Kapitel P

# Partielle Differentialgleichungen (PDE)

# Inhalt dieses Kapitels

# Motivation zu Differentialgleichungen



Zur Erinnerung: **Gewöhnliche Differentialgleichungen** (ODE) handeln von Funktionen $u(x)$ in nur einer Variablen $x$, also

$$u \,:\, \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^m \,:\, x \mapsto u(x).$$

Gesucht sind die Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$F(x, u, u', u'', u''', \dots, u^{(k)}) = 0$$

Bei **partiellen Differentialgleichungen** (PDE) betrachten wir allgemein Funktionen $u(x_1, \dots, x_n)$ in mehreren Variablen $x_1, \dots, x_n$, $n \ge 1$, also

$$u \,:\, \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m \,:\, (x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n).$$

Gesucht sind die Lösungen folgender Gleichung:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \partial_1^2 u, \dots, \partial_n^k u) = 0$$

# Systeme partieller Differentialgleichungen

Ein **System partieller Differentialgleichungen** entsteht aus mehreren Funktionen $u_1, \dots, u_m : \Omega \to \mathbb{R}$. Diese können wir zusammenfassen zu

$$u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m, \quad u = (u_1, \dots, u_m).$$

Das System der partiellen Differentialgleichungen schreibt sich dann

$$\begin{cases} F_1(u_1, \dots, u_m, \dots, \partial^\nu u_i, \dots) = 0 \\ \vdots \\ F_\ell(u_1, \dots, u_m, \dots, \partial^\nu u_i, \dots) = 0 \end{cases}$$

Als Beispiel hier drei berühmte Gleichungssysteme, die seit dem 19. Jahrhundert ausgiebig untersucht und vielfältig genutzt werden:

Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** sind vollständig verstanden,

die **Maxwell–Gleichungen** auch weitgehend aber viel schwieriger,

die **Navier–Stokes–Gleichungen** noch nicht (diese sind nicht-linear).

die **Konvektions-Diffusions-Gleichung** (eine lineare PDE).

# Cauchy–Riemann und Maxwell–Gleichungen

Die **Cauchy–Riemann–Gleichungen** für $u, v : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ lauten

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.}$$

$\iff$ Das Vektorfeld $(u, -v)$ erfüllt $\operatorname{div}(u, -v) = 0$ und $\operatorname{rot}(u, -v) = 0$.

$\iff$ Die komplexe Funktion $f = u + \mathrm{i}v : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ ist **holomorph**.

$\iff$ Lokal ist $f$ eine komplexe **Potenzreihe**, $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$.

$\implies$ Beide Funktionen $u, v$ sind **harmonisch**, also $\Delta u = \Delta v = 0$.

Die **Maxwell–Gleichungen** für die Felder $\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R}^4 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ lauten

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\varrho, & \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\vec{J}. \end{aligned}}$$

Jede ebene stationäre Lösung $\vec{E} : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2$ ohne Quellen entspricht einer holomorphen Funktion $f = E_1 - \mathrm{i}E_2 : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt.

# Konvektion-Diffusion und Navier-Stokes

Allgemeine **Bilanzgleichung** / Transportgleichung der Strömungslehre:

$$\underbrace{\partial_t u(t,x)}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\nabla\big[\vec{v}\, u(t,x)\big]}_{\text{Zu/Abfluss: Konvektion}} = \underbrace{\nabla\big[\kappa\,\nabla u(t,x)\big]}_{\text{Diffusion: } \operatorname{div}\operatorname{grad}} + \underbrace{c\,u(t,x)}_{\text{Wachstum/Zerfall}} + \underbrace{q(t,x)}_{\text{Quellen}}$$

Angewendet auf die Impulsdichte $\vec{u} = \vec{v}\varrho$ erhalten wir daraus die **Navier–Stokes–Gleichungen** für inkompressible Fluide:

Massenerhaltung: $$\operatorname{div}\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$$

Impulserhaltung: $$\underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Änderung}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\nu \Delta v_i}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{intern}} + \underbrace{f_i}_{\text{extern}}$$

Jede ebene stationäre Strömung $v = (v_1, v_2) : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2$ konstanter Dichte ohne Wirbel, ohne Reibung und ohne äußere Kräfte entspricht einer holomorphen Funktion $f = v_1 - \mathrm{i}v_2 : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ und umgekehrt. Der Druck $p$ berechnet sich hieraus durch $p + (\varrho/2)\big(v_1^2 + v_2^2\big) = \text{const}$.

# Einfache Beispiele



Zum Aufwärmen ein paar konkrete Beispiele partieller Ableitungen:

$$\partial_x\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\Big] = \mathrm{i}y\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}, \qquad \partial_y\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\Big] = \mathrm{i}x\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}$$

Bei partieller Ableitung nach $x$ werden alle anderen Variablen wie Konstanten behandelt. Ein beliebtes Übungsbeispiel aus der HM2:

$$\begin{aligned}
\partial_x\Big[y^{xy}\Big] &= \partial_x\Big[\big(\mathrm{e}^{\ln y}\big)^{xy}\Big] = \partial_x\Big[\mathrm{e}^{xy\ln y}\Big] = y^{xy}\big(y\ln y\big)\\
\partial_y\Big[y^{xy}\Big] &= \partial_y\Big[\big(\mathrm{e}^{\ln y}\big)^{xy}\Big] = \partial_y\Big[\mathrm{e}^{xy\ln y}\Big] = y^{xy}\big(x\ln y + x\big)
\end{aligned}$$

**Aufgabe:** Finden Sie eine Lösung $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der (linearen) Gleichung

$$x\,\partial_x u(x,y) - y\,\partial_y u(x,y) = 0.$$

**Mögliche Lösung:** $u(x,y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}$, oder allgemeiner $u(x,y) = f(xy)$.

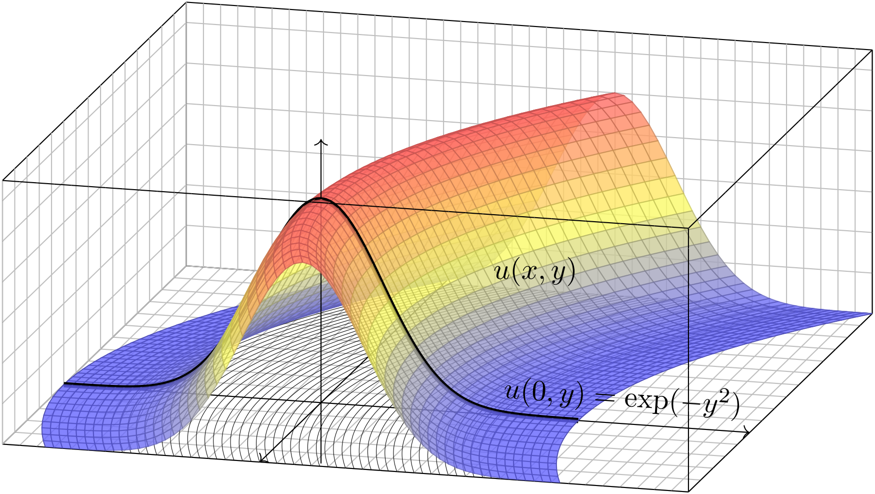
**Aufgabe:** Finden Sie eine Lösung $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$x\,\partial_x u(x,y) - y\,\partial_y u(x,y) + xy\,u(x,y) = 0.$$

**Mögliche Lösung:** $u(x,y) = y^{xy}$. Suche ist schwer, die Probe leicht!

# Lineare PDE erster Ordnung

**Grundidee:** Konstruiere die Funktion $u(x,y)$ entlang ihrer Höhenlinien!



# Lineare PDE erster Ordnung

Zu lösen sei eine **lineare PDE erster Ordnung**:

$$\boxed{a(x,y)\,\partial_x u(x,y) + b(x,y)\,\partial_y u(x,y) = 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.}$$

Eine **charakteristische Kurve**, oder kurz **Charakteristik** dieser PDE, ist ein differenzierbarer Weg $[a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $s \mapsto (x(s), y(s))$ und

$$\boxed{\begin{aligned} x'(s) &= a\big(x(s), y(s)\big), \\ y'(s) &= b\big(x(s), y(s)\big). \end{aligned}}$$

⚠ Solche gewöhnliche DGSysteme können wir bereits lösen!

Ist die Funktion $h(s) = u(x(s), y(s))$ dann konstant, so verschwindet die Ableitung, also

$$\begin{aligned} 0 \;=\; h'(s) \;&=\; \frac{\mathrm{d}u(x(s), y(s))}{\mathrm{d}s} \;=\; \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \\ &=\; x'(s)\,\partial_x u\big(x(s), y(s)\big) + y'(s)\,\partial_y u\big(x(s), y(s)\big) \\ &= a(x,y)\,\partial_x u(x,y) + b(x,y)\,\partial_y u(x,y) \end{aligned}$$

# Lineare PDE erster Ordnung

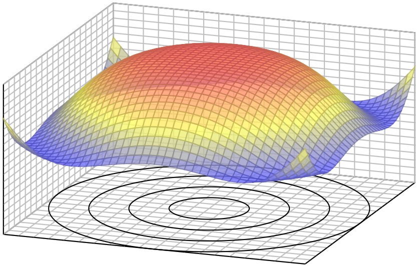


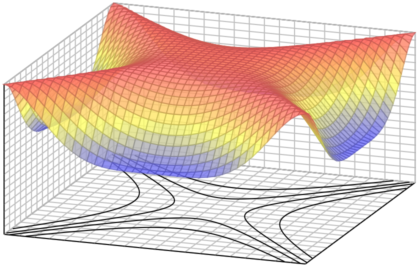
## Satz P2C (Lösung entlang charakteristischer Kurven)

*Eine* $C^1$*–Funktion* $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *löst*

$$\boxed{a(x,y)\,\partial_x u(x,y) + b(x,y)\,\partial_y u(x,y) = 0}$$

*genau dann, wenn* $u$ *konstant längs jeder charakteristischen Kurve ist.*





Der Weg $\gamma : [a,b] \to \Omega$ mit $s \mapsto (x(s), y(s))$ beschreibt eine Niveaulinie von $u$, und die Charakteristiken gehen durch *jeden* Punkt in $\Omega$.

# Erstes Anwendungsbeispiel



**Aufgabe:** Finden Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen

$$u:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y\,\partial_x u - x\,\partial_y u = 0 \quad \text{und} \quad \begin{aligned} &(1) \quad u(x,0)=\cos(x^2),\\ &(2) \quad u(x,0)=1-x^2/2,\\ &(3) \quad u(x,0)=\sin(x). \end{aligned}$$

**Lösung:** Die charakteristische Kurve $s\mapsto(x(s),y(s))$ durch den Startpunkt $(x(0),y(0))=(x_0,0)$ erfüllt folgendes DGSystem:

$$\begin{aligned} x'(s)&=y(s), & x(0)&=x_0,\\ y'(s)&=-x(s), & y(0)&=0. \end{aligned}$$

Zu lösen ist also ein lineares DGSystem, in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

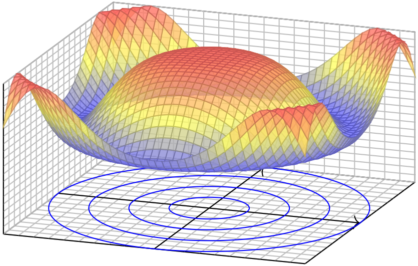
Die Lösung des AWP ist der Kreis $x(s)=x_0\cos(s)$, $y(s)=-x_0\sin(s)$.

# Erstes Anwendungsbeispiel

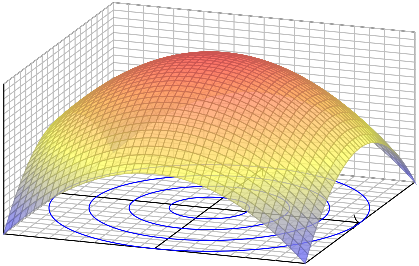


(1) Die gegebenen Anfangswerte $u(x,0)=\cos(x^2)$ auf der $x$–Achse werden entlang der Kreise $x^2+y^2=\mathrm{const}$ transportiert:

$u(x,y)=\cos(x^2+y^2)$



$u(x,y)=1-(x^2+y^2)/2$



(2) Ebenso für die gegebenen Anfangswerte $u(x,0)=1-x^2/2$.

(3) Die Anfangswerte $u(x,0)=\sin(x)$ erlauben keine Lösung, da $u(-x,0)=-u(x,0)$! Man sagt auch, dass die Anfangswerte das Problem **überbestimmen**.

# Zweites Anwendungsbeispiel



**Aufgabe:** Finden Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen

$u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $y\,\partial_x u + x\,\partial_y u = 0$ und (1) $u(x,0) = \cos(x^2)$,

(2) $u(0,y) = \cos(y^2)$,

(3) beides.

**Lösung:** Die charakteristische Kurve $s \mapsto (x(s), y(s))$ durch den Startpunkt $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$ erfüllt folgendes DGSystem:

$$\begin{aligned} x'(s) &= y(s), & x(0) &= x_0, \\ y'(s) &= x(s), & y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Zu lösen ist also ein lineares DGSystem, in Matrixschreibweise:

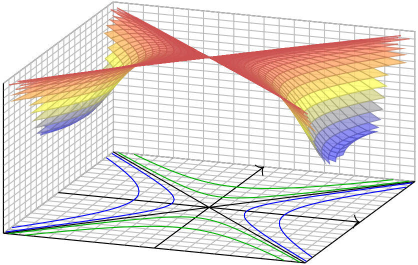
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist die Hyperbel $x(s) = x_0 \cosh(s)$, $y(s) = x_0 \sinh(s)$.

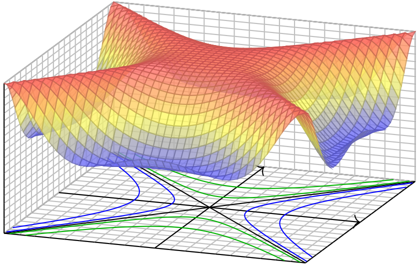
# Zweites Anwendungsbeispiel

(1) Die gegebenen Anfangswerte $u(x,0)=\cos(x^2)$ auf der $x$–Achse werden entlang der Hyperbeln $x^2-y^2=\mathrm{const}$ transportiert:

$u(x,y)=\cos(x^2-y^2)$



$u(x,y)=\cos(x^2-y^2)$



Diese Aufgabenstellung (1) ist noch **unterbestimmt**. Ebenso (2).
Erst beide Daten zusammen (3) bestimmen $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eindeutig.

# Quasi-lineare PDE

# Die Charakteristikmethode für q.l.-PDE

## Definition P2D (lineare und quasi-lineare PDE)

Eine **quasi-lineare PDE erster Ordnung** ist von der Form

$$\boxed{a(x,y,u)\,\partial_x u + b(x,y,u)\,\partial_y u = f(x,y,u).}$$

Hierbei sind $a,b,f:\Omega\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ stetig, gesucht ist $u:\Omega\to\mathbb{R}$.
Spezialfall sind (in $u$) **lineare PDE erster Ordnung** $L\,u=f$, also

$$\boxed{Lu(x,y) = a(x,y)\,\partial_x u + b(x,y)\,\partial_y u + c(x,y)\,u = f(x,y).}$$

**Aufgabe:** Sind folgende PDE linear? quasi-linear? nicht quasi-linear?

| | | |
|---|---|---|
| Die PDE | $\partial_x u + \partial_y u = u + 1$ | ist… linear. |
| Die PDE | $y\,\partial_x u + \sin(x)\,\partial_y u = \cos(x+y)$ | ist… linear. |
| Die PDE | $\partial_x u + u\,\partial_y u = \cos(y)\cos(u)$ | ist… quasi-linear. |
| Die PDE | $x\partial_x u + u^2\,\partial_y u = \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}$ | ist… quasi-linear. |
| Die PDE | $\partial_x u + (\partial_y u)^2 = 0$ | ist… nicht quasi-linear. |

# Quasilineare PDE und Charakteristiken



Zu lösen sei die quasi-lineare PDE erster Ordnung

$$\begin{aligned} a(x,y,u)\,\partial_x u + b(x,y,u)\,\partial_y u &= f(x,y,u) \quad \text{für alle } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x,y) &= u_0(x,y) \quad \text{für alle } (x,y) \in A \subset \Omega. \end{aligned}$$

Eine **charakteristische Kurve** der PDE durch den Punkt $(x_0, y_0) \in A$ ist ein differenzierbarer Weg $[a,b] \to \Omega \times \mathbb{R}$ mit $s \mapsto (x(s), y(s), z(s))$ und

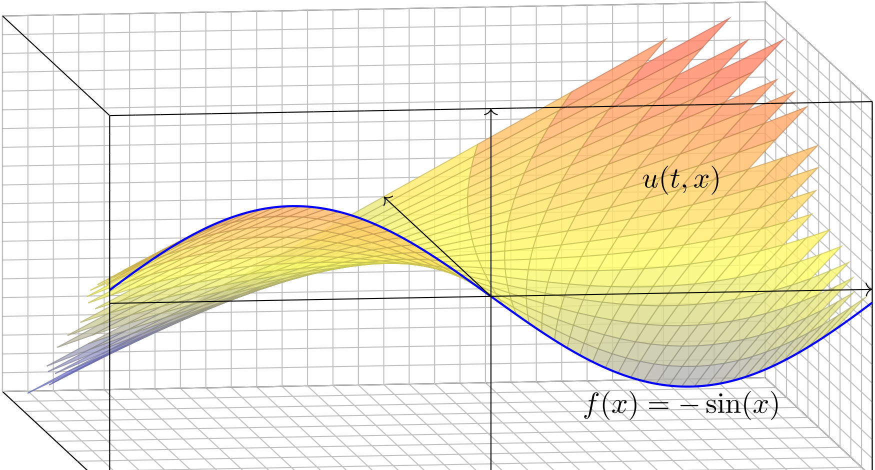
$$\begin{aligned} x' &= a(x,y,z), & x(0) &= x_0, \\ y' &= b(x,y,z), & y(0) &= y_0, \\ z' &= f(x,y,z), & z(0) &= u_0(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Längs jeder Charakteristik erfüllt die Lösung $u$ dann $u(x(s), y(s)) = z(s)$.

# Zweidimensionales Anwendungsbeispiel

**Aufgabe:** Finden Sie über $\mathbb{R}^2$ alle stetig diff'baren Funktionen $u(t,x)$ mit

$$\begin{aligned} \partial_t u + x\,\partial_x u &= x && \text{für } t>0 \text{ und } x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= f(x) && \text{für } t=0 \text{ und } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$



# Zweidimensionales Anwendungsbeispiel



**Lösung:** Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} t'(s) &= 1, & t(0) &= 0,\\ x'(s) &= x(s), & x(0) &= x_0,\\ z'(s) &= x(s), & z(0) &= f(x_0). \end{aligned}$$

Wir erhalten $t(s) = s$, $x(s) = x_0\,\mathrm{e}^s$, $z(s) = x_0\,\mathrm{e}^s + C$ mit $C = f(x_0) - x_0$.

⚠ Wegen $t = s$ bietet es sich an, fortan $t$ als Wegparameter zu nutzen.

Die Lösung unserer PDE ist hierdurch implizit gegeben:

$$u(t, x(t)) = x_0(\mathrm{e}^t - 1) + f(x_0)$$

Wir lösen $x = x_0\,\mathrm{e}^t$ auf zu $x_0 = x\,\mathrm{e}^{-t}$ und setzen ein:

$$\boxed{u(t,x) = x\,(1 - \mathrm{e}^{-t}) + f(x\,\mathrm{e}^{-t})}$$

# Beispiel: Transportgleichung

Wir betrachten lineare PDE erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

## Satz P2E (Lösungsformel für lineare PDE erster Ordnung)

*Zu lösen sei die folgende* ***Transportgleichung*** *für* $u(t,x)$*:*

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + b\,\partial_x u(t,x) + c\,u(t,x) &= f(t,x) && \textit{für } t>0 \textit{ und } x\in\mathbb{R},\\ u(0,x) &= g(x) && \textit{für } t=0 \textit{ und } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}}$$

*Dieses* ***Cauchy–Problem*** *wird gelöst durch* $u:\mathbb{R}_{\ge 0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *mit*

$$\boxed{u(t,x) = g(x-bt)\ \mathrm{e}^{-ct} + \int_{\tau=0}^{t} f\big(\tau, x-bt+b\tau\big)\ \mathrm{e}^{c(\tau-t)}\,\mathrm{d}\tau}$$

# Die Transportgleichung

**Aufgabe:** (1) Wie findet man diese Lösung? (2) Wie prüft man sie?

**Lösung:** (1) Wir lesen die charakteristische Gleichung ab:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= b, & x(0) &= x_0 \\ \dot{z}(t) &= f(t, x(t)) - cz(t), & z(0) &= g(x_0) \end{aligned}$$

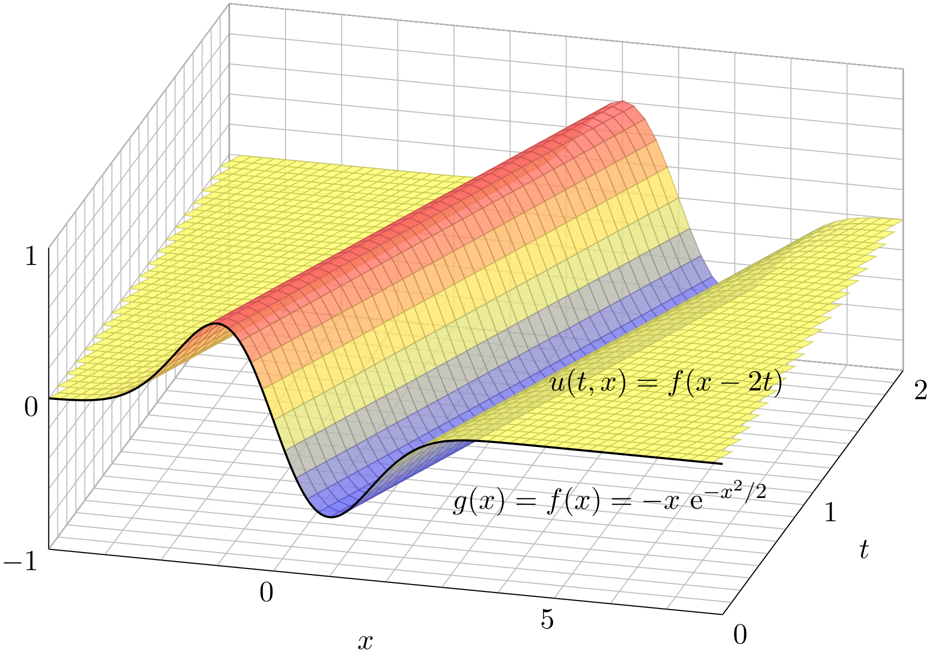
Die Lösung ist $x(t) = x_0 + bt$, nach $x_0$ aufgelöst $x_0 = x - bt$.
Die Gleichung für $z$ ist $z'(t) + cz(t) = f(t, x_0 + bt)$. Sie ist linear!
Für diese gewöhnliche DG kennen wir eine Lösungsformel:

$$z(t) = z(0)\,\mathrm{e}^{-ct} + \int_{\tau=0}^{t} f\big(\tau, x(\tau)\big)\,\mathrm{e}^{c(\tau-t)}\,\mathrm{d}\tau$$

Einsetzen von Charakteristik und Anfangswerten ergibt obige Lösung.

(2) Liegt die vermutete Formel erst einmal vor, so ist die Probe leicht: Es genügt Einsetzen in die PDE und sorgfältiges Nachrechnen.

# Die Transportgleichung



# Die Transportgleichung

**Aufgabe:** Spezialisieren Sie die Transportgleichung für $c = 0$ und $f = 0$. Welche Bedeutung haben die Koeffizienten $b, c$ und die rechte Seite $f$?

**Lösung:** Wir spezialisieren die allgemeine Gleichung und ihre Lösung:

$$\partial_t u + b\,\partial_x u = 0 \quad\Longrightarrow\quad u(t,x) = g(x - bt)$$

$$\partial_t u + b\,\partial_x u + c\,u = 0 \quad\Longrightarrow\quad u(t,x) = g(x - bt)\,\mathrm{e}^{-ct}$$

$$\partial_t u + b\,\partial_x u = f \quad\Longrightarrow\quad u(t,x) = g(x - bt) + \int_{\tau=0}^{t} f\big(\tau, x - bt + b\tau\big)\,\mathrm{d}\tau$$

# Die Potenzreihenmethode

# Lösung durch Potenzreihen



**Aufgabe:** Mit dem Ansatz $u(t,x) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{ij}\, t^i x^j$ löse man

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + x\,\partial_x u(t,x) = 0, \quad u(0,x) = x.}$$

**Lösung:** Einsetzen in die geforderten Gleichungen ergibt:

$$\text{(1)} \quad \sum i\, a_{ij}\, t^{i-1} x^j + \sum j\, a_{ij}\, t^i x^j = 0, \qquad \text{(2)} \quad \sum a_{0j}\, x^j = x.$$

(2) Koeffizientenvergleich ergibt $a_{01} = 1$ und $a_{0j} = 0$ für $j \ne 1$.

(1) Es gilt $(i+1)a_{i+1,j} + j a_{ij} = 0$. Rekursion $a_{i+1,j} = -\frac{j}{i+1} a_{ij}$. Für

$$\begin{array}{llllll} j = 1: & a_{01} = 1, & a_{11} = -\dfrac{1}{1!}, & a_{21} = \dfrac{1}{2!}, & a_{31} = -\dfrac{1}{3!}, & \dots \\ j \ne 1: & a_{01} = 0, & a_{11} = 0, & a_{21} = 0, & a_{31} = 0, & \dots \end{array}$$

Diese Koeffizienten bestimmen die Lösung. Wir erhalten:

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} t^i x^1 = x\,\mathrm{e}^{-t}}$$

# Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.



**Aufgabe:** Finden Sie alle $C^1$–Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + x^2\, \partial_x u(t,x) = 0 \quad \text{und} \quad u(0,x) = x.}$$

Nutzen und vergleichen Sie die beiden bisherigen Techniken:
(1) die Charakteristikmethode und (2) den Potenzreihenansatz.

**Lösung:** (1) Die Charakteristiken haben wir oben ausgeführt:
Die charakteristische Kurve durch $(0, x_0)$ ist $t \mapsto \big(\, t,\; x_0/(1 - t x_0)\, \big)$.
Erreicht werden nur die Punkte in $\Omega = \{\, (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid tx > -1 \,\}$.

Als eine mögliche Lösung finden wir so:

$$\boxed{u \,:\, \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R} \,:\, (t,x) \mapsto u(t,x) = \frac{x}{1 + tx}}$$

🙂 Der Transport entlang von Charakteristiken beweist die Eindeutigkeit auf $\Omega$; darüber hinaus reichen die Anfangswerte nicht.

# Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.

(2) Einsetzen von $u(t,x) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{ij}\, t^i x^j$ in die PDE ergibt:

$$\sum i\, a_{ij}\, t^{i-1} x^j + \sum j\, a_{ij}\, t^i x^{j+1} \stackrel{!}{=} 0, \qquad \sum a_{0j}\, x^j \stackrel{!}{=} x$$

Koeffizientenvergleich ergibt $a_{01} = 1$ und $a_{0j} = 0$ für $j \ne 1$.

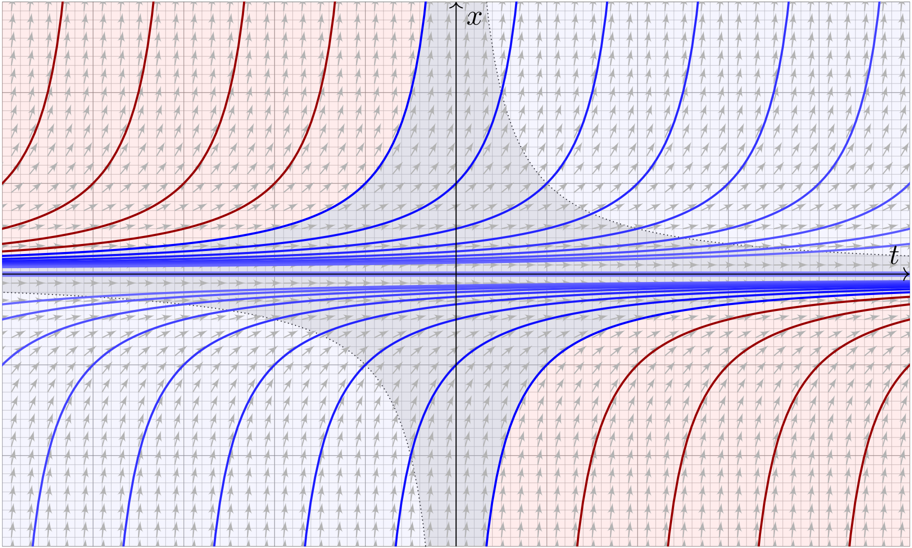
Es gilt $(i+1)a_{i+1,j+1} + j a_{ij} = 0$, also rekursiv $a_{i+1,j+1} = -\frac{j}{i+1} a_{ij}$:

$$\begin{array}{llllll} j = 1: & a_{0,1} = +1, & a_{1,2} = -1, & a_{2,1} = +1, & a_{3,1} = -1, & \dots \\ j \ne 1: & a_{0,j} = 0, & a_{1,j+1} = 0, & a_{2,j+2} = 0, & a_{3,j+3} = 0, & \dots \end{array}$$

Diese Koeffizienten bestimmen eine Lösung. Wir erhalten so:

$$\boxed{u(t,x) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i t^i x^{i+1} \;=\; \frac{x}{1+tx}}$$

# Methodenvergleich: Viele Wege führen zum Ziel.




Die Charakteristiken (blau) decken nur einen Teil aller Punkte $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ ab; hier wird der Funktionswert $u(t, x)$ durch die Anfangswerte bestimmt.

⚠ Im rot gefärbten Bereich hingegen ist der Wert $u(t, x)$ unbestimmt.