaturverlauf ist (näherungsweise für $t > T$):

$$t \quad \mapsto \quad 220°\mathrm{C} - 200°\mathrm{C} \cdot \frac{4}{\pi}\,\mathrm{e}^{-t/T}$$

Zwei Minuten toasten, also $t = 120\mathrm{s} = 3T$, ergibt:

$$220°\mathrm{C} - 200°\mathrm{C} \cdot \frac{4}{\pi}\,\mathrm{e}^{-3} \approx 200°\mathrm{C}$$

Physikalische Beispiele: Materialkonstanten

Die **Temperaturleitfähigkeit** $\kappa = \lambda/(\varrho\, c)$ können wir berechnen aus Wärmeleitfähigkeit λ, Dichte ϱ und spezifischer Wärmekapazität c.

Material	$\varrho \,/\, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$c \,/\, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$	$\lambda \,/\, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}$	$\kappa \,/\, 10^{-6}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$
Tannenholz	600	2720	0.12	0.07
Fensterglas	2480	700	0.87	0.50
Stahl (leg./unleg.)	7800	460	$15 \cdots 50$	$4 \cdots 14$
Kupfer (rein)	8940	383	400	117
Marmor	≈ 2600	≈ 800	≈ 2.8	≈ 1.35
Beton	≈ 2400	≈ 880	≈ 2.1	≈ 0.99
Granit	≈ 2640	≈ 820	≈ 1.6	≈ 0.74
Ziegelstein	≈ 1700	≈ 840	≈ 0.4	≈ 0.28
Wasser bei $0°\mathrm{C}$	999	4220	0.561	0.133
$50°\mathrm{C}$	990	4181	0.642	0.155
$100°\mathrm{C}$	958	4216	0.679	0.168
Luft bei $1013\,\mathrm{hPa}$	$1.3 \cdots 1.0$	≈ 1005	$0.025 \cdots 0.030$	$19 \cdots 30$

Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

Aufgabe: Lösen Sie die inhomogene Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = f(t,x) && \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < L, \\ &u(t,0) = u(t,L) = 0 && \text{Randbedingungen für } t \ge 0, \\ &u(0,x) = g(x) && \text{Anfangswerte für } 0 < x < L. \end{aligned}$$

Nutzen Sie den Lösungsansatz durch Variation der Konstanten:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\,\sin(n\pi x/L)$$

Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

Lösung: Einsetzen dieses Ansatzes in die PDE:

$$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[c_n'(t) + \kappa c_n(t)(n\pi/L)^2 \Big] \sin(n\pi x/L) \stackrel{!}{=} f(t,x)$$

Für $t = 0$ ist zudem der Anfangswert vorgegeben:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin(n\pi x/L) \;\stackrel{!}{=}\; g(x)$$

Zum Vergleich entwickeln wir auch g und f in Fourier–Sinusreihen:

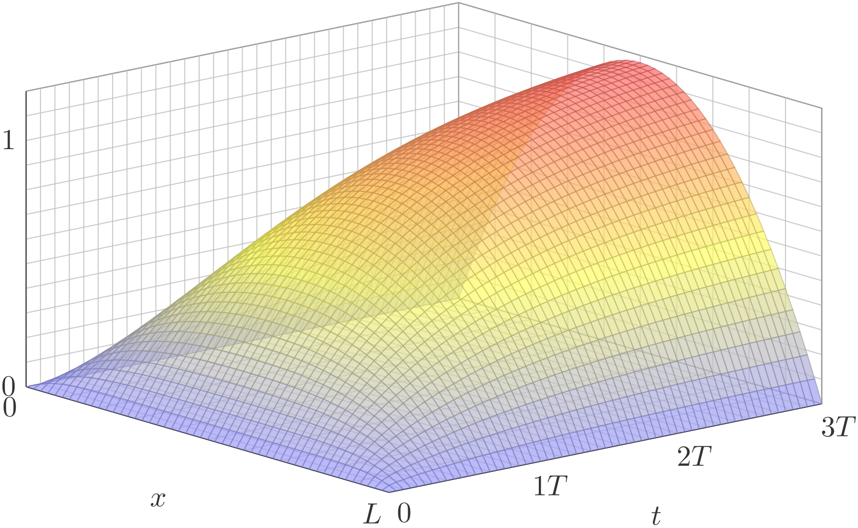
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L), \qquad f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\pi x/L).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir eine ODE erster Ordnung:

$$\boxed{c_n'(t) + (n^2/T)\,c_n(t) = b_n(t), \qquad c_n(0) = a_n}$$

Beispiel: gleichmäßiges Aufheizen

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[1 - \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T}\right]\frac{\sin\big((2k+1)\pi x/L\big)}{(2k+1)^3}$$



Beispiel: gleichmäßiges Aufheizen

Aufgabe: Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 1/T$	für alle $t > 0$ und $0 < x < L$,
$u(t,0) = u(t,L) = 0$	Randbedingungen für $t \ge 0$,
$u(0,x) = 0$	Anfangswerte für $0 < x < L$.

Lösung: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\,\sin(n\pi x/L)$$

Fourier–Entwicklung der Rechteckfunktion:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\sin(n\pi x/L) = 1 \quad \text{mit} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 4/(n\pi) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Gewöhnliche Differentialgleichung für die Koeffizienten $c_n(t)$:

$$c_n'(t) + (n^2/T)\,c_n(t) = b_n/T, \qquad c_n(0) = 0$$

Lösung für n gerade $c_n(t) = 0$, ungerade $c_n(t) = \frac{4}{n^3\pi}\big[1 - \mathrm{e}^{-n^2 t/T}\big]$.

Neumann–Randbedingung: Wärmeisolierung

Aufgabe: Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$\partial_t u(t,x) - \kappa\,\partial_x^2 u(t,x) = 0$	für alle $t > 0$ und $0 < x < L$,
$\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,L) = 0$	Randbedingungen für $t \ge 0$,
$u(0,x) = g(x)$	Anfangswerte für $0 \le x \le L$.

Lösung: Der Produktansatz $u(t,x) = v(t)\,w(x)$ separiert dies zu

$$\frac{1}{\kappa}\,\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda.$$

Wir erhalten zwei **gewöhnliche Differentialgleichungen**:

$$\boxed{v'(t) = \kappa\lambda\,v(t) \quad \text{und} \quad w''(x) = \lambda\,w(x)}$$

Die Randbedingung übersetzt sich in $w'(0) = w'(L) = 0$.

Produktlösungen und Superposition

Erstes Teilproblem: $w''(x) = \lambda\, w(x)$ mit $w'(0) = w'(L) = 0$

Lösungen: $w_n(x) = \cos(n\pi x/L)$ mit $\lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2$

Zweites Teilproblem: $v'(t) = \kappa\lambda\, v(t)$ mit $\lambda = \lambda = -(n\pi/L)^2$

Lösung: $v_n(t) = \mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2\kappa t} = \mathrm{e}^{-n^2 t/T}$ mit Abklingzeit $T = L^2/\kappa\pi^2$

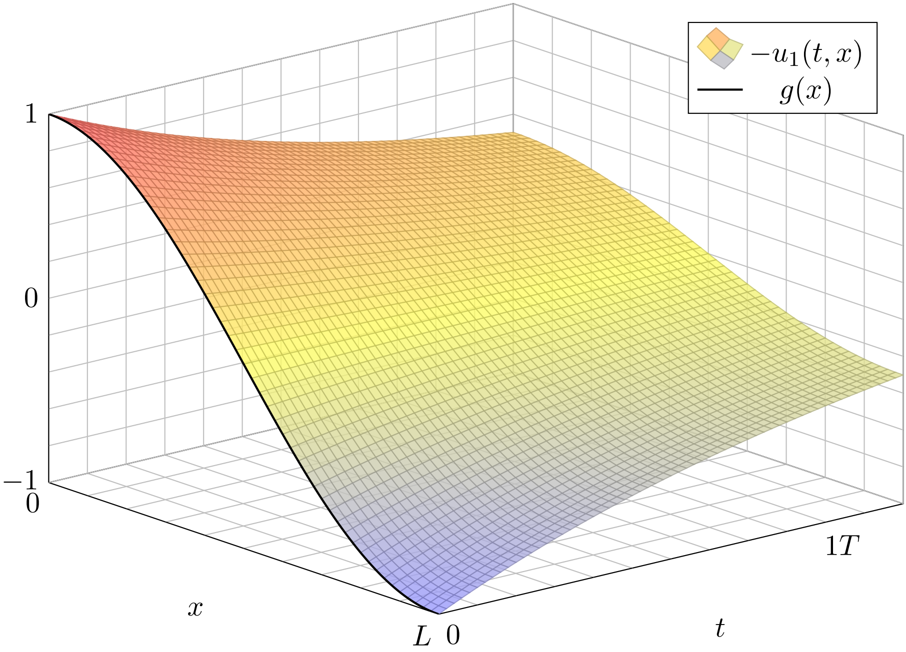
Zusammengesetzte Eigenfunktion:

$$\boxed{u_n(t,x) = v_n(t)\, w_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \cos(n\pi x/L)}$$

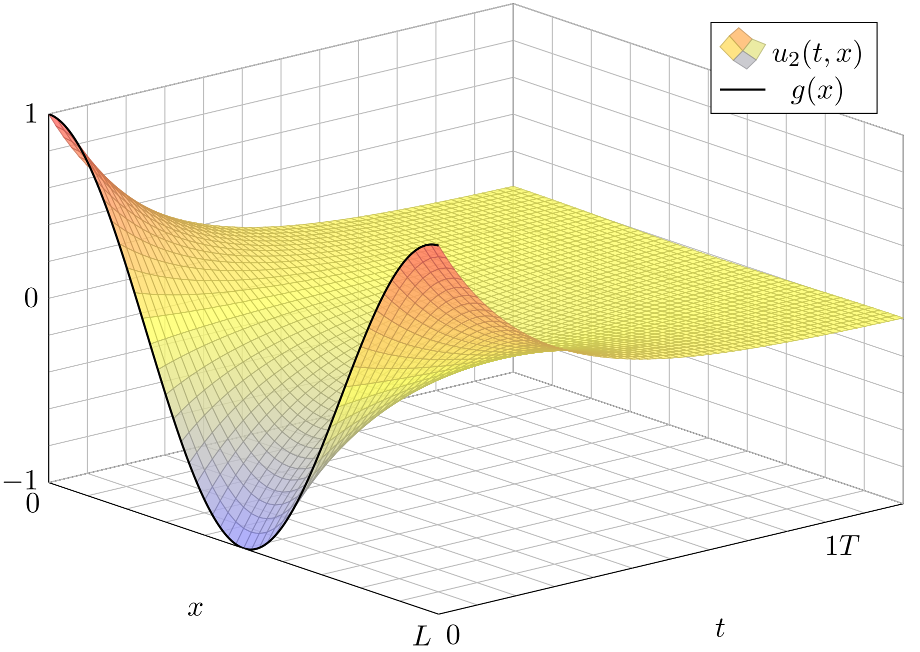
Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Superposition:

$$\boxed{u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \cos(n\pi x/L)}$$

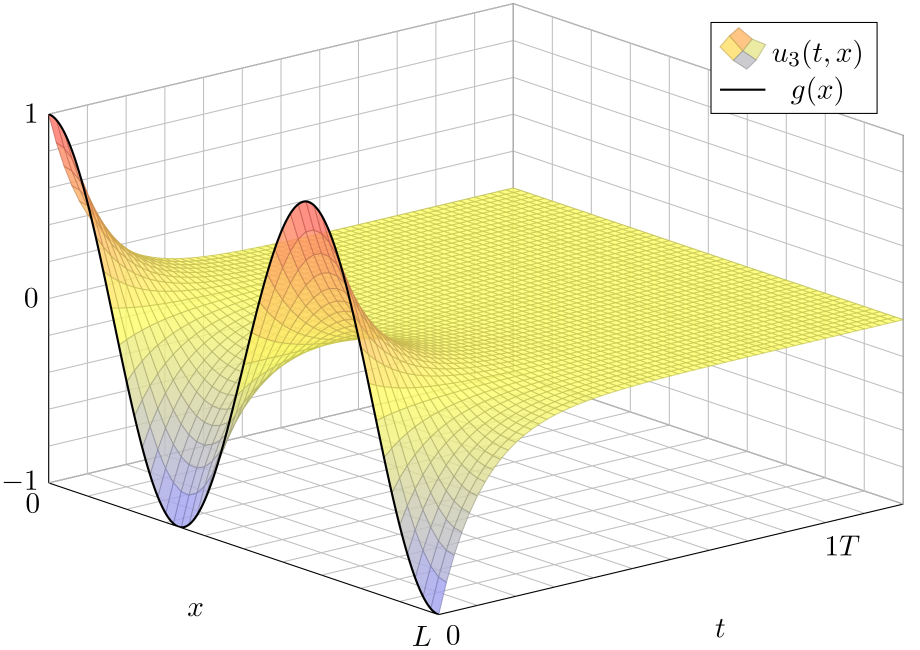
Lösungen des Produktansatzes: $u_1(t, x)$



Lösungen des Produktansatzes: $u_2(t,x)$



Lösungen des Produktansatzes: $u_3(t,x)$



Lösung der Anfangsbedingungen

Die allgemeine Lösung erhalten wir durch Superposition:

$$\boxed{u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\mathrm{e}^{-n^2 t/T} \cos(n\pi x/L)}$$

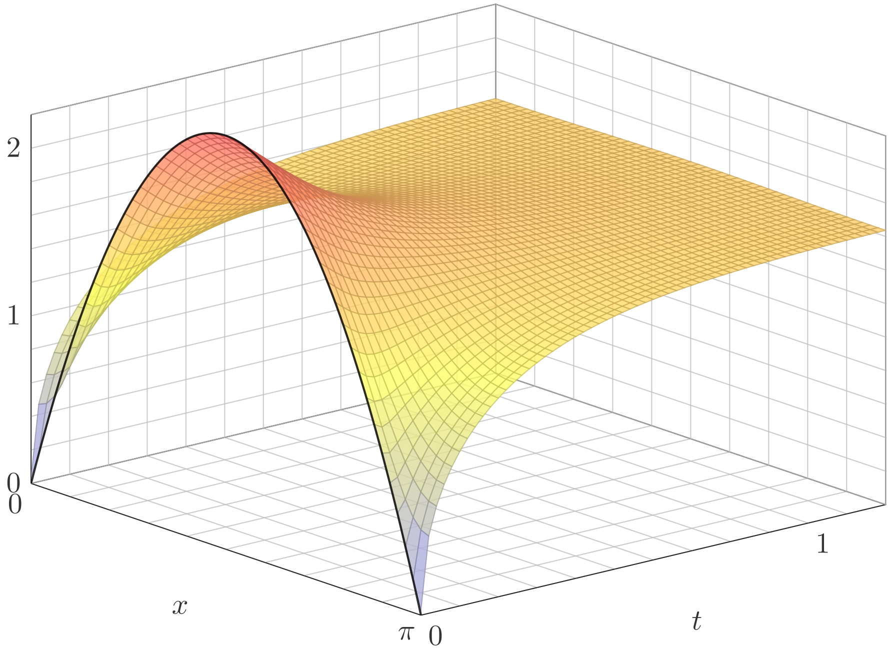
Einsetzen der Anfangswerte für $t = 0$ liefert:

$$u(0,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L) \stackrel{!}{=} g(x)$$

Die Koeffizienten a_n erhalten wir aus den Anfangsdaten dank Fourier:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{L} g(x)\, \cos\big(n\pi x/L\big)\,\mathrm{d}x}$$

Beispiel: Wärmeausgleich bei Isolierung



Beispiel: Wärmeausgleich bei Isolierung

Aufgabe: Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{array}{ll}
\partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 & \text{für alle } t > 0 \text{ und } 0 < x < \pi, \\
\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,\pi) = 0 & \text{Randbedingungen für } t \ge 0, \\
u(0,x) = g(x) := x(\pi - x) & \text{Anfangswerte für } 0 \le x \le \pi.
\end{array}$$

Lösung: Wir kennen bereits die allgemeine Lösung:

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-n^2 t} \cos(nx)$$

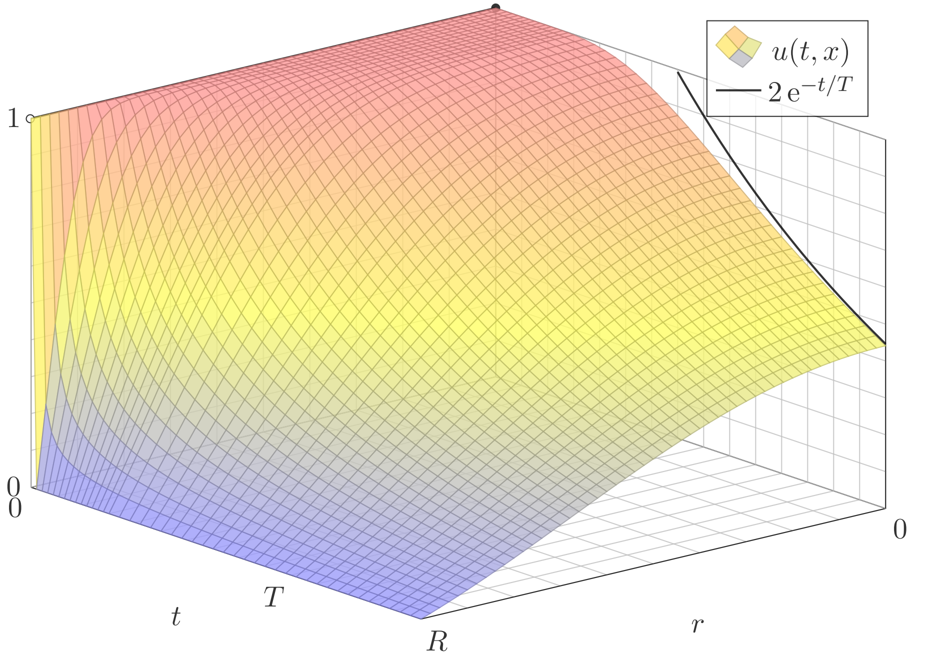
Fourier–Entwicklung der Anfangswerte $g(x) = x(\pi - x)$:

$$g(x) \stackrel{!}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{also} \quad a_n = \begin{cases} -4/n^2 & \text{für } n \ge 2 \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die gesuchte Lösungsfunktion ist demnach

$$\boxed{u(t,x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-4k^2 t} \frac{\cos(2kx)}{k^2}}$$

Wie schnell kühlt eine Kugel ab?



Der Laplace–Operator bei sphärischer Symmetrie

Zur Vereinfachung nutzen wir sphärische Symmetrie:

$$U \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;:\; (x,y,z) \mapsto U(x,y,z) = u\Big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big)$$

Hier zählt nur der Radius $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und somit die Funktion

$$u \;:\; \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R} \;:\; r \mapsto u(r).$$

Aufgabe: Berechnen Sie den Laplace–Operator $\Delta U(x,y,z)$ mittels u.

Lösung: Wir leiten geduldig ab: Wir finden $\partial_x r = x/r$ und somit

$$\partial_x\, u(r) = u'(r) \cdot \frac{x}{r} \qquad \text{dank Kettenregel,}$$

$$\partial_x^2\, u(r) = u''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + u'(r) \cdot \frac{r - x^2/r}{r^2} \qquad \text{dank Produktregel.}$$

Ebenso für $\partial_y^2\, u(r)$ und $\partial_z^2\, u(r)$. Die Summe ergibt schließlich:

$$\boxed{\big(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\big)\, U(x,y,z) \;=\; u''(r) + \frac{2}{r} u'(r) \;=\; \frac{1}{r^2} \partial_r \Big[r^2 \partial_r\, u(r) \Big]}$$

Wärmeleitung einer Kugel

Aufgabe: Lösen Sie die sphärische Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t,r) = \frac{\kappa}{r^2}\partial_r\Big[r^2\partial_r\, u(t,r)\Big] && \text{für alle } t>0 \text{ und } 0<r<R,\\
&u(t,R) = 0 && \text{Randbedingungen für } t\ge 0,\\
&u(0,r) = 1 && \text{Anfangswerte für } 0\le r<R.
\end{aligned}$$

Lösung: Wir trennen die Variablen durch den Produktansatz

$$u(t,r) = v(t)\,w(r).$$

Dies entkoppelt unsere PDE zu zwei Eigenwertgleichungen:

$$v'(t) = \lambda\, v(t) \quad \text{und} \quad w''(r) + \frac{2}{r}w'(r) = \frac{\lambda}{\kappa}w(r)$$

Zu jedem $\lambda\in\mathbb{R}$ haben wir links die Lösung $v(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$.

Wärmeleitung einer Kugel

Rechts substituieren wir $q(r) = rw(r)$:

$$\begin{aligned} w(r) &= q(r)/r \\ w'(r) &= q'(r)/r - q(r)/r^2 \\ w''(r) &= q''(r)/r - 2q'(r)/r^2 + 2q(r)/r^3 \end{aligned}$$

Aus $w''(r) + (2/r)\,w'(r) = (\lambda/\kappa)\,w(r)$ wird damit $q''(r) = (\lambda/\kappa)\,q(r)$.

$$\lambda = 0: \qquad w(r) = \frac{ar+b}{r} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R},$$

$$\lambda > 0: \qquad w(r) = \frac{a\,\mathrm{e}^{+\alpha r} + b\,\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}, \qquad \alpha = \sqrt{\lambda/\kappa}$$

$$\lambda < 0: \qquad w(r) = \frac{a\sin(\omega r) + b\cos(\omega r)}{r}, \qquad \omega = \sqrt{-\lambda/\kappa}$$

Endlichkeit von $w(0)$ und die Randbedingung $w(R) = 0$ erfüllt nur

$$w(r) = a\,\frac{\sin(\omega r)}{r}$$

mit $\omega = \omega_n := n\pi/R$ und $n = 1, 2, 3, \dots$, somit $\lambda = \lambda_n := -(n\pi/R)^2\kappa$.

Wärmeleitung einer Kugel

Zusammengesetzte Eigenfunktionen:

$$u_n(t,r) = v_n(t)\, w_n(t) = \mathrm{e}^{-n^2 t/T}\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{r}$$

Weitere Lösungen erhalten wir durch Superposition:

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \mathrm{e}^{-n^2 t/T}\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{r}$$

Damit lösen wir schließlich die Anfangsbedingung für $t = 0$:

$$u(0,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{r} \quad \stackrel{!}{=} \quad 1 \qquad \text{für } 0 \le r < R.$$

Wie lösen Sie $\sum a_n \sin(n\pi r/R) = r$? Durch Fourier–Entwicklung!

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{\sin(nx)}{n} = x \qquad \text{für } |x| < \pi$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R} = 1 \qquad \text{für } |r| < R$$

Wärmeleitung einer Kugel

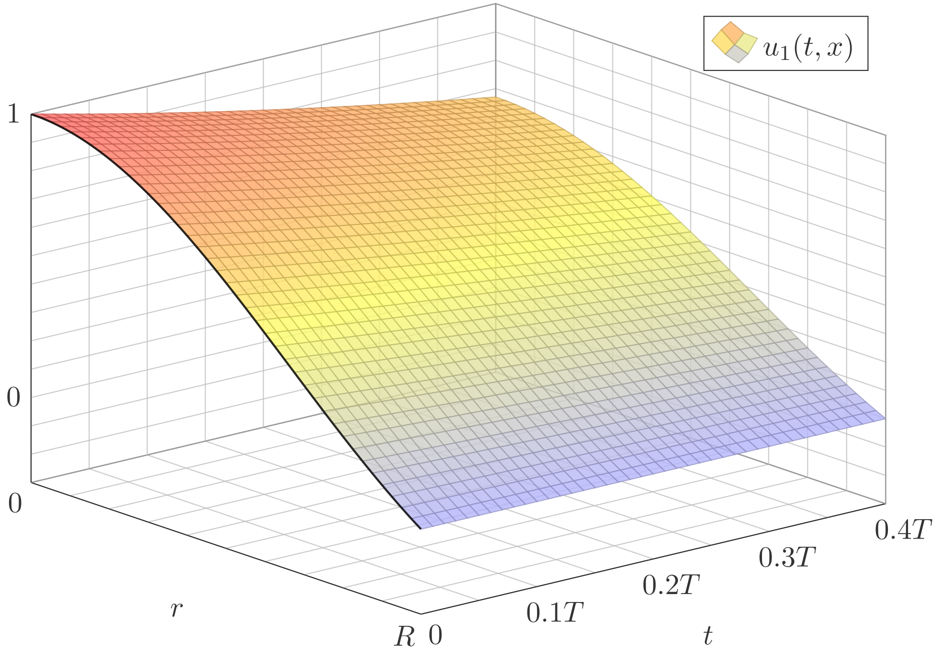
Als Lösung $u : \mathbb{R}_{\ge 0} \times [0, R] \to \mathbb{R}$ für die Kugel erhalten wir:

$$\boxed{u(t,r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \mathrm{e}^{-n^2 t/T}\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R}}$$

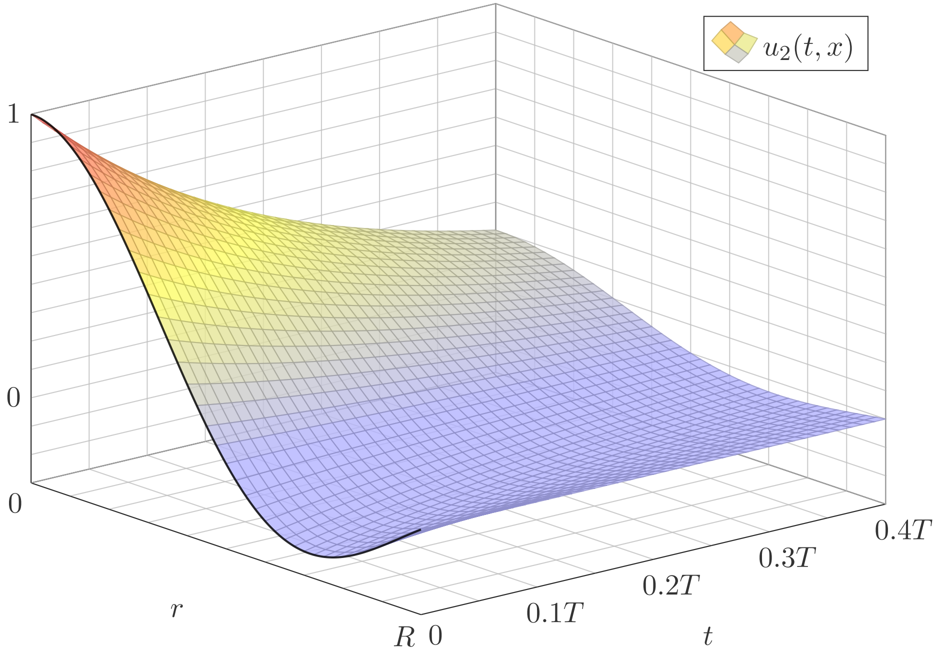
Zum Vergleich die Lösung $u : \mathbb{R}_{\ge 0} \times [0, L] \to \mathbb{R}$ für einen Stab:

$$\boxed{u\bigl(t,x\bigr) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2 t/T}\, \frac{\sin\bigl((2k+1)\pi x/L\bigr)}{2k+1}}$$

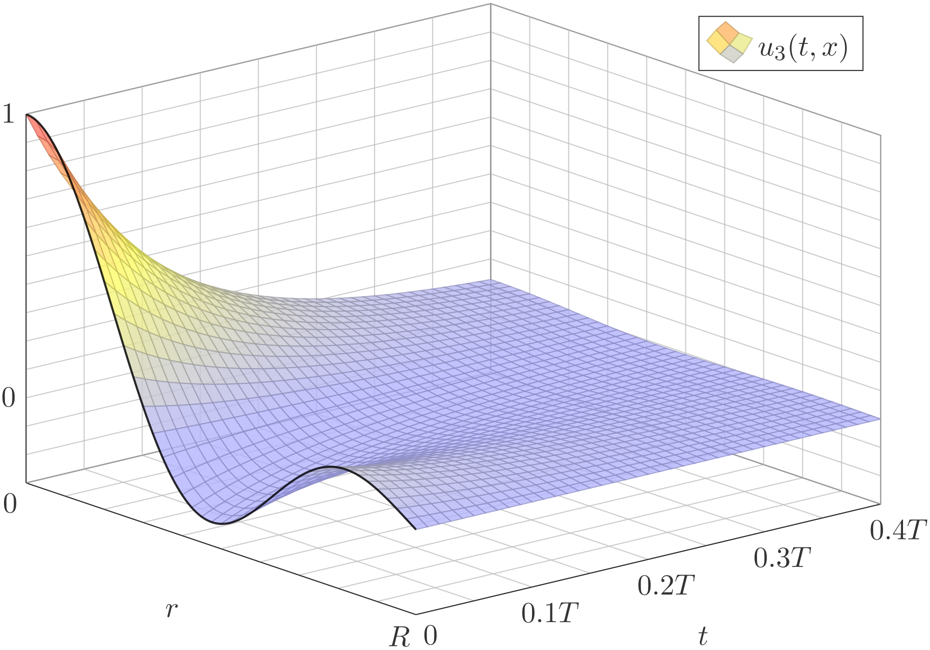
Wärmeleitung einer Kugel



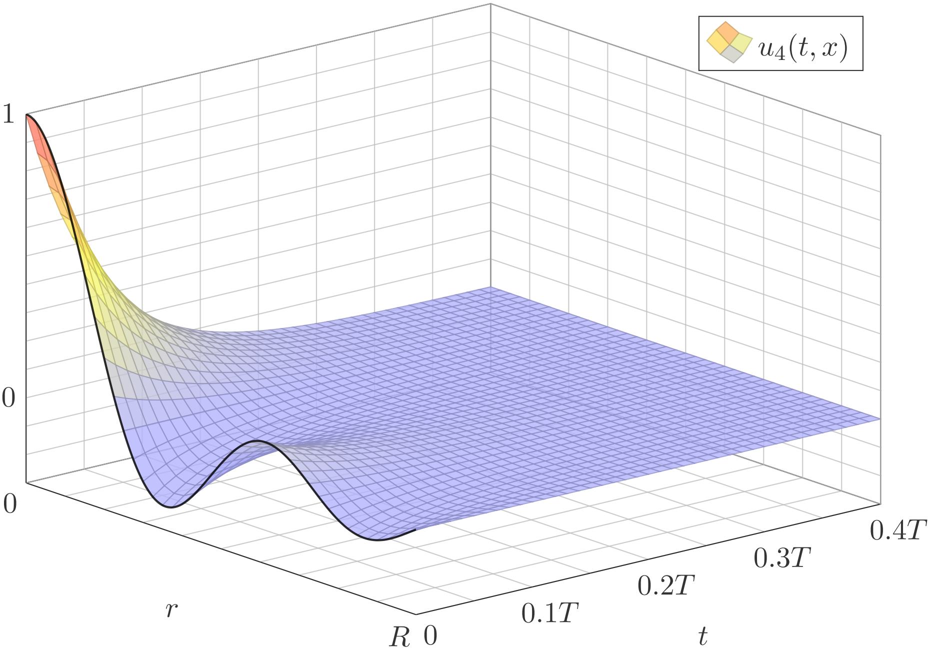
Wärmeleitung einer Kugel



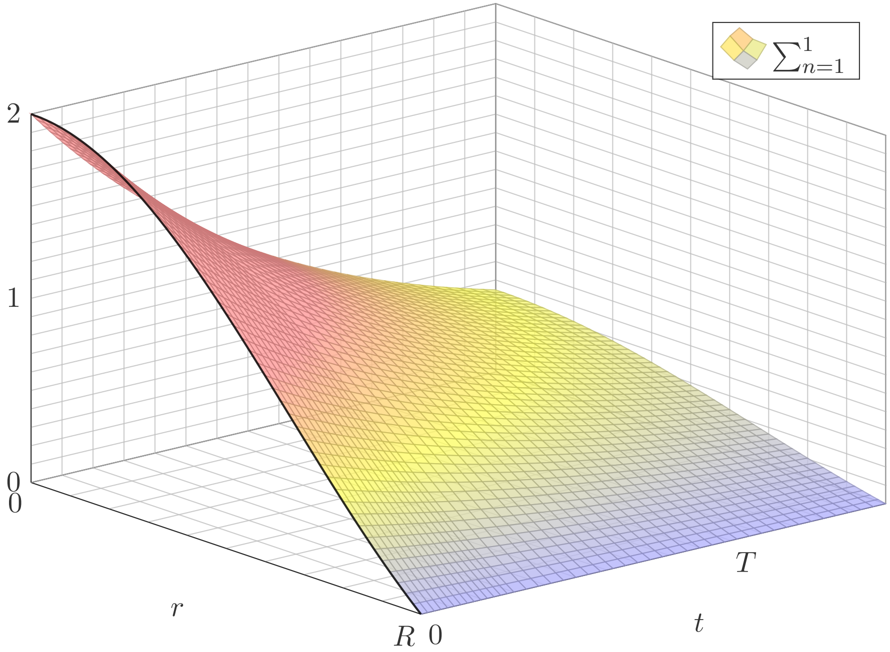
Wärmeleitung einer Kugel



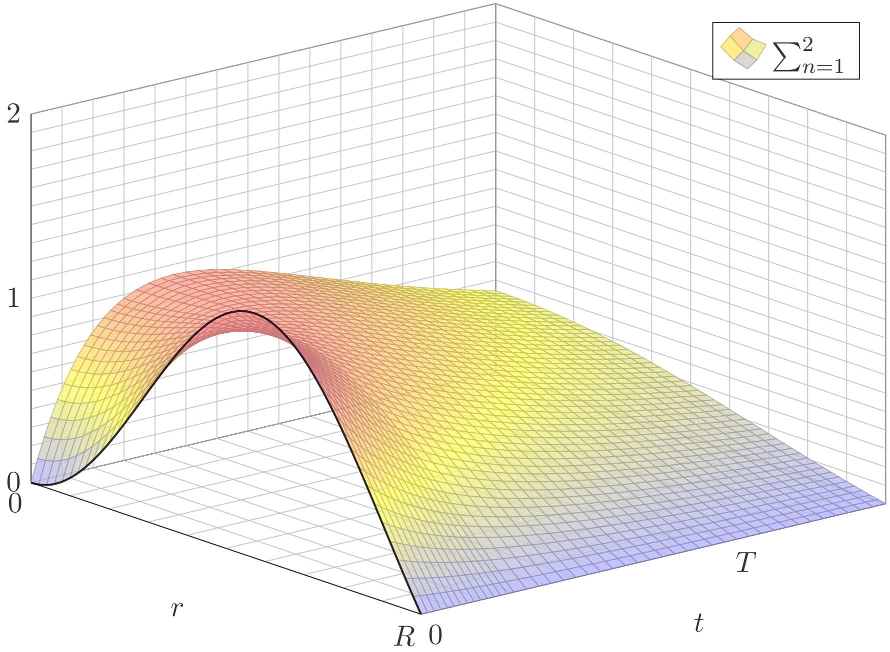
Wärmeleitung einer Kugel



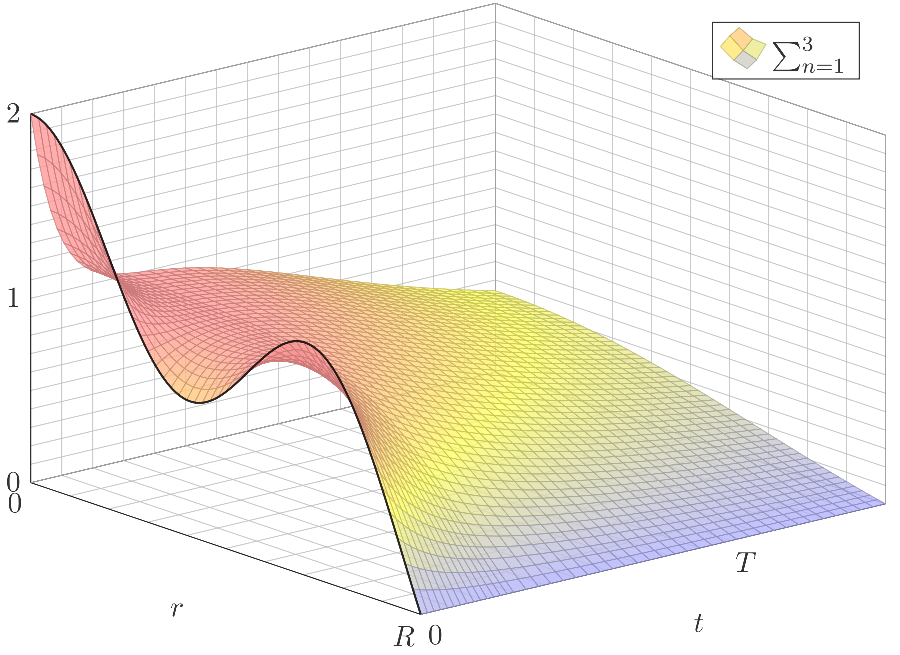
Wärmeleitung einer Kugel



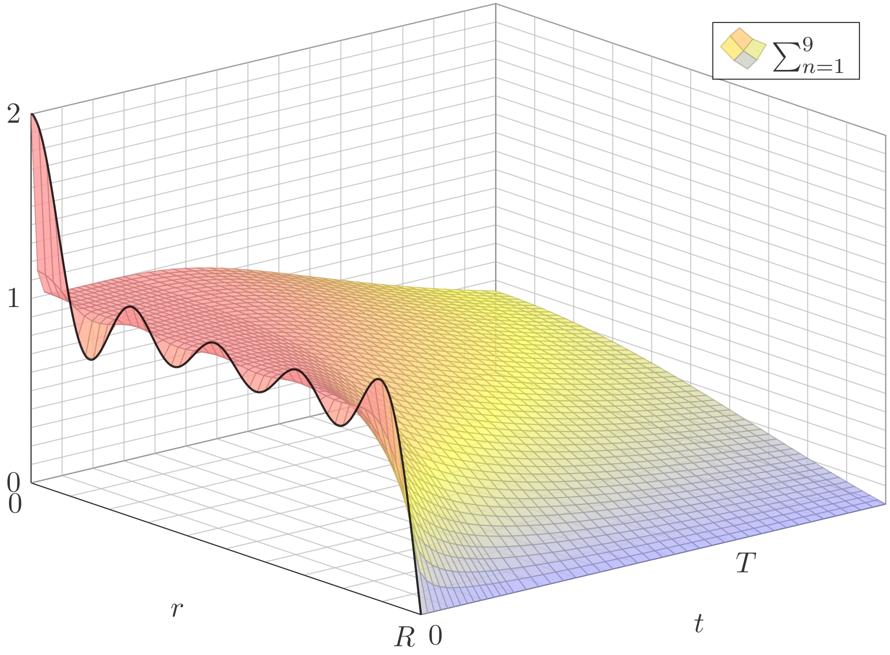
Wärmeleitung einer Kugel



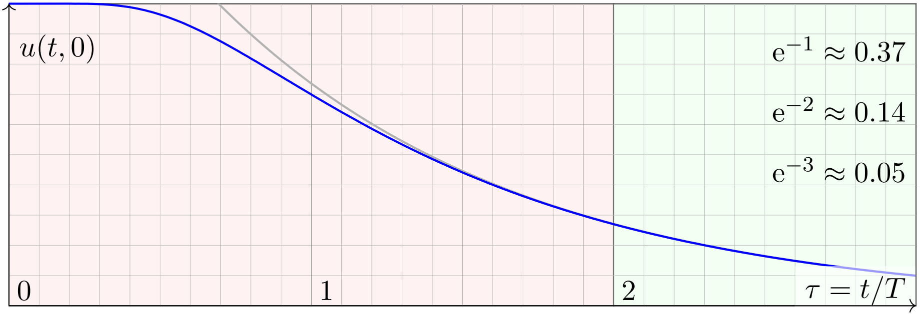
Wärmeleitung einer Kugel



Wärmeleitung einer Kugel



Zeitliche Entwicklung der Kerntemperatur



Die natürliche Zeitskala ist hier $\tau = (\pi/R)^2 \kappa t = t/T$ mit $T = R^2/\kappa\pi^2$.

$$u(t,r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \mathrm{e}^{-n^2 t/T}\, \frac{\sin(n\pi r/R)}{n\pi r/R}$$

$$u(t,0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \mathrm{e}^{-n^2 t/T} \quad \sim \quad 2\,\mathrm{e}^{-t/T}$$

Plausibilitätscheck: Wie lange kochen Eier?

Aufgabe: Wie lange kochen Eier? Erklären Sie die Formel:

$$\boxed{t = T \cdot \ln\left[2\,\frac{T_{\text{Außen}} - T_{\text{Start}}}{T_{\text{Außen}} - T_{\text{Ziel}}}\right]}$$

Lösung: Typischer Durchmesser $D = 44\mathrm{mm}$, also Radius $R = 22\mathrm{mm}$.
Die Temperaturleitfähigkeit beträgt etwa $\kappa \approx 0.2 \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$: Messen!
Die natürliche Zeitskala ist hier $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 240\mathrm{s} = 4\mathrm{min}$: Plausibel!
Der Temperaturverlauf ist (näherungsweise für $t > T$):

$$\begin{aligned}
t \quad &\mapsto \quad 100^\circ\mathrm{C} - 93^\circ\mathrm{C} \cdot 2\,\mathrm{e}^{-t/T} \\
6\mathrm{min} = 1.5T \quad &\mapsto \quad 100^\circ\mathrm{C} - 93^\circ\mathrm{C} \cdot 2\,\mathrm{e}^{-1.5} \approx 60^\circ\mathrm{C} \\
8\mathrm{min} = 2.0T \quad &\mapsto \quad 100^\circ\mathrm{C} - 93^\circ\mathrm{C} \cdot 2\,\mathrm{e}^{-2.0} \approx 75^\circ\mathrm{C} \\
10\mathrm{min} = 2.5T \quad &\mapsto \quad 100^\circ\mathrm{C} - 93^\circ\mathrm{C} \cdot 2\,\mathrm{e}^{-2.5} \approx 85^\circ\mathrm{C}
\end{aligned}$$

Plausibilitätscheck: Wie lange kühlt Bier?

Aufgabe: Wie lange kochen Sie ein Straußenei mit $15\mathrm{cm}$ Durchmesser?
Lösung: Der Durchmesser ist 3.4mal größer, die Zeit etwa 11.5mal.

Aufgabe: Wie lange kühlen Sie ein $5\mathrm{l}$–Fass Bier? eine Flasche Sekt?
Lösung: $R \approx 11\mathrm{cm}$, $\kappa \approx 0.14 \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 8800\mathrm{s} \approx 2.5\mathrm{h}$.
Flasche grob gerundet $R \approx 5\mathrm{cm}$, $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 1800\mathrm{s} \approx 0.5\mathrm{h}$.

CSI: Stuttgart

Aufgabe:
Die Polizei findet morgens um 6 Uhr ein Mordopfer im Schlossgarten. Die Außentemperatur beträgt recht konstant $10°\mathrm{C}$, die Temperatur in der Mitte des Gehirns liegt noch bei $20°\mathrm{C}$. Der Kopfumfang ist $U = 57\mathrm{cm}$. Wann geschah der Mord?

Lösung: Radius $R \approx 9\mathrm{cm}$, Temperaturleitfähigkeit $\kappa \approx 0.2 \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Die natürliche Zeitskala ist hier $T = R^2/\kappa\pi^2 \approx 4100\mathrm{s} \approx 1\mathrm{h}10$.

$$t = T \cdot \ln\left[2\,\frac{T_{\text{Außen}} - T_{\text{Start}}}{T_{\text{Außen}} - T_{\text{Ziel}}}\right] = T \cdot \ln\left[2 \cdot \frac{27}{10}\right] \approx 2\mathrm{h}$$