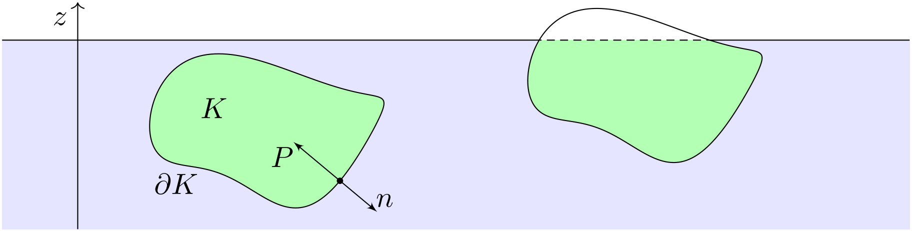
Kapitel F

Integralsätze im Raum

Inhalt dieses Kapitels

Satz des Archimedes: Die Auftriebskraft eines Körpers K gleicht dem Gewicht $g\varrho\,\mathrm{vol}_3(K)$ der verdrängten Flüssigkeit.



Erinnerung: Kurven-, Arbeits- und Flussintegral

Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ eine Kurve, parametrisiert durch einen Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Das **Kurvenintegral** von $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ ist definiert durch:

$$\boxed{\int_\Gamma g\,|\mathrm{d}\Gamma| := \int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma| \quad = \int_a^b g(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.}$$

Für **Arbeits- und Flussintegrale** muss die Kurve Γ zusätzlich orientiert sein, d.h. Γ hat einen festgelegten Durchlaufsinn. Dann können wir diese Integrale für $f : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ definieren durch

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma &:= \int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma &&= \int_a^b f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\mathrm{d}t. \\ \int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma &:= \int_\gamma f \times \mathrm{d}\gamma &&= \int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}}$$

⚠ Diese Integrale sind invariant unter Umparametrisierung von γ und somit wohldefiniert für die (orientierte) glatte Kurve Γ

Erinnerung: Integralsätze in der Ebene

Kurven $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametrisieren wir (stückweise C^1) durch $\gamma : [a, b] \to \Gamma$.

Arbeitsintegral: $$\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma = \int_{s \in \Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}s := \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

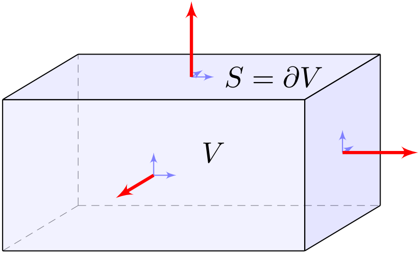
Flussintegral: $$\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma = \int_{s \in \Gamma} f(s) \times \mathrm{d}s := \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

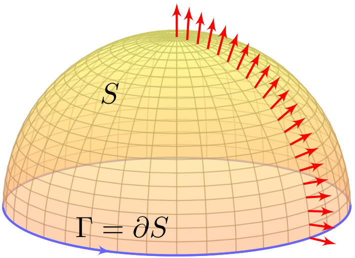
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Fläche mit stückw. glatter Randkurve ∂D.
Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^2$ gilt dann

Satz von Green: $$\int_{s \in \partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{(x,y) \in D} \operatorname{rot} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y),$$

Satz von Gauß: $$\int_{s \in \partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = \int_{(x,y) \in D} \operatorname{div} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y).$$

Integralsätze im Raum: Gauß und Stokes





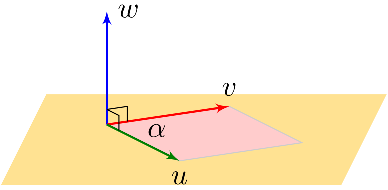
Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ kompakt mit stückweise glatter Randfläche $S = \partial V$.

Satz von Gauß: $$\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v)\,\mathrm{d}V = \int_{s \in S = \partial V} f(s) \bullet \mathrm{d}S$$

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Fläche mit Randkurve $\Gamma = \partial S$.

Satz von Stokes: $$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{s \in \Gamma = \partial S} f(s) \bullet \mathrm{d}\Gamma$$

Das Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$



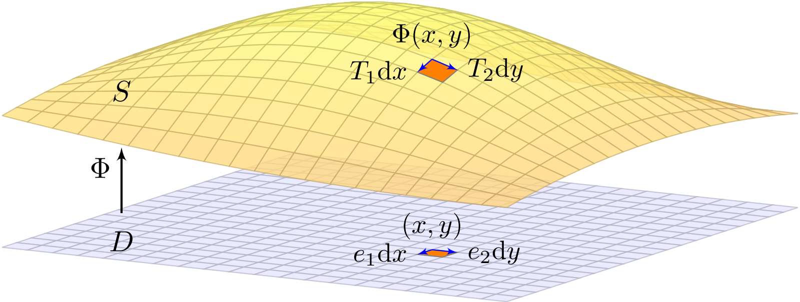
Erinnerung: Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

- Der Vektor $w = u \times v$ steht senkrecht auf den Vektoren u, v.
- Die Norm $|w|$ ist der Flächeninhalt des von den Vektoren u und v aufgespannten Parallelogramms, also $|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v)$.
- Daher gilt $w = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Tangentialvektoren und Flächenelemente

Ein **parametrisiertes Flächenstück** ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$.



Am Punkt $s = \Phi(x,y)$ heften die **Tangentialvektoren**

$$T_1 := \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y).$$

Der zugehörige **Normalenvektor** ist das Kreuzprodukt $N = T_1 \times T_2$.
Der **Flächeninhalt** eines kleinen Flächenelements $\mathrm{d}S$ ist daher

$$\operatorname{vol}_2 \Phi\Big([x, x+\mathrm{d}x] \times [y, y+\mathrm{d}y]\Big) \approx \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) \right| \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Integration über parametrisierte Flächenstücke

Sei $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück. Für das **vektorielle** bzw. **skalare Flächenelement** schreiben wir

$$\mathrm{d}\Phi := \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \mathrm{d}(x,y) \quad \text{und} \quad |\mathrm{d}\Phi| = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \mathrm{d}(x,y).$$

Der **Flächeninhalt** des parametrisierten Flächenstücks Φ ist

$$\mathrm{vol}_2(\Phi) := \int_D |\mathrm{d}\Phi| = \int_{(x,y)\in D} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) \right| \mathrm{d}(x,y).$$

Integration über parametrisierte Flächenstücke

Definition F2A (Flächen- und Flussintegral)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein glattes Flächenstück, wofür wir eine (reguläre) Parametrisierung $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ wählen.

Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes $g : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist

$$\boxed{\int_S g\,|\mathrm{d}S| := \int_D g\,|\mathrm{d}\Phi| = \int_D g(\Phi(x,y)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \mathrm{d}(x,y).}$$

Für Flussintegrale sei die Fläche S zusätzlich **orientiert**. Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\boxed{\int_S f \bullet \mathrm{d}S := \int_D f \bullet \mathrm{d}\Phi = \int_D f(\Phi(x,y)) \bullet \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big)\, \mathrm{d}(x,y).}$$

Dies ist wohldefiniert, d.h. **unabhängig** von der Parametrisierung Φ.

Orientierung einer parametrisierten Fläche

Zeigt der Normalenvektor $N(x,y) = \partial_x\Phi(x,y) \times \partial_y\Phi(x,y)$ der Parametrisierung $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ nach außen, so ist Φ **positiv orientiert**.

Beispiel: Zur Parametrisierung $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ erhalten wir die umgekehrte Parametrisierung $\bar\Phi : \bar D \to \mathbb{R}^3$ durch Vertauschung:

$$\bar D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y,x) \in D\ \}, \qquad \bar\Phi : \bar D \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \bar\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$$

Beide parametrisieren dieselbe Menge $S = \Phi(D) = \bar\Phi(\bar D)$, aber mit umgekehrter Orientierung: Das Kreuzprodukt wechselt sein Vorzeichen!

Flächenintegrale bleiben bei Orientierungsumkehr unverändert:

$$\boxed{\int_{\bar D} g\,|\mathrm{d}\bar\Phi| = \int_D g\,|\mathrm{d}\Phi|}$$

Flussintegrale hingegen **wechseln** das Vorzeichen:

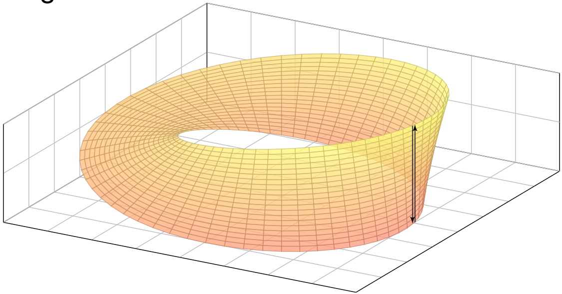
$$\boxed{\int_{\bar D} f \bullet \mathrm{d}\bar\Phi = -\int_D f \bullet \mathrm{d}\Phi.}$$

⚠ Für D ist eine Orientierung fixiert, man schreibt aber: $\int_D f \bullet \mathrm{d}\bar\Phi$.

Nichtorientierbare Flächen

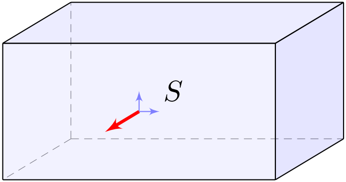
Wir nehmen im Folgenden stets an, dass S **orientierbar** ist, d.h. es existiert eine Parametrisierung, für die der Normalenvektor immer nach außen zeigt (und insbesondere nicht verschwindet).

⚠ Nichtorientierbare Flächen existieren, z.B. das **Möbius–Band**! Bei einer Umdrehung dreht sich der Normalenvektor von außen nach innen. Hier sind die Integralsätze also nicht anwendbar.

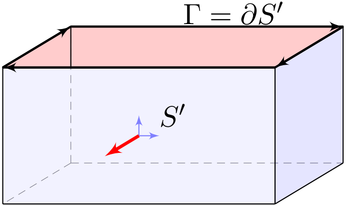


$$M = \left\{ \begin{pmatrix} (3 + r\sin\frac{\varphi}{2})\cos\varphi \\ (3 + r\sin\frac{\varphi}{2})\sin\varphi \\ r\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -1 \le r \le 1 \end{matrix} \right\}$$

Stückweise glatte Flächen



Die Oberfläche eines Quaders.



Dieselbe Fläche aber ohne Deckel.

Rechte-Hand-Regel: Die Orientierung der Fläche S definiert eine zugehörige positive Orientierung der Randkurve $\Gamma = \partial S$.

Stückweise glatte Flächen

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt **stückweise glatte Fläche**, wenn es glatte Flächenstücke $S_1, \dots, S_k$ gibt, sodass $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ gilt.

Wie im obigen Modell verlangen wir geometrische Vorkehrungen:
Die Flächenstücke schneiden sich höchstens längs ihrer Randkurven.
Im Inneren jeder Kante schneiden sich höchstens zwei Flächenstücke.
(In Eckpunkten können mehrere Flächenstücke zusammenstoßen.)

Innere Kanten treten also stets doppelt auf und heben sich (im Integral) auf. Die verbleibenden einzelnen Kanten bilden den **Rand** ∂S. Im Falle $\partial S = \emptyset$ nennt man die Fläche S **geschlossen**.

Ein **Orientierung** von S besteht aus Orientierungen der Flächenstücke $S_1, \dots, S_k$, die wie gezeigt in gemeinsamen Kanten gegenläufig sind. Dies definiert die Orientierung des Randes ∂S im Satz von Stokes:

Beim Zusammensetzen einer stückweise glatten Fläche heben sich innere Kanten paarweise auf, denn sie sind gegenläufig orientiert. Es bleibt die positiv orientierte Randkurve $\Gamma = \partial S$.

Integration über stückweise glatte Flächen

Definition F2F (Flächen- und Flussintegral)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Fläche. Wir wählen (semi)reguläre Parametrisierung $\Phi_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \dots, \Phi_k : D_k \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, sodass $S = \Phi_1(D_1) \cup \dots \cup \Phi_k(D_k)$ gilt und $\Phi_i(\mathring{D}_i) \cap \Phi_j(\mathring{D}_j) = \emptyset$ für $i \neq j$.

Das **Flächenintegral** eines Skalarfeldes $g : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist

$$\boxed{\int_S g\,|\mathrm{d}S| := \int_{D_1} g\,|\mathrm{d}\Phi_1| + \dots + \int_{D_k} g\,|\mathrm{d}\Phi_k|.}$$

Für Flussintegrale sei die Fläche S zusätzlich **orientiert**.
Das **Flussintegral** eines Vektorfeldes $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\boxed{\int_S f \bullet \mathrm{d}S := \int_{D_1} f \bullet \mathrm{d}\Phi_1 + \dots + \int_{D_k} f \bullet \mathrm{d}\Phi_k.}$$

⚠ Dies ist wohldefiniert, das heißt, das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung von S und der Parametrisierungen Φ_k.

Der Integralsatz von Stokes

Satz F2G

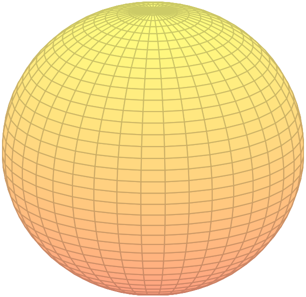
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ *eine stückweise glatte, orientierte Fläche. Ihre Randkurve* $\Gamma = \partial S$ *ist dann ebenso stückweise glatt und werde positiv orientiert. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld* $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *gilt dann*

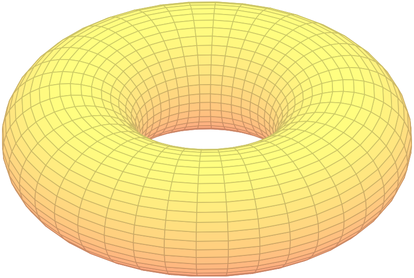
$$\boxed{\int_{s\in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}\Gamma.}$$

Die Zerlegung $\mathrm{d}S = n(s)\,|\mathrm{d}S|$ *ergibt die gleichwertige Formulierung*

$$\int_{s\in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet n(s)\,|\mathrm{d}S| = \int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}\Gamma.$$

Spezialfall: geschlossene Flächen





Ist die Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ geschlossen, also $\partial S = \emptyset$, so gilt

$$\int_{s \in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{s \in \partial S} f(s) \bullet \mathrm{d}s = 0$$

Zur Erinnerung: Rotation von Vektorfeldern

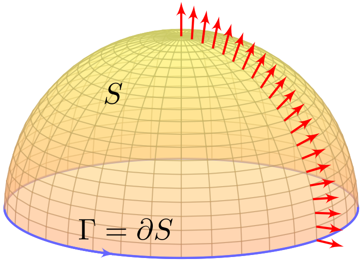
Für jedes C^1–Vektorfeld $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der Satz von Green in der Ebene ist ein Spezialfall des Satzes von Stokes:

Die Ebene betten wir ein als $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ und erhalten demnach $\operatorname{rot}(f_1, f_2, 0) = (0, 0, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$ und das Flächenelement $(0, 0, \mathrm{d}S)$.

Beispiel zum Satz von Stokes



Aufgabe: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die nördliche Hemisphäre vom Radius r mit dem Äquator $\Gamma = \partial S$ als Randkurve. Berechnen Sie $\int_S \operatorname{rot}(f) \bullet \mathrm{d}S$ und $\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma$ für das Vektorfeld $f(x, y, z) = (z - y, x + z, -x - y)$.

Lösung: Wir berechnen zunächst die Rotation des Vektorfeldes

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - y \\ x + z \\ -x - y \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Satz von Stokes

Die nördliche Hemisphäre ist $S = \{\ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=r^2,\ z \ge 0\ \}$.
Diese Fläche parametrisieren wir durch Kugelkoordinaten $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$:

$$s = \Phi\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Wir berechnen die Tangentialvektoren und den Normalenvektor

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ r^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ r^2\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Für die gesuchte Zirkulation von f über S erhalten wir somit:

$$\int_{s\in S} \operatorname{rot} f(s) \bullet \mathrm{d}S \quad = \quad \int_D \operatorname{rot} f\big(\Phi(\theta,\varphi)\big) \bullet \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Big)\, \mathrm{d}(\theta,\varphi)$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} -2r^2\sin^2\theta\cos\varphi + 2r^2\sin^2\theta\sin\varphi + 2r^2\sin\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\pi r^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \quad = \quad 4\pi r^2 \Big[\frac{1}{2}\sin(\theta)^2\Big]_{\theta=0}^{\pi/2} \quad = \quad 2\pi r^2$$

Beispiel zum Satz von Stokes

Die Randkurve $\Gamma = \partial S$ ist der Äquator, $\partial S = \{\ (x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = r^2\ \}$.
Diese Kurve parametrisieren wir durch den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$s = \gamma(t) = \Phi \begin{pmatrix} \pi/2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für das gesuchte Arbeitsintegral längs Γ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}\Gamma \quad &= \quad \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \quad \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ -r\sin t - r\cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \quad \int_{t=0}^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}t \quad = \quad 2\pi r^2. \end{aligned}$$

Der Integralsatz von Gauß im Raum

Satz F2I

Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ *kompakt mit stückweise glatter Randfläche* $S = \partial V$*, orientiert durch den von* V *nach außen weisenden Normalenvektor. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld* $f : V \to \mathbb{R}^3$ *gilt dann*

$$\boxed{\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v)\, \mathrm{d}V = \int_{s \in S} f(s) \bullet \mathrm{d}S.}$$

Die Zerlegung $\mathrm{d}S = n(s)\,|\mathrm{d}S|$ *ergibt die gleichwertige Formulierung*

$$\int_{v \in V} \operatorname{div} f(v)\, \mathrm{d}V = \int_{s \in S} f(s) \bullet n(s)\, |\mathrm{d}S|.$$

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie zu gegebenem $r > 0$ den Körper

$$V = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ z \ge 0\ \}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper V explizit durch Parametrisierungen als Normalbereich in z–Richtung, in Zylinder- und in Kugelkoordinaten.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt $\mathrm{vol}_3(V)$ je nach Parametrisierung.

(4) Beschreiben Sie explizit die Randfläche $S = \partial V$ wie in (2).

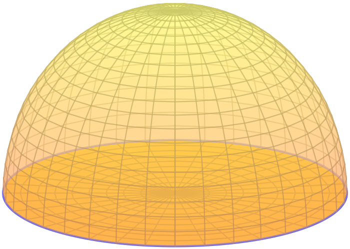
(5) Bestimmen Sie in jedem Randpunkt s den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor $n_{\partial V}(s)$ sowie $\mathrm{d}S$ je nach Parametrisierung.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(S)$ je nach Parametrisierung.

(7) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $f(x, y, z) = (x, y, z)$, das Volumenintegral $\int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}(x, y, z)$ und das Flussintegral $\int_S f \bullet \mathrm{d}S$.

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(1) Zu $r > 0$ betrachten wir die nördliche Halbkugel V:



(2) Wir können V auf verschiedene Weisen parametrisieren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 \le r^2 \\ z \ge 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le z \le r \\ 0 \le \rho \le \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(3a) Parametrisierung $\Phi : D \subset \mathbb{R}^3 \to V \subset \mathbb{R}^3$ als z–Normalbereich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le \sqrt{r^2-\rho^2} \end{matrix} \right\}$$

Wir berechnen Jacobi–Matrix und Funktionaldeterminante:

$$\Phi' = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det\Phi' = \rho$$

Volumenberechnung dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(V) &= \int_V 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) &&= \int_D |\det\Phi'| \,\mathrm{d}(\rho,\varphi,z) \\ &= \int_{\rho=0}^{r} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho &&= \int_{\rho=0}^{r} 2\pi\rho\sqrt{r^2-\rho^2} \,\mathrm{d}\rho \\ &= \Big[-\frac{2\pi}{3}\big(r^2-\rho^2\big)^{3/2} \Big]_{\rho=0}^{r} &&= \frac{2\pi}{3} r^3 \end{aligned}$$

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie zu gegebenem $r > 0$ den Körper

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ z \ge 0 \}$$

(2) Beschreiben Sie den Körper V explizit durch Parametrisierungen als Normalbereich in z–Richtung, in Zylinder- und in Kugelkoordinaten.

(3) Berechnen Sie den Rauminhalt $\mathrm{vol}_3(V)$ je nach Parametrisierung.

(4) Beschreiben Sie explizit die Randfläche $S = \partial V$ wie in (2).

(5) Bestimmen Sie in jedem Randpunkt s den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor $n_{\partial V}(s)$ sowie $\mathrm{d}S$ je nach Parametrisierung.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(S)$ je nach Parametrisierung.

(7) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $f(x, y, z) = (x, y, z)$, das Volumenintegral $\int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}(x, y, z)$ und das Flussintegral $\int_S f \bullet \mathrm{d}S$.

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(4) Die Randfläche $S = \partial V$ der Halbkugel V besteht aus der äquatorialen Kreisscheibe A und der nördlichen Hemisphäre B:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2 + y^2 \le r^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ z \ge 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le z \le r \\ \rho = \sqrt{r^2 - z^2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \rho = r \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(5a) In jedem Punkt $s \in A$ sehen wir die äußere Einheitsnormale

$$n_{\partial V}(s) = (0, 0, -1) \quad \text{(senkrecht auf } A\text{, Länge } 1\text{, aus } V \text{ heraus).}$$

Wir nutzen die Parametrisierung $\Phi : D \to A$ in Polarkoordinaten:

$$s = \Phi\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r\\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Die beiden Tangentialvektoren und der Normalenvektor sind:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \rho\end{pmatrix}.$$

(6a) Hieraus erhalten wir erneut den wohlbekannten Flächeninhalt:

$$\mathrm{vol}_2(A) = \int_A |\mathrm{d}A| \quad = \quad \int_D \left|\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right| \mathrm{d}(\rho,\varphi) = \int_{\rho=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \pi r^2$$

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

(7a) Das Vektorfeld $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und seine Divergenz:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div}(f) = 1+1+1 = 3$$

Die Quellstärke von f auf dem Bereich V ist

$$\int_V \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y,z) \;=\; \int_V 3\,\mathrm{d}(x,y,z) \;=\; 3\operatorname{vol}_3(V) \;=\; 2\pi r^3.$$

Das Flussintegral des Vektorfeldes f über die Kreisscheibe A ist:

$$\begin{aligned} \int_{s\in A} f(s)\bullet\mathrm{d}A \quad &= \quad -\int_D f\big(\Phi(\rho,\varphi)\big)\bullet\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Big)\,\mathrm{d}(\rho,\varphi) \\ &= \quad -\int_D \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}\,\mathrm{d}(\rho,\varphi) \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Anschauung: Das Feld f ist tangential zu A, daher $f(s)\bullet\mathrm{d}A = 0$.

Ausführliches Beispiel zum Satz von Gauß

Für die Berechnung des Flusses über B: Das Vektorfeld f steht überall senkrecht auf B und hat dort Länge r. Hieraus folgt das Flussintegral direkt und mühelos:

$$\int_B f \bullet \mathrm{d}B = \int_{s\in B} f(s) \bullet n_{\partial V}(s)\,|\mathrm{d}B| = \int_B r\,|\mathrm{d}B| = r \cdot \mathrm{vol}_2(B) = r \cdot 2\pi r^2$$

Bilanz zur Halbkugel V und ihrer Randfläche $S = \partial V = A \cup B$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(V) &= \int_V |\mathrm{d}V| = \frac{2\pi}{3} r^3, &\qquad \int_V \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}V &= 2\pi r^3,\\
\mathrm{vol}_2(A) &= \int_A |\mathrm{d}A| = \pi r^2, &\qquad \int_{s\in A} f(s) \bullet \mathrm{d}A &= 0,\\
\mathrm{vol}_2(B) &= \int_A |\mathrm{d}A| = 2\pi r^2, &\qquad \int_{s\in B} f(s) \bullet \mathrm{d}B &= 2\pi r^3.
\end{aligned}$$