Kapitel D

Integralsätze in der Ebene

Inhalt dieses Kapitels

Motivation

Unser Vorbild ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Für jede stetig differenzierbare Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $f=F'$ gilt

$$\text{HDI:}\qquad \int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

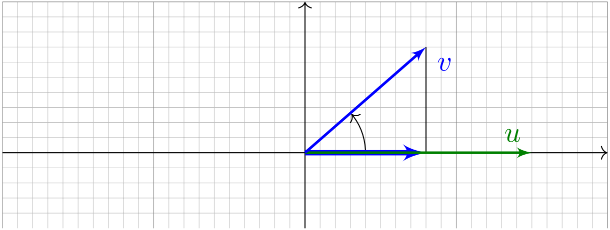
Das ist eine bemerkenswerte Gesetzmäßigkeit: Das Integral über das Intervall $[a,b]$ lässt sich entlang des Randes $\partial[a,b]=\{a,b\}$ bestimmen!

Der HDI lässt sich verallgemeinern von Dimension 1 auf 2 und 3 usw. Die so entstehenden **Integralsätze** von Green, Gauß und Stokes ermöglichen Berechnungen und nützliche Umformungen von Integralen.

Skalarprodukt in der Ebene

Für $u, v \in \mathbb{R}^2$ ist das Skalarprodukt gegeben durch

$$\boxed{u \bullet v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = |u| \cdot |v| \cdot \cos \sphericalangle(u, v).}$$



Das Skalarprodukt misst nur den tangentialen Anteil von v parallel zu u (bzw. von u parallel zu v). Zwei Extremfälle sind besonders wichtig:

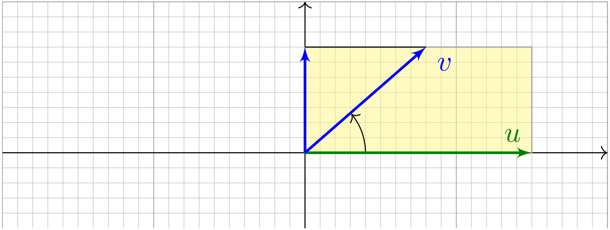
Stehen u und v **senkrecht** (geschrieben $u \perp v$), so gilt $u \bullet v = 0$.

Liegen u und v **parallel** (geschrieben $u \parallel v$), so gilt $u \bullet v = \pm |u| \cdot |v|$.

Kreuzprodukt in der Ebene

Für $u, v \in \mathbb{R}^2$ ist das **Kreuzprodukt** gegeben durch

$$\boxed{u \times v = u_1 v_2 - u_2 v_1 = |u| \cdot |v| \cdot \sin \sphericalangle(u, v).}$$



Das Kreuzprodukt misst nur den normalen Anteil von v senkrecht zu u (bzw. von u senkrecht zu v). Zwei Extremfälle sind besonders wichtig:

Liegen u und v **parallel** (geschrieben $u \parallel v$), so gilt $u \times v = 0$.

Stehen u und v **senkrecht** (geschrieben $u \perp v$), so gilt $u \times v = \pm|u| \cdot |v|$.

Vektorfelder, Divergenz, Rotation

Wir betrachten ebene **Vektorfelder**

$$f\ :\ \Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ :\ (x,y)\mapsto f(x,y)=\big(f_1(x,y),f_2(x,y)\big).$$

Wir definieren die **Quelldichte** oder **Divergenz** $\operatorname{div} f:\Omega\to\mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{div} f:=\partial_1 f_1+\partial_2 f_2=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Wir definieren die **Wirbeldichte** oder **Rotation** $\operatorname{rot} f:\Omega\to\mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{rot} f:=\partial_1 f_2-\partial_2 f_1=\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Wege und Kurven

Ein **Weg** im Raum $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}.$$

Die von γ parametrisierte **Kurve** ist die Menge aller Bildpunkte,

$$\Gamma = \gamma([a,b]) = \left\{ \gamma(t) \;\middle|\; a \le t \le b \right\} \quad \subset \quad \mathbb{R}^n.$$

⚠ Dieselbe Kurve lässt sich durch mehrere Wege beschreiben!

Differenzierbare und reguläre Wege

Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **stetig differenzierbar**, kurz C^1, wenn jede Koordinatenfunktion $\gamma_1, \dots, \gamma_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar ist.

Die Ableitung $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist dann der **Geschwindigkeitsvektor**

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \gamma_1(t+h) - \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t+h) - \gamma_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Die euklidische Norm $|\gamma'(t)| \in \mathbb{R}$ ist die absolute **Geschwindigkeit**.

Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **doppelpunktfrei**, wenn für $s \ne t$ stets $\gamma(s) \ne \gamma(t)$ gilt. Anders gesagt, die Abbildung γ ist **injektiv**.

Ein Weg γ heißt **regulär,** wenn γ injektiv ist und stetig diff'bar mit $\gamma'(t) \ne 0$ für alle $t \in [a,b]$. Seine Bildmenge Γ heißt dann **glatte Kurve**.

Ein **parametrisiertes Kurvenstück** (Γ, γ) ist eine glatte Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ mit einer Parametrisierung durch einen regulären Weg $\gamma : [a,b] \xrightarrow{\sim} \Gamma$.

Das Wegintegral

Definition D1E

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig diff'barer Weg mit Bildkurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.

Wir definieren das **Wegintegral** einer Funktion $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ durch

$$\boxed{\int_\gamma g \,|\mathrm{d}\gamma| := \int_{t=a}^{b} g(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t,}$$

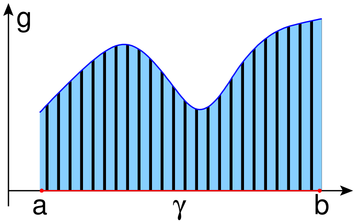
Zur Abkürzung schreiben wir hier $|\mathrm{d}\gamma| = |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

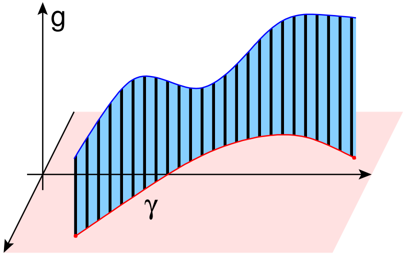
Beispiel: Für $g \equiv 1$ erhält man die **Weglänge** durch

$$\boxed{\ell(\gamma) = \int_\gamma |\mathrm{d}\gamma| := \int_{t=a}^{b} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.}$$

Das Wegintegral - geometrische Interpretation

Beispiel: Sei $\gamma : [a, b] \to [a, b]$, $\gamma(x) = x$, und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma| = \int_{[a,b]} g(x)\,\mathrm{d}x$ die Fläche unter g über $[a, b]$.



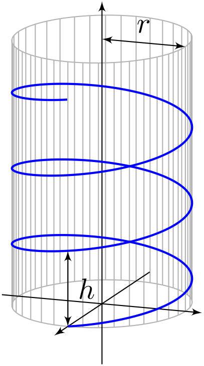


Im allgemeinen Fall $\gamma : [a, b] \to \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ und $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ gilt ebenso: Das Integral $\int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma|$ misst die Fläche unter g über dem Weg γ.

Man nennt $\mathrm{d}\gamma$ anschaulich ein „infinitesimales Wegelement“: Das Integral $\int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma|$ summiert die Beiträge $g\,|\mathrm{d}\gamma|$ über den Weg γ.

Vektorielles Wegelement (mit Richtung) $\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}s = \dots$.
Skalares Wegelement (nur Länge) $|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = |\mathrm{d}\gamma| = |\mathrm{d}s| = \dots$.

Beispiel: Schraubenlinie



Aufgabe: Bestimme die Länge der **Schraubenlinie**

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t), ht).$$

Lösung: Der Geschwindigkeitsvektor ist

$$\gamma'(t) = (-2\pi r\sin(2\pi t), 2\pi r\cos(2\pi t), h).$$

Seine Norm ist die absolute Geschwindigkeit

$$\left|\gamma'(t)\right| = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

Die Weglänge der Schraubenlinie (nach u Umläufen) ist demnach

$$\ell(\gamma|_{[0,u]}) = \int_{t=0}^{u} \left|\gamma'(t)\right| \,\mathrm{d}t = u\sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

Arbeitsintegral und Flussintegral

Definition D1F

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig diff'barer Weg mit Bildkurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.

Das **Arbeitsintegral** eines Vektorfeldes $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ ist

$$\boxed{\int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma := \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

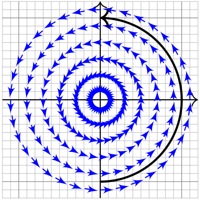
Speziell in der Ebene ($n = 2$) definieren wir zudem das **Flussintegral**

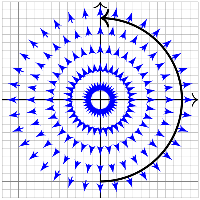
$$\boxed{\int_\gamma f \times \mathrm{d}\gamma := \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Zur Abkürzung schreiben wir hier $\mathrm{d}\gamma = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Geometrisch-physikalische Interpretation

Links: Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ können wir uns als Kraftfeld vorstellen. Der Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ beschreibt die Bewegung eines Teilchens. Die dabei geleistete Arbeit berechnen wir gemäß Arbeit $=$ Kraft $\bullet$ Weg. Das Skalarprodukt zählt nur den tangentialen Anteil in Wegrichtung.





Rechts: Das Vektorfeld f können wir uns auch als Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit vorstellen. In der Ebene ergibt das Flussintegral die über γ (von links nach rechts) fließende Flüssigkeitsmenge. Das Kreuzprodukt zählt den normalen Anteil senkrecht zur Wegrichtung.

Beispiel: Schraubenlinie

Aufgabe: Wir betrachten erneut die obige Schraubenlinie

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(2\pi t) \\ r\sin(2\pi t) \\ ht \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie längs γ das Arbeitsintegral des Wirbelfeldes

$$f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{x = y = 0\} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Schraubenlinie

Lösung: Wir berechnen das Arbeitsintegral von f längs γ:

$$\int_\Gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s \overset{\text{Param}}{=} \int_\gamma f(\gamma) \bullet \mathrm{d}\gamma \overset{\text{Param}}{=} \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t=a}^{b} \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t)/r \\ \cos(2\pi t)/r \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\pi r \sin(2\pi t) \\ 2\pi r \cos(2\pi t) \\ h \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t=a}^{b} 2\pi\,\mathrm{d}t = 2\pi(b-a)$$

Integration über glatte Kurven

Bisher haben wir über explizit gegebene Wege $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ integriert. Wir definieren nun das **Kurvenintegral** von $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ über eine durch γ parametrisierte Kurve

$$\int_\Gamma g\,|\mathrm{d}\Gamma| := \int_\gamma g\,|\mathrm{d}\gamma| \quad = \int_a^b g(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Für Arbeits- und Flussintegrale sei die Kurve Γ zusätzlich **orientiert**, d.h. Γ hat einen festgelegten Durchlaufsinn. Dann können wir diese Integrale für $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^2$ definieren durch

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma &:= \int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma &&= \int_a^b f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\mathrm{d}t. \\ \int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma &:= \int_\gamma f \times \mathrm{d}\gamma &&= \int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Orientierung von Kurven

Für jede glatte Kurve $\Gamma = \gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$ entspricht die Wahl einer **Orientierung** einer Durchlaufungsrichtung. Gleichwertig hierzu ist die Angabe von **Startpunkt** $p = \gamma(a)$ und **Zielpunkt** $q = \gamma(b)$. Wir sagen, dass eine Parametrisierung γ **positiv orientiert** ist, falls sie Γ im Sinne ihrer Orientierung durchläuft.

Zu jedem Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist der **umgekehrte Weg**

$$\bar\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad \text{definiert durch} \quad \bar\gamma(t) = \gamma(a+b-t).$$

Mit γ ist auch $\bar\gamma$ stetig bzw. stetig diff'bar, und $\ell(\bar\gamma) = \ell(\gamma)$. Parametrisiert γ die orientierte Kurve $(\Gamma, \circlearrowleft)$, so parametrisiert $\bar\gamma$ die umgekehrt orientierte Kurve $(\Gamma, \circlearrowright)$

Beispiel: Für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ist der umgekehrte Weg $\bar\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\bar\gamma = (\cos t, -\sin t)$.

Orientierung von Kurven

Aufgabe: Wie verändern sich Weg-, Arbeits- und Flussintegrale?

Lösung: Wegintegrale bleiben bei Wegumkehr unverändert:

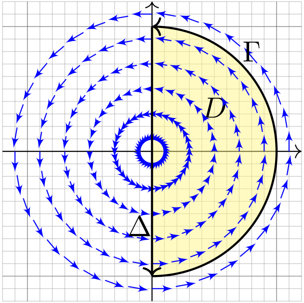
$$\boxed{\int_{\bar\gamma} g\,|\mathrm{d}\bar\gamma| = \int_{\gamma} g\,|\mathrm{d}\gamma|.}$$

Arbeits- und Flussintegrale hingegen ändern ihr Vorzeichen, da $\dot{\bar\gamma}(t) = -\dot\gamma(a+b-t)$. Also:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{\bar\gamma} f \bullet \mathrm{d}\bar\gamma &= -\int_{\gamma} f \bullet \mathrm{d}\gamma, \\ \int_{\bar\gamma} f \times \mathrm{d}\bar\gamma &= -\int_{\gamma} f \times \mathrm{d}\gamma. \end{aligned}}$$

⚠ Für Arbeits- und Flussintegrale muss Γ mit einer Orientierung versehen werden!

Beispiel: ein Arbeitsintegral



Aufgabe: Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma$ des Vektorfeldes $f(x,y) = (-y, x)$ längs des positiv orientierten Halbkreises Γ, des Durchmessers Δ, sowie $\int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$.

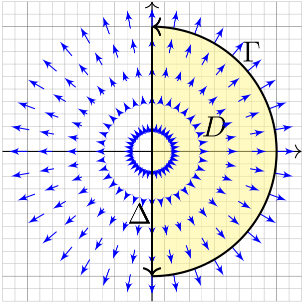
Lösung: Für Γ wählen wir die Parametrisierung $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$:

$$\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma = \int_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} f(\beta(t)) \bullet \beta'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \pi$$

Ebenso $\int_\Delta f \bullet \mathrm{d}\Delta = 0$. Es gilt $\operatorname{rot}(f) = 2$, also $\int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \pi$.

Jede andere Parametrisierung der Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ führt zu dem selben Ergebnis! Umgekehrte Orientierung kehrt das Vorzeichen um!

Beispiel: ein Flussintegral



Aufgabe: Berechnen Sie das Flussintegral $\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma$ des Vektorfeldes $f(x,y) = (x,y)$ über den positiv orientierten Halbkreis Γ und den Durchmesser Δ, sowie $\int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Lösung: Für Γ wählen wir wieder die Parametrisierung β:

$$\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma = \int_{t=-\pi/2}^{+\pi/2} f(\beta(t)) \times \beta'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \pi$$

Ebenso $\int_\Delta f \times \mathrm{d}\Delta = 0$. Es gilt $\operatorname{div}(f) = 2$, also $\int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \pi$.

Jede andere Parametrisierung der Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ führt zu dem selben Ergebnis! Umgekehrte Orientierung kehrt das Vorzeichen um!

Ausblick Integralsätze

Zusammenfassend finden wir

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{s\in\partial D} f(s)\bullet\mathrm{d}s\\ \int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{s\in\partial D} f(s)\times\mathrm{d}s.\end{aligned}}$$

Das zwei-dimensionales Integral über die kompakte Fläche $D \subset \mathbb{R}^2$ ist also gleich dem ein-dimensionalen Integral entlang der Randkurve $\Gamma = \partial D$.

Parametrisieren wir ∂D durch einen regulären Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, so kann man sich $\mathrm{d}s = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ als Vektor der Länge $|\mathrm{d}s|$ vorstellen, der tangential an γ liegt. Das Skalarprodukt $f(s)\bullet\mathrm{d}s = f(\gamma(t))\bullet\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ misst den tangentialen Anteil von f längs der Kurve, das Kreuzprodukt $f(s)\times\mathrm{d}s = f(\gamma(t))\times\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ den normalen Anteil senkrecht hierzu.

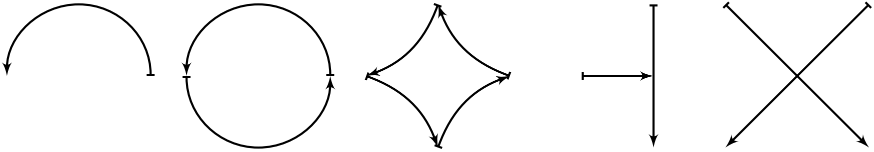
Diese Sätze gelten allgemein und insbesondere für Gebiete mit stückweisem Rand!

Stückweise glatte Kurven

Eine Teilmenge $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ heißt **stückweise glatte Kurve**, wenn es glatte Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ gibt sodass $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$.

Eine **Orientierung** von Γ besteht aus Orientierungen von $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$.

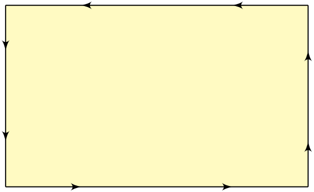
Zudem verlangen wir: Liegt ein $s \in \Gamma$ in mehreren Kurven Γ_k, dann nur in zweien und zwar einmal als Zielpunkt und einmal als Startpunkt.

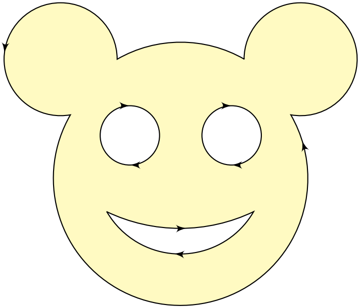


Innere Randpunkte treten also stets doppelt auf und heben sich auf. Die verbleibenden einzelnen Randpunkte bilden den **Rand** $\partial\Gamma$. Im Falle $\partial\Gamma = \emptyset$ nennt man die Kurve Γ **geschlossen**.

Kompakta mit stückweise glattem Rand

Typisches Beispiel und Modell ist ein Rechteck $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.





Definition D1G

$D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Kompaktum mit stückweise glattem Rand**, wenn gilt:

- D ist kompakt und der Rand ∂D ist eine stückweise glatte Kurve.
- In jedem regulären Randpunkt $s \in \partial D$ liegt das Innere von D auf der einen Seite von ∂D und das Äußere auf der anderen Seite.

Der Rand ist **positiv orientiert**, wenn D stets links von ∂D liegt.

Integration über stückweise glatte Kurven

Definition D1H (Kurvenintegrale)

Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine **stückweise glatte Kurve**, stückweise parametrisiert durch reguläre Wege $\gamma_1 : I_1 \to \Gamma_1, \dots, \gamma_k : I_k \to \Gamma_k$ wie oben erklärt. Dann können wir das **Kurvenintegral** von $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ definieren durch

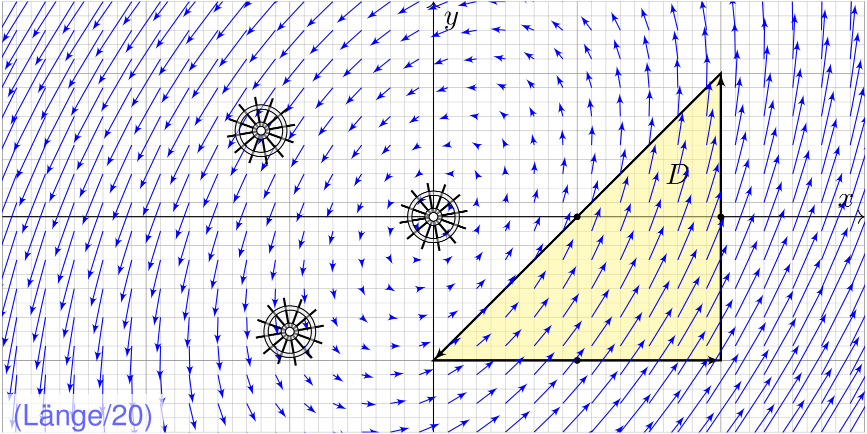
$$\boxed{\int_\Gamma g\,|\mathrm{d}\Gamma| := \int_{\gamma_1} g\,|\mathrm{d}\gamma_1| + \dots + \int_{\gamma_k} g\,|\mathrm{d}\gamma_k|.}$$

Für **Arbeits- und Flussintegral** sei die Kurve Γ zusätzlich **orientiert**. Dann können wir diese Integrale für $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definieren durch

$$\boxed{\begin{aligned} \int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma &:= \int_{\gamma_1} f \bullet \mathrm{d}\gamma_1 + \dots + \int_{\gamma_k} f \bullet \mathrm{d}\gamma_k, \\ \int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma &:= \int_{\gamma_1} f \times \mathrm{d}\gamma_1 + \dots + \int_{\gamma_k} f \times \mathrm{d}\gamma_k. \end{aligned}}$$

⚠ Dies ist wohldefiniert, das heißt, das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Unterteilung von Γ und der Parametrisierungen $\gamma_1 \dots, \gamma_k$.

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie das Vektorfeld $f(x,y) = (x-2y, 3x-y)$.



(2) Berechnen Sie $\int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s$ und $\int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$ für das Dreieck D.

Ebene Vektorfelder und ihre Wirbeldichte

Lösung: Die Kurve ∂D ist polygonal und das Vektorfeld f linear in x, y. In diesem Spezialfall können wir das **Arbeitsintegral** summieren:

$$\int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \sum_k f(s_k) \bullet t_k \, |\Gamma_k| \quad = \quad 10$$

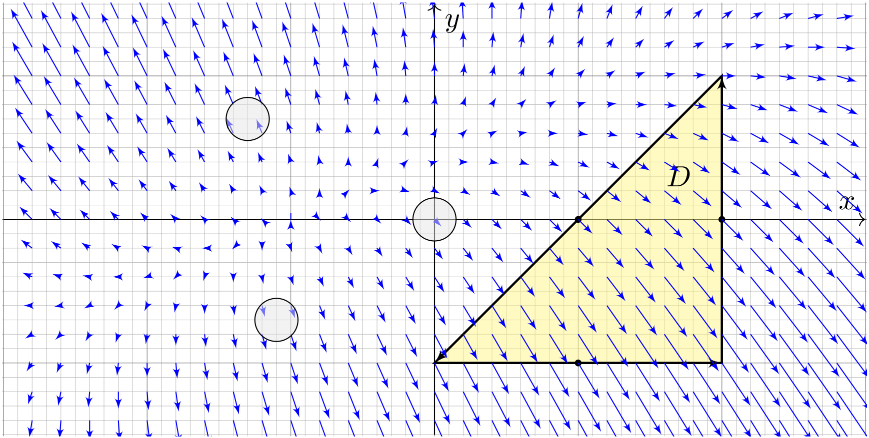
	Schwerpunkt s_k	Vektor $f(s_k)$	Tangente t_k	Länge $|\Gamma_k|$	Arbeit
Γ_1	$(1, -1)$	$(3, 4)$	$(1, 0)$	2	6
Γ_2	$(2, 0)$	$(2, 6)$	$(0, 1)$	2	12
Γ_3	$(1, 0)$	$(1, 3)$	$(-1, -1)/\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	-8

Die **Wirbeldichte** $\mathrm{rot}(f)$ und die **Wirbelstärke** auf D sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(f) &= \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 &&= 5 \\ \int_D \mathrm{rot}(f) \, \mathrm{d}(x, y) &= 5 \, \mathrm{vol}_2(D) &&= 10 \end{aligned}$$

Ebene Vektorfelder und ihre Quelldichte

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie das Feld $f(x,y) = (x-y+1, 3y-x-1)$.



(2) Berechnen Sie $\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s$ und $\int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$ für das Dreieck D.

Ebene Vektorfelder und ihre Quelldichte

Lösung: Die Kurve ∂D ist polygonal und das Vektorfeld f affin-linear. In diesem Spezialfall können wir das **Flussintegral** summieren:

$$\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = \sum_k f(s_k) \bullet n_k \, |\Gamma_k| \quad = \quad 8$$

	Schwerpunkt s_k	Vektor $f(s_k)$	Normale n_k	Länge $\lvert\Gamma_k\rvert$	Fluss
Γ_1	$(1, -1)$	$(3, -5)$	$(0, -1)$	2	10
Γ_2	$(2, 0)$	$(3, -3)$	$(1, 0)$	2	6
Γ_3	$(1, 0)$	$(2, -2)$	$(-1, 1)/\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	-8

Die **Quelldichte** $\operatorname{div}(f)$ und die **Quellstärke** auf D sind:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f) &= \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 &&= 4 \\
\int_D \operatorname{div}(f) \, \mathrm{d}(x, y) &= 4 \operatorname{vol}_2(D) &&= 8
\end{aligned}$$

Kurvenintegrale und Integralsätze in der Ebene

Kurven $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametrisieren wir (stückweise C^1) durch $\gamma : [a, b] \to \Gamma$.
Am Punkt $s = \gamma(t)$ heftet das infinitesimale Wegelement $\mathrm{d}s = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

Kurvenlänge: $$\int_\Gamma |\mathrm{d}\Gamma| = \int_{s\in\Gamma} |\mathrm{d}s| := \int_{t=a}^{b} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Arbeitsintegral: $$\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma = \int_{s\in\Gamma} f(s) \bullet \mathrm{d}s := \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Flussintegral: $$\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma = \int_{s\in\Gamma} f(s) \times \mathrm{d}s := \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Fläche mit stückw. glatter Randkurve ∂D.
Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^2$ gilt dann

Satz von Green: $$\int_{s\in\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y),$$

Satz von Gauß: $$\int_{s\in\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s = \int_{(x,y)\in D} \operatorname{div} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y).$$

Der Integralsatz von Green

Für $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise glattem Rand ∂D besagt Green:

$$\boxed{\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{s\in\partial D} f(s)\bullet\mathrm{d}s.}$$

Aufgabe: Rechnen Sie die Greensche Gleichung nach...

(1) Für $f = (f_1, 0)$ horizontal und jeden Normalbereich in y–Richtung

$$D = \left\{\, (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \,\right\}.$$

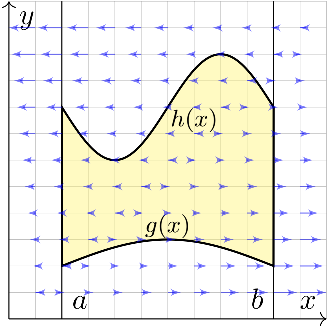
(2) Für $f = (0, f_2)$ vertikal und jeden Normalbereich in x–Richtung

$$D = \left\{\, (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le y \le b,\ g(y) \le x \le h(y) \,\right\}.$$

(3) Allgemein für $f = (f_1, f_2)$ und jeden Binormalbereich $D \subset \mathbb{R}^2$.

(4) Gilt Green für jedes Kompaktum $D \subset \mathbb{R}^2$, zerlegt wie in (3)?

Der Integralsatz von Green



Lösung:

(1) Zum Arbeitsintegral über ∂D tragen hier nur unterer und oberer Rand bei.

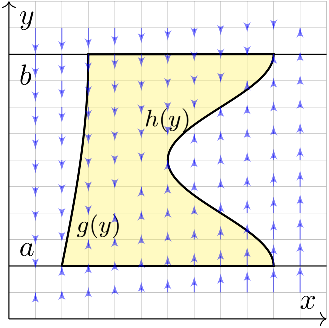
$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(t) = (t, g(t)),$$
$$\alpha'(t) = (1, g'(t)).$$

$$\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \beta(t) = (t, h(t)),$$
$$\beta'(t) = (1, h'(t)).$$

Für $f = (f_1, 0)$ folgt Green aus Fubini und dem HDI:

$$\begin{aligned}
\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &\overset{\text{Fub}}{=} \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{h(x)} -\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{HDI}}{=} \int_{x=a}^{b} f_1(x, g(x)) - f_1(x, h(x))\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \int_{\alpha} f \bullet \mathrm{d}\alpha - \int_{\beta} f \bullet \mathrm{d}\beta \overset{\text{Def}}{=} \int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Der Integralsatz von Green



(2) Zum Arbeitsintegral über ∂D tragen hier nur linker und rechter Rand bei.

$$\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^2,\qquad \alpha(t)=(g(t),t),$$
$$\alpha'(t)=(g'(t),1).$$

$$\beta:[a,b]\to\mathbb{R}^2,\qquad \beta(t)=(h(t),t),$$
$$\beta'(t)=(h'(t),1).$$

Für $f=(0,f_2)$ folgt Green aus Fubini und dem HDI:

$$\int_{(x,y)\in D}\operatorname{rot} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub}}{=} \int_{y=a}^{b}\int_{x=g(y)}^{h(y)}\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\overset{\text{HDI}}{=} \int_{y=a}^{b} f_2(h(y),y)-f_2(g(y),y)\,\mathrm{d}y$$
$$\overset{\text{Def}}{=} \int_\beta f\bullet\mathrm{d}\beta-\int_\alpha f\bullet\mathrm{d}\alpha \overset{\text{Def}}{=} \int_{\partial D} f(s)\bullet\mathrm{d}s$$

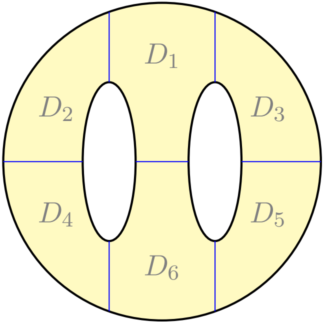
Der Integralsatz von Green

(3) Für Binormalbereiche folgt aus den Rechnungen (1) und (2):

$$\int_D \operatorname{rot}(f_1, f_2)\,\mathrm{d}(x,y) \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_D \operatorname{rot}(f_1, 0)\,\mathrm{d}(x,y) + \int_D \operatorname{rot}(0, f_2)\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$\stackrel{(1,2)}{=} \int_{\partial D} (f_1, 0) \bullet \mathrm{d}s + \int_{\partial D} (0, f_2) \bullet \mathrm{d}s \stackrel{\text{Lin}}{=} \int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s$$

(4) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand ∂D.



Wir zerlegen D in Binormalbereiche D_k:

$$\int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \sum_k \int_{D_k} \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$\stackrel{(3)}{=} \sum_k \int_{\partial D_k} f(s) \bullet \mathrm{d}s \stackrel{!}{=} \int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s$$

⚠ Arbeitsintegrale längs innerer Kanten sind gegenläufig und heben sich paarweise auf!

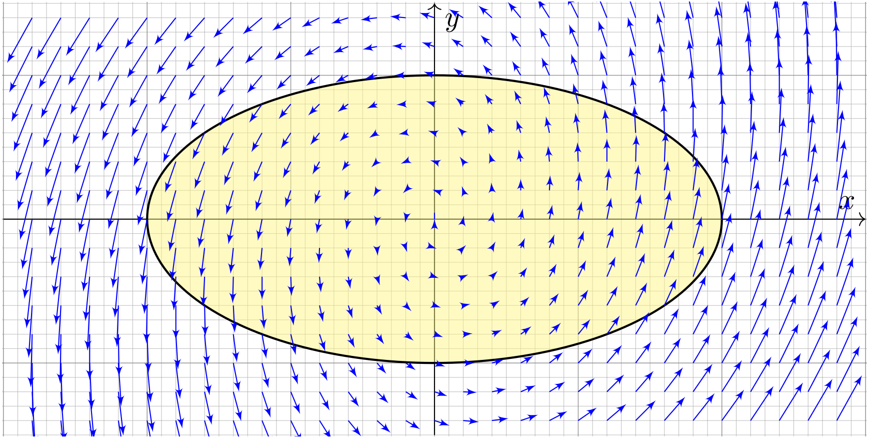
☺ Somit gilt der Satz von Green auch für D.

Anwendungsbeispiel

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie das ebene Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = (x - 3y, 5x + y)$$

sowie die Kurve $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 4 \}$. Berechnen Sie (2) das Flussintegral sowie (3) das Arbeitsintegral von f über Γ.



Anwendungsbeispiel

Lösung: Wir wählen eine Parametrisierung für die Ellipse Γ, etwa

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \Gamma, \quad \gamma(t) = (2\cos t, \sin t), \quad \gamma'(t) = (-2\sin t, \cos t).$$

Sie berandet $D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \le 4 \,\}$ mit $\operatorname{vol}_2(D) = 2\pi$.

(2) Für das Flussintegral von f über Γ nach außen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f \times \mathrm{d}\Gamma &\overset{\text{Param}}{=} \int_\gamma f \times \mathrm{d}\gamma \overset{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos t - 3\sin t \\ 10\cos t + \sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} 2\cos(t)^2 + 2\sin(t)^2 + 17\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = 4\pi
\end{aligned}$$

Leichter mit Gauß: Dank konstanter Divergenz $\operatorname{div}(f) = 2$ erhalten wir

$$\int_{\partial D} f(s) \times \mathrm{d}s \overset{\text{Gauß}}{=} \int_D \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = 2\operatorname{vol}_2(D) = 4\pi.$$

Anwendungsbeispiel

(3) Für das Arbeitsintegral von f längs Γ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma &\overset{\text{Param}}{=} \int_\gamma f \bullet \mathrm{d}\gamma \overset{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Param}}{=} \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos t - 3\sin t \\ 10\cos t + \sin t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} 6\sin(t)^2 + 10\cos(t)^2 - 3\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = 16\pi
\end{aligned}$$

Leichter mit Green: Dank konstanter Rotation $\mathrm{rot}(f) = 8$ erhalten wir

$$\int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s \overset{\text{Green}}{=} \int_D \mathrm{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = 8\,\mathrm{vol}_2(D) = 16\pi.$$

Flächeninhalt aus Randkurve bestimmen

Satz D2A

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum. Der Rand ∂D sei parametrisiert durch eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Dann gilt:

$$\boxed{\operatorname{vol}_2(D) = \int_a^b x'(t) y(t) dt = \int_a^b x(t) y'(t) dt}$$

Beweis: Man betrachtet die ebenen Vektorfelder $f(x,y) = (0,x)$ und $g(x,y) = (-y,0)$. Man findet $\operatorname{rot}(f) = 1$ und $\operatorname{rot}(g) = 1$

Dank des Satzes von Green folgt:

$$\operatorname{vol}_2(D) = \int_D \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial D} f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{t=a}^b x(t)\,y'(t)\,\mathrm{d}t$$

Die zweite Formel folgt aus der analogen Rechnung für das Vektorfeld g.