Kapitel C

Integrale und Grenzwerte

Inhalt dieses Kapitels

Wann vertauschen Integral und Limes?

Integration einer Reihe: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_\Omega \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] \mathrm{d}x \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \right] \quad ?$$

Stetigkeit des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

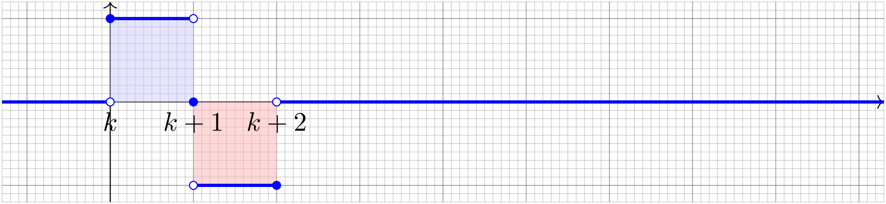
$$\int_\Omega \left[\lim_{k\to\infty} f_k(x) \right] \mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{k\to\infty} \left[\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \right] \quad ?$$

Ableitung des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

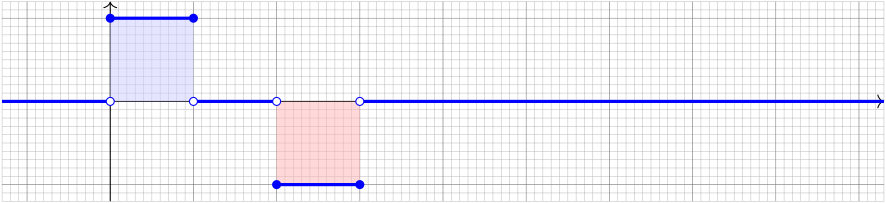
$$\int_Y \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \right] \mathrm{d}y \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \quad ?$$

Gegenbeispiel zu Reihen

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k = \mathbf{I}_{[k,k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2]}$.



Offensichtlich gilt $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$.



Auch für $f_0 + f_1$ ist das Integral Null.

Gegenbeispiel zu Reihen

Aufgabe: Man berechne und vergleiche:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right] \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right]\mathrm{d}x$$

Lösung: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sehen wir :

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad\Longrightarrow\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right] = 0$$

Andererseits kennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teleskopsumme

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\\
&= \big[\mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \mathbf{I}_{[1,2]}(x)\big] + \big[\mathbf{I}_{[1,2]}(x) - \mathbf{I}_{[2,3]}(x)\big] + \dots\\
&\qquad\qquad \dots + \big[\mathbf{I}_{[n+1,n+2]}(x) - \mathbf{I}_{[n+1,n+2]}(x)\big]\\
&= \mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \mathbf{I}_{[n+1,n+2]}(x)
\end{aligned}$$

Daraus folgt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \big(\mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \mathbf{I}_{[n+1,n+2]}(x)\big)$$

$$= \mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}_{[n+1,n+2]}(x) \; = \; \mathbf{I}_{[0,1]}(x)$$

und damit

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,1]}(x) = 1$$

Vertauschen von Integral und Reihe

Satz C1A

Sei $f_0, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{C}$ *eine Folge messbarer Funktionen. Dann gilt*

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega |f_k|.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *in fast allen Punkten* $x \in \Omega$ *absolut konvergent, zudem über* Ω *absolut integrierbar, und es gilt*

$$\boxed{\int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega f_k.}$$

zum Beweis:

1. man zeigt die Aussage für Funktionen $f_k : \Omega \to [0, \infty]$
2. im Allgemeinen nutzt man die Zerlegung $f_k = f_k^+ - f_k^-$

zum Beweis von (1)

Seien $f_k : \Omega \to [0, \infty]$. Dank Linearität des Integrals gilt

$$I_n := \int_\Omega \sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega f_k \qquad .$$

Wir haben monotone Konvergenz $\sum_{k=0}^{n} f_k \nearrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, also

$$I_n = \int_\Omega \sum_{k=0}^{n} f_k \quad \nearrow \quad \int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} f_k =: A.$$

Es gilt $\int_\Omega f_k \geq 0$. Hieraus folgt die monotone Konvergenz der Reihe

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega f_k \quad \nearrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega f_k =: B.$$

Die Folge I_n kann nur einen Grenzwert haben! Wir folgern $A = B$:

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega f_k$$

Aufgabe: (1) Integrieren Sie die auf $]-\rho,\rho[$ konvergente Potenzreihe

$$f :]-\rho,\rho[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

(2) Konkretes Beispiel: Entwickeln und integrieren Sie $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Lösung: Für $0 \le x \le \rho$ vertauschen Integral und Reihe:

$$F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{x} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right] \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{t=0}^{x} a_k t^k \,\mathrm{d}t\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \qquad = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k$$

⚠ Die Vertauschung gilt hier dank absoluter Konvergenz auf $[0,x]$.

(2) Konkretes Beispiel:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}.$$

Fazit: Wann vertauschen Integral und Reihe?

Für $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ möchten wir Integral und Reihe vertauschen:

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right] \mathrm{d}x \quad \overset{?}{=} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega} f_k(x) \, \mathrm{d}x \right]$$

Hierfür haben wir folgende hinreichende Kriterien:

- Gleichheit gilt für $f_k \geq 0$: monotone Konvergenz!
- Gleichheit gilt für $\int \sum |f_k| < \infty$ bzw. für $\sum \int |f_k| < \infty$,
- insbesondere für konvergente Potenzreihen, $f_k(x) = a_k x^k$.

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge

Frage: Unter welchen Voraussetzungen gilt $\int_\Omega f_k \to \int_\Omega f$, falls $f_k \to f$?

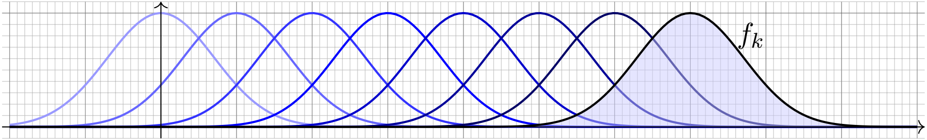
Definition C2A

Eine Funktionenfolge $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ **konvergiert punktweise** für $k \to \infty$ gegen die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, wenn $f_k(x) \to f(x)$ für jedes $x \in \Omega$ gilt

Bemerkungen:

- Stetigkeit und Integrierbarkeit können im Grenzwert verloren gehen!
- Messbarkeit bleibt erhalten: Sind alle f_k messbar und konvergiert $f_k \to f$ punktweise, dann ist auch die Grenzfunktion f messbar.
- Aus monotoner Konvergenz $0 \le f_k \nearrow f$ folgt stets $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$.
- Im Allgemeinen folgt aber aus $f_k \to f$ noch nicht $\int_\Omega f_k \to \int_\Omega f$.

Gegenbeispiel zum Grenzwert



Aufgabe: Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{-(x-k)^2}$.

(1) Konvergiert f_k punktweise? Gegen welche Grenzfunktion f?

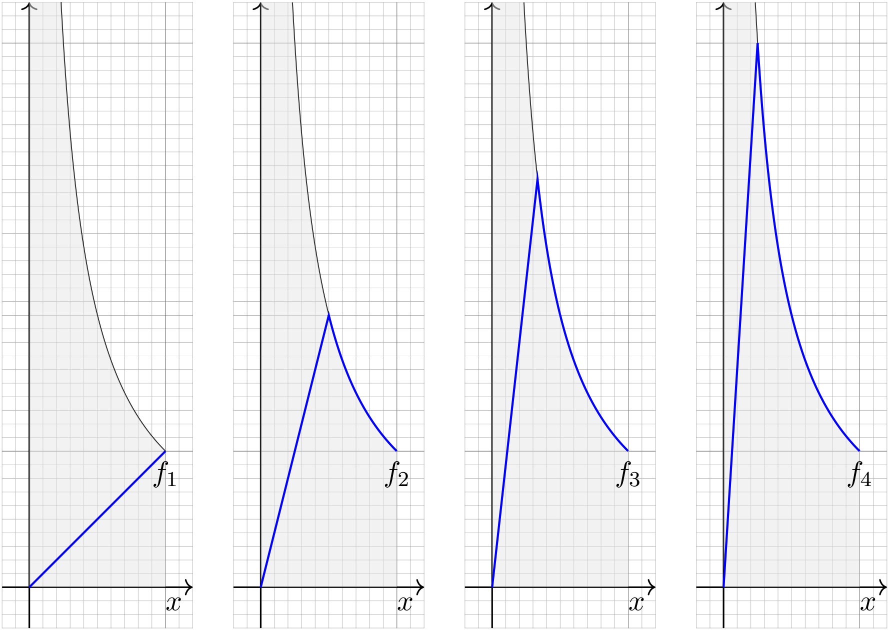
(2) Vergleichen Sie $\int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$ und $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung: (1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $k \to \infty$ gilt $f_k(x) \to 0$. (2) Daher gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}x = 0 \quad \neq \quad \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

⚠ Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Gegenbeispiel zu Integrierbarkeit und Stetigkeit



Gegenbeispiel zu Integrierbarkeit und Stetigkeit

Aufgabe: Skizzieren Sie für $k = 1, 2, 3, \dots$ die Funktion

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_k(x) = \begin{cases} k^2 x & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{k}, \\ \frac{1}{x} & \text{für } \frac{1}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$

(1) Bestimmen Sie die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$.

(2) Ist jede Funktion f_k stetig? integrierbar? Ist f stetig? integrierbar?

Lösung: (1) Für festes $x \in [0,1]$ finden wir den Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{für } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(2) Jede der Funktionen $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig und somit integrierbar. Die Grenzfunktion f hingegen ist weder stetig noch (absolut) int.bar.

⚠ Sind alle Funktionen f_k stetig bzw. integrierbar, so kann man nicht auf die Stetigkeit bzw. Integrierbarkeit der Grenzfunktion f schließen!

⚠ Selbst wenn alle f_k und die Grenzfunktion f integrierbar sind, wie oben, gilt im Allgemeinen nicht die Konvergenz der Integralfolge!

Der Satz von der majorisierten Konvergenz

Unter welchen Vorsichtsmaßnahmen gilt folgende nützliche Formel?

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

Satz C2D (Lebesgue 1901)

Sei $f_0, f_1, f_2, \dots : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n \to f$.
*Existiert für die f_n eine **integrierbare Majorante** $h : \Omega \to \mathbb{R}$, d.h.*

$$|f_n| \le h, \qquad \int_\Omega h < +\infty \qquad \text{für alle } n,$$

dann ist f (absolut) integrierbar, und es gilt $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$.

Beispiel: Ist $\operatorname{vol}(\Omega) < +\infty$ und $|f_n| \le M \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so definiert $h(x) \equiv M$ eine integrierbare Majorante.

⚠ Die punktweise Konvergenz allein genügt nicht. Die Majorante verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet!

Folgerung: Vertauschbarkeit Integral und Reihe

Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $g_k : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty |g_k| = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega |g_k| < \infty.$$

Dank majorisierter Konvergenz erhalten wir erneut

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty g_k = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega g_k.$$

Beweis: Für $n \to \infty$ gilt (fast überall) punktweise Konvergenz

$$f_n = \sum_{k=0}^n g_k \quad \to \quad f = \sum_{k=0}^\infty g_k.$$

Zudem ist $h = \sum_{k=0}^\infty |g_k|$ eine Majorante für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und somit

$$\int_\Omega f_n = \int_\Omega \sum_{k=0}^n g_k \quad \to \quad \int_\Omega f = \int_\Omega \sum_{k=0}^\infty g_k.$$

Fazit: Wann vertauschen Integral und Limes?

Für $f_n \to f$ möchten wir Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \stackrel{?}{=} \quad \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

Hierfür haben wir folgende hinreichende Kriterien:

- Gleichheit gilt bei monotoner Konvergenz $0 \le f_n \nearrow f$,
- bei majorisierter Konvergenz $f_n \to f$ mit $|f_n| \le h$ und $\int_\Omega h < \infty$,
- insbesondere, wenn $\operatorname{vol}(\Omega) < \infty$ und $|f_n| \le M \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

zur Erinnerung: Stetigkeit

Definition C2E

Eine Abbildung $F : X \to Y$ heißt **stetig** in $f \in X$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F(\lim_{n\to\infty} f_n) = F(f)$$

für jede gegen f konvergente Folge (f_n).

Parameterabhängige Integrale

Parameterabhängige Integrale

Ein **parameterabhängiges Integral** ist von der Form

$$F(x) = \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{mit} \quad f : X \times Y \to \mathbb{C}.$$

Beispiele: (1) Wir kennen dies bereits von **Doppelintegralen**

$$\int_X \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_X F(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Das **Newton–Potential** einer Massenverteilung $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^3} \frac{\varrho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y.$$

(3) Die **Fourier–Transformierte** einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Frage: Ist F stetig? diff'bar? Darf man ∂_x unters Integral ziehen?

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \overset{?}{=} \quad \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Stetigkeit von Parameterintegralen

Wir wollen Stetigkeit nutzen und Grenzwerte unters Integral ziehen:

$$\lim_{x\to x_0} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \overset{?}{=} \quad \int_Y \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$$

Satz C3A

Es sei für $X \subset \mathbb{R}^p$, $Y \subset \mathbb{R}^q$, $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$F : X \to \mathbb{C} \quad \textit{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

definiert. Ist $f(x,y)$ stetig in x und über Y majorisiert integrierbar, d.h. $|f(x,y)| \le h(y)$, für alle x und h integrierbar, dann ist F stetig, d.h. wir dürfen den Grenzwert unter das Integral ziehen:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad = \int_Y \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y f(x_0,y)\,\mathrm{d}y.}$$

Stetigkeit von Parameterintegralen: Beweis

Nachrechnen: Für $x \to x_0$ gilt dank majorisierter Konvergenz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} F(x) &= \lim_{x \to x_0} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \stackrel{(1)}{=} \int_Y \lim_{x \to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_Y f(x_0,y)\,\mathrm{d}y = F(x_0) \end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt die Stetigkeit von F in x_0.

Für den Beweis hat man benötigt:

- Die Stetigkeit der Abb. $f(-,y) : X \to \mathbb{C} : x \mapsto f(x,y)$ in x_0, $\forall y \in Y$
- Die majorisierte Integrierbarkeit der Abbildung $f(x,-) : Y \to \mathbb{C} : y \mapsto f(x,y)$ für alle $x \in X$.

Bemerkung: Diese Bedingungen sind automatisch erfüllt, wenn $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ stetig und Y kompakt ist (d.h. beschr. und abg. in $\mathbb{R}^n$).

☺ Die Kompaktheit von Y bzw. die integrierbare Majorante verhindert, dass beim Grenzübergang Masse nach Unendlich verschwindet!

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Stetigkeit gilt nicht immer!

Ableitung von Parameterintegralen

Wir wollen differenzieren und die Ableitung unters Integral ziehen:

$$F(x) = \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) \stackrel{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Satz C3B

Es sei für $X \subset \mathbb{R}^p$ offen, $Y \subset \mathbb{R}^q$, $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$F : X \to \mathbb{C} \quad \textit{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

definiert. Ist $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)$ stetig in x und über Y majorisiert integrierbar, d.h. $|f(x,y)| \le h(y)$, für alle x und h integrierbar (z.B. für Y kompakt), dann ist F stetig differenzierbar, und wir dürfen wir die Ableitung unter das Integral ziehen:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \underset{!}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y.}$$

Ableitung von Parameterintegralen: Beweis

Nachrechnen: Zur Vereinfachung sei $p = 1$ und $x \in [a,b] \subset X$.

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &\overset{\text{Lin}}{=} \int_Y f(x,y) - f(a,y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{HDI}}{=} \int_Y \int_{t=a}^{x} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Fub}}{=} \int_{[a,x]\times Y} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}(t,y) \overset{\text{Fub}}{=} \int_{t=a}^{x} \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Nochmals dank HDI und Stetigkeit von $\partial_1 f$ folgt hieraus

$$F'(x) \overset{\text{HDI}}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

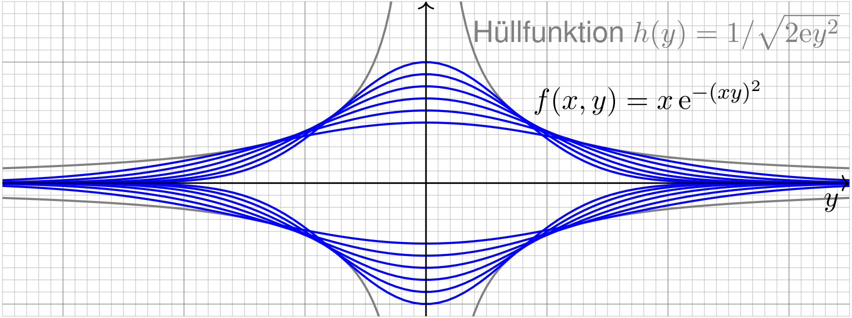
Beispiele und Anwendungen

Stetigkeit und Ableitung des Integrals

Aufgabe: Man skizziere und berechne und vergleiche:

$$\lim_{x\to 0}\left[\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y\right] \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{x\to 0}\left[x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\right]\mathrm{d}y$$

Lösung: (1) Skizze des Integranden $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}$:



(2) Zur Integration substituieren wir $u = xy$ und $\mathrm{d}u = |x|\mathrm{d}y$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y &&= \operatorname{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(xy)^2} |x|\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Trafo}}{=} \operatorname{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u &&\overset{\text{Gauß}}{=} \operatorname{sign}(x)\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Obwohl der Integrand $f(x,y)$ stetig ist, ist das Integral $F(x)$ unstetig!

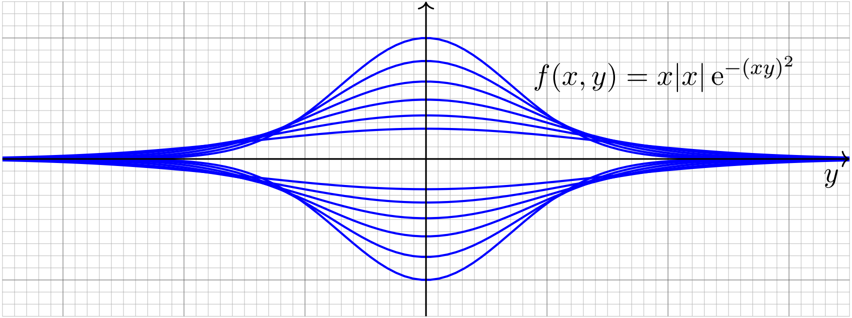
$$\lim_{x \searrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y \right] = \lim_{x \searrow 0} F(x) = \sqrt{\pi}, \quad \text{aber}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{x \searrow 0} \left[x\,\mathrm{e}^{-(xy)^2} \right] \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}y = 0.$$

Aufgabe: Man skizziere und berechne und vergleiche:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{\mathbb{R}} x|x|\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y\right] \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\left[x|x|\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\right]\mathrm{d}y \quad \text{in } x=0$$

Lösung: (1) Skizze des Integranden $f(x,y) = x|x|\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}$:



Stetigkeit und Ableitung des Integrals

(2) Die Funktion $f(x,y) = x|x|\,g(xy)$ mit $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$ ist stetig diff'bar.
Das Integral berechnen wir dank Substitution $u = xy$ und $\mathrm{d}u = |x|\mathrm{d}y$:

$$F(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_{\mathbb{R}} x|x|\,g(xy)\,\mathrm{d}y \;\overset{\text{Trafo}}{=}\; x\int_{\mathbb{R}} g(u)\,\mathrm{d}u \;\overset{\text{Gauß}}{=}\; x\sqrt{\pi}$$

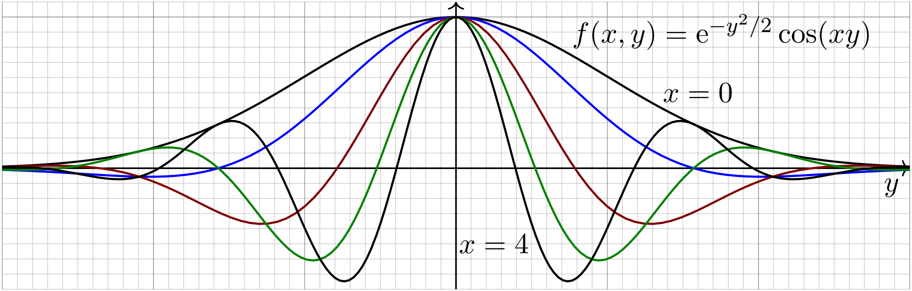
Ableiten des Integranden hingegen liefert:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2|x|\,g(xy) + x|x|\,y\,g'(xy)$$

Das verschwindet für $x = 0$. Wir erhalten also

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{\mathbb{R}} x|x|\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\,\mathrm{d}y\right]_{x=0} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\Big[x\sqrt{\pi}\Big]_{x=0} \;=\; \sqrt{\pi}, \quad \text{aber}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\Big[x|x|\,\mathrm{e}^{-(xy)^2}\Big]_{x=0}\mathrm{d}y \;=\; \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}y \;=\; 0.$$



Aufgabe:

(1) Erlaubt $\partial_x f(x,y)$ eine integrierbare Majorante $h(y)$?

(2) Berechnen Sie das parameterabhängige Integral

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\cos(xy)\,\mathrm{d}y.$$

Fourier–Transformierte der Normalverteilung

Lösung: (1) Ableitung und integrierbare Majorante:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \;=\; \left|\mathrm{e}^{-y^2/2}\cdot(-y)\sin(xy)\right| \;\le\; \mathrm{e}^{-y^2/2}|y| \;=:\; h(y)$$

(2) Dank Vorbereitung (1) dürfen wir ∂_x unters Integral ziehen:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\cos(xy)\,\mathrm{d}y \overset{(1)}{=} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}(-y)\sin(xy)\,\mathrm{d}y \\ &= \Big[\mathrm{e}^{-y^2/2}\sin(xy)\Big]_{y=-\infty}^{+\infty} - \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}x\cos(xy)\,\mathrm{d}y = -xF(x) \end{aligned}$$

Demnach genügt $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ der Differentialgleichung $F'(x) = -xF(x)$.
Wir trennen die Variablen gemäß $F'(x)/F(x) = -x$
und integrieren zu $\ln F(x) - \ln F(0) = -x^2/2$.
Wir erhalten die Lösung $F(x) = F(0)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.
Mit $F(0) = \sqrt{2\pi}$ folgt $F(x) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Berechnung der Gamma–Funktion

Aufgabe: (1) Für $t > 0$ berechne man das Integral

$$\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x.$$

(2) Durch Ableiten unter dem Integral berechne man

$$\int_{x=0}^{\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x.$$

(3) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung ∂_t unters Integral ziehen?

Lösung: (1) Integriert wird hier über x bei festem Parameter t:

$$\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x \quad = \quad \Big[-\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{t}\Big]_{x=0}^{\infty} \quad = \quad \frac{1}{t}.$$

Berechnung der Gamma–Funktion

(2) Wenn wir ∂_t unters Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\int_{x=0}^{\infty} -x\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2},$$

$$\int_{x=0}^{\infty} -x^2\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t^3} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{t^3},$$

$$\int_{x=0}^{\infty} -x^3\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = -\frac{3!}{t^4} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{3!}{t^4}.$$

Per Induktion erhalten wir mühelos die gewünschte Antwort:

$$\boxed{\int_{x=0}^{\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{t^{n+1}}, \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = n!}$$

(3) Für $0 < a < b$ finden wir eine von $t \in [a, b]$ unabhängige Majorante:

$$\left|-x^n\,\mathrm{e}^{-tx}\right| \le x^n\,\mathrm{e}^{-ax} =: h(x) \le \frac{\mathrm{const}}{x^2} \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

Momente der Normalverteilung

Aufgabe: (1) Für $t > 0$ berechne man das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x.$$

(2) Durch Ableiten unter dem Integral berechne man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k} \,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x.$$

(3) Warum dürfen wir in (2) die Ableitung ∂_t unters Integral ziehen?

Lösung: (1) Wir substituieren durch $u = \sqrt{t}\,x$ und $\mathrm{d}u = \sqrt{t}\,\mathrm{d}x$, also

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2/2} \,\mathrm{d}u \quad = \quad t^{-\frac{1}{2}}.$$

(2) Wenn wir ∂_t unters Integral ziehen dürfen, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} -\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^2\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = t^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} -\frac{x^4}{2}\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^4\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 3\cdot t^{-\frac{5}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} -\frac{x^6}{2}\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{3\cdot 5}{2}t^{-\frac{7}{2}} \quad \text{also} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^6\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 3\cdot 5\cdot t^{-\frac{7}{2}}.$$

Per Induktion erhalten wir mühelos die ersehnte Antwort:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} x^{2k}\,\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\cdot t^{-\frac{2k+1}{2}}\sqrt{2\pi}.}$$

(3) Für $0 < a < b$ finden wir eine von $t \in [a,b]$ unabhängige Majorante:

$$\left|-x^{2n}\,\mathrm{e}^{-tx^2/2}\right| \le x^{2n}\,\mathrm{e}^{-ax^2/2} =: h(x) \le \frac{\text{const}}{x^2} \quad \text{also} \quad \int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$