Kapitel L

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Inhalt dieses Kapitels

Überblick: Gewöhnliche und partielle DG

Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung für eine Funktion $y(x)$, in der auch ihre Ableitungen $y', y'', \dots$ auftreten. Wir unterscheiden:

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	gewöhnliche Differentialgleichung in $x, y, y', y'' \dots$
$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$	System gewöhnlicher DG in $x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots$
$y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$	partielle Differentialgleichung in $x_1, \dots, x_m, y, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \dots$
$y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$	System partieller DG in $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \dots$

Dies wird häufig genutzt und ist eine mathematische Grundtechnik für Naturwissenschaftler und Ingenieure. Prominente Beispiele:

- Newton $\ddot{q} = f(q)$, Hamilton $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$, $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$.
- Strömungsgleichung, Cauchy–Riemann $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_x v = -\partial_y u$.
- Wärmeleitung, Wellen-, Potential-, Maxwell–Gleichungen, etc.

Zu partiellen Differentialgleichungen kommen wir später ab Kapitel Q.

Wie löst man Differentialgleichungen?

Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen (DG, engl. ODE):

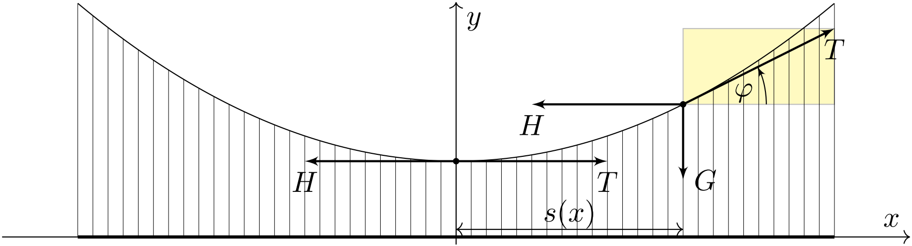
1. Erster Ordnung: $y'(x) = y(x)$
2. Zweiter Ordnung: $y''(x) + 4y(x) = 0$
3. Dritter Ordnung: $y'''(x)\, y'(x) - y''(x)^2 + (1 + x^2)\, y(x)^2 = 0$

Wie sehen mögliche Lösungen in diesen Beispielen aus?

1. $y(x) = 0$, oder $y(x) = \mathrm{e}^x$, allgemein $y(x) = a\,\mathrm{e}^x$ mit $a \in \mathbb{R}$. Probe!
2. $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, allgemein $y(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$. Probe!
3. Eine mögliche Lösung ist $y(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$. Machen Sie die Probe!

Beispiel aus der Mechanik: Hängebrücke

Aufgabe: Eine Hängebrücke trägt eine schwere Fahrbahn der Dichte ϱ mit leichten Kabeln. Bestimmen Sie deren Verlauf als Funktionsgraph.



Beispiel aus der Mechanik: Hängebrücke

Lösung: Wir suchen die Funktion $y(x)$. Wie in der Skizze haben wir die Steigung $y'(x) = \tan\varphi(x)$ und die Fahrbahnlänge $s(x) = x - x_0$.

In jedem Punkt $(x, y(x))$ des Kabels herrscht Kräftegleichgewicht:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -g\varrho\, s(x) \end{pmatrix}}_{\text{Gewichtskraft, vertikal}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -H \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{horizontal}} + \underbrace{\begin{pmatrix} T\cos\varphi(x) \\ T\sin\varphi(x) \end{pmatrix}}_{\text{tangential}} = 0$$

Hieraus folgt $H = T\cos\varphi(x)$ und $g\varrho\, s(x) = T\sin\varphi(x)$, also

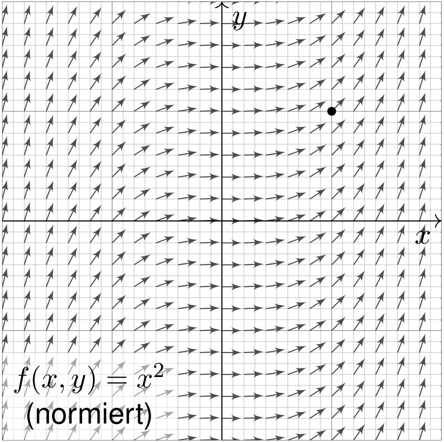
$$y'(x) = \tan\varphi(x) = \frac{\sin\varphi(x)}{\cos\varphi(x)} = \frac{g\varrho}{H}\, s(x) = 2a(x - x_0).$$

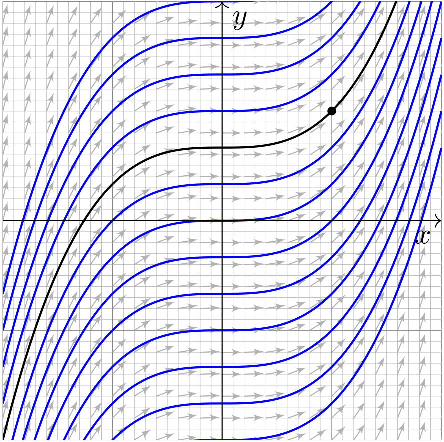
🙂 Als Lösungen dieser DG $y'(x) = 2a(x - x_0)$ finden wir die Parabeln

$$y(x) = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Richtungsfeld und Lösungsschar

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ erfüllen $y'(x) = x^2$? zudem $y(1) = 1$? Was ist jeweils das maximale Definitionsintervall I?





Separation der Variablen und Integration

Lösung: Wir können direkt integrieren:

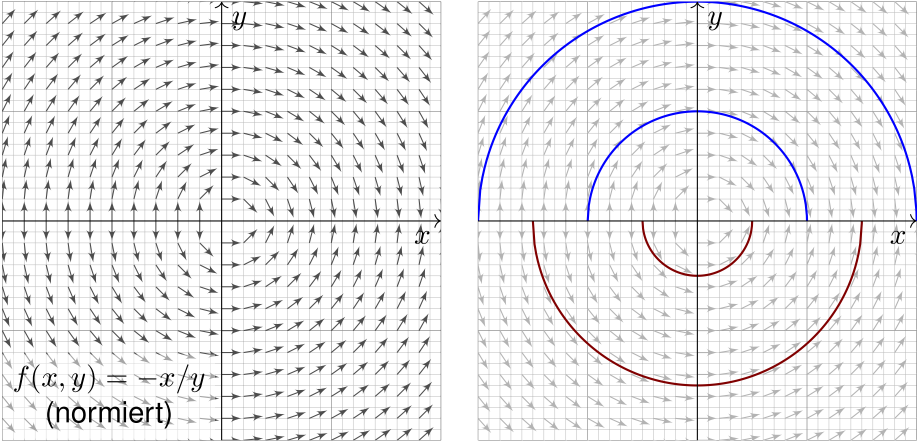
$$\begin{aligned} y'(x) &= x^2 \\ \Longrightarrow \quad \int y'(x)\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{const} \\ \Longrightarrow \quad y(x) &= x^3/3 + c \end{aligned}$$

🙂 Das AWP $y'(x) = x^2$ mit $y(1) = 1$ wird einzig gelöst durch

$$y \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto y(x) = (x^3 + 2)/3.$$

Richtungsfeld und Lösungsschar

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ erfüllen $y'(x) = -x/y(x)$?
Finden Sie zu jeder Lösung das maximale Definitionsintervall I.



Separation der Variablen und Integration

Lösung: Wir trennen die Variablen und integrieren:

$$
\begin{aligned}
& y'(x) = -x/y(x) \\
\Longrightarrow\quad & y(x)\,y'(x) = -x \quad \Longrightarrow \quad \int y(x)\,y'(x)\,\mathrm{d}x = \int -x\,\mathrm{d}x + c \\
\Longrightarrow\quad & y(x)^2/2 = -x^2/2 + c \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}
\end{aligned}
$$

🙂 Durch jeden Startpunkt $(x_0, y_0 \neq 0)$ läuft genau eine max. Lösung,

$y \,:\,]{-r}, r[\to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto y(x) = \operatorname{sign}(y_0)\sqrt{r^2 - x^2}$ wobei $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

Separierbare Differentialgleichungen

Alle bisherigen Beispiele nutzen als Lösungsmethode die **Trennung der Variablen**. Eine **separierbare Differentialgleichung** ist von der Form

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Lösungsmethode: Wir trennen die Variablen gemäß $y'/h(y) = g(x)$, wobei wir $h(y) \neq 0$ annehmen müssen, und integrieren anschließend:

$$\int_{t=x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,\mathrm{d}t \quad \stackrel{!}{=} \quad \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \quad =: G(x)$$

Auf der linken Seite substituieren wir $u = y(t)$ und $\mathrm{d}u = y'(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\int_{t=x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u \quad =: H(y)$$

Somit gilt $H(y(x)) \stackrel{!}{=} G(x)$, und Auflösen ergibt $y(x) = H^{-1}(G(x))$.

Separation der Variablen und Integration

Satz L1A (Lösung separierbarer Differentialgleichungen)

Zu lösen sei die separierbare Differentialgleichung

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y) \quad \textit{mit} \quad y(x_0) = y_0.}$$

Gegeben sind hierzu stetige Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ *und* $h : J \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *auf Intervallen* $I, J \subset \mathbb{R}$ *sowie die Anfangswerte* $x_0 \in I$ *und* $y_0 \in J$*.* *Wir definieren Stammfunktionen* $G : I \to \mathbb{R}$ *und* $H : J \to \mathbb{R}$ *durch*

$$G(x) := \int_{t=x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad H(y) := \int_{u=y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\,\mathrm{d}u.$$

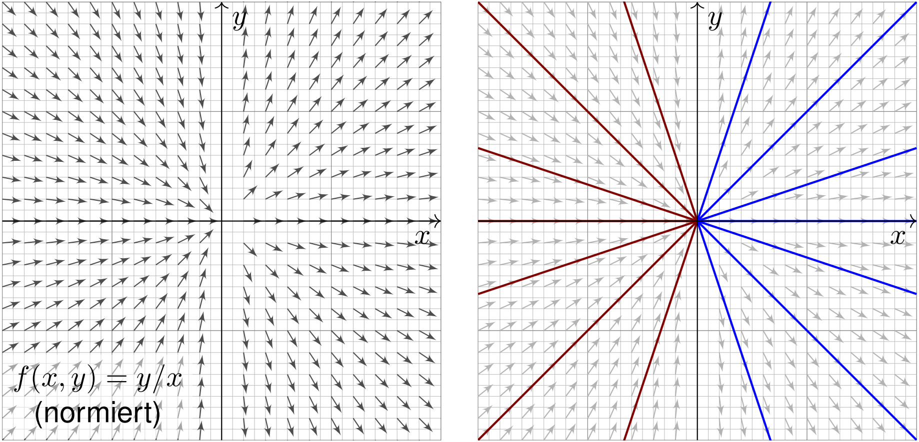
Die Funktion H *ist streng monoton, also bijektiv auf ihr Bild* $H(J) \subset \mathbb{R}$*.* *Sei* $I_0 \subset I$ *ein hinreichend kleines Intervall um* $x_0 \in I_0$ *mit* $G(I_0) \subset H(J)$*.* *Unser AWP erlaubt genau eine Lösung* $y : \mathbb{R} \supset I_0 \to J \subset \mathbb{R}$*, nämlich*

$$\boxed{y(x) = H^{-1}(G(x)).}$$

☺ Lösungsformel ☺ Eindeutigkeit ☺ Stetig abhängig von (x_0, y_0)

Separierbare Differentialgleichungen

Aufgabe: Welche Funktionen $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfüllen $x\,y'(x)=y(x)$?
Wie viele Lösungen laufen durch einen gegebenen Startpunkt (x_0,y_0)?



Separation der Variablen und Integration

Lösung: Wir nehmen zunächst $x, y > 0$ an und trennen die Variablen:

$$
\begin{aligned}
& x\,y'(x) = y(x) \\
\Longrightarrow\quad & \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x} && \Longrightarrow\quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \mathrm{const} \\
\Longrightarrow\quad & \ln y(x) = \ln x + \mathrm{const} && \Longrightarrow\quad y(x) = a \cdot x
\end{aligned}
$$

Die explizite DG $y'(x) = y(x)/x$ wird gelöst durch die Halbgeraden

$$
\begin{aligned}
y_a^+ &: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto a \cdot x, \quad a \in \mathbb{R}, \\
y_b^- &: \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R} : x \mapsto b \cdot x, \quad b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Die implizite DG $x\,y'(x) = y(x)$ wird gelöst durch die Geraden

$$
y_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c \cdot x, \quad c \in \mathbb{R}.
$$

☺ Durch jeden Startpunkt $(x_0 \neq 0, y_0)$ läuft genau eine Lösung y_c.

⚠ Durch den Startpunkt $(0, 0)$ laufen unendlich viele Lösungen!

⚠ Durch jeden Startpunkt $(0, y_0 \neq 0)$ läuft gar keine Lösung!

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Definition L1B (explizite DG und Anfangswertproblem)

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ als **rechte Seite**.
Sie definiert eine **explizite Differentialgleichung erster Ordnung**

$$\boxed{y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{kurz} \quad y' = f(x, y).}$$

Eine **Lösung** dieser Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$, die für alle $x \in I$ die Bedingungen $(x, y(x)) \in G$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ erfüllt.

Sind zudem **Anfangsdaten** $(x_0, y_0) \in G$ gegeben, so soll die Lösung y durch diesen Punkt laufen, das heißt $x_0 \in I$ und $y(x_0) = y_0$ erfüllen.

Ein solches Anfangswertproblem heißt **gut gestellt**, wenn genau eine Lösung y existiert und stetig von den Anfangsdaten (x_0, y_0) abhängt.

🙂 Dank des vorigen Satzes sind separierbare DG gut gestellt.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Satz L1C (Cauchy Existenz- und Eindeutigkeitssatz, kurz E&E)

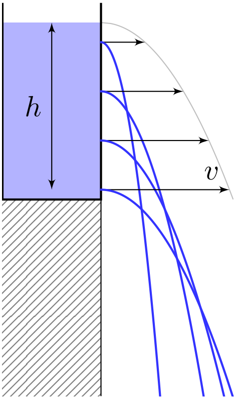
Sei $f : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ *stetig. Zu lösen sei die Differentialgleichung*

$$\boxed{y' = f(x,y) \quad \textit{mit Anfangswert} \quad y(x_0) = y_0.}$$

(1) Zu jedem Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathring{G}$ *existieren Lösungen* $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$*. Jede kann beidseitig bis zum Rand* ∂G *(oder* ∞*) fortgesetzt werden.*

(2) Ist $f(x,y)$ *stetig diff'bar nach* y*, so ist die Lösung durch* $(x_0, y_0) \in \mathring{G}$ *eindeutig bestimmt. Sie hängt stetig differenzierbar von* (x_0, y_0) *ab.*

Wasseruhr: Torricellis Eimer

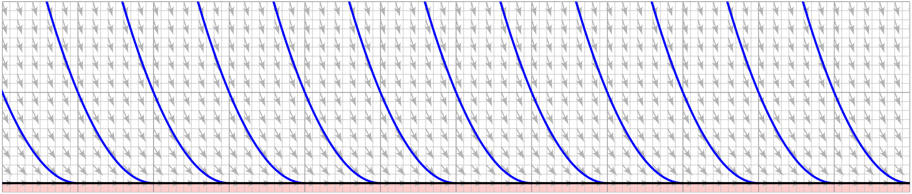


Torricellis Gesetz: Wasser fließt aus einem Zylinder mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,h}$.

Der Pegel y erfüllt **Torricellis Differentialgleichung** $y'(x) = -a\sqrt{y(x)}$.

Aufgabe: Welche Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ erfüllen $y'(x) = -2\sqrt{y(x)}$?
Welche Anfangswertprobleme $y(x_0) = y_0$ sind hier gut gestellt?

Wasseruhr: Torricellis Eimer



Lösung: Die Nullfunktion $y(x) = 0$ ist eine Lösung. Sei also $y > 0$.
Separation $y'(x) \,/\, 2\sqrt{y(x)} = -1$ und Integration zu $\sqrt{y(x)} = c - x \geq 0$.
Wir finden die Lösung $y_c(x) = (c-x)^2$ für $x \leq c$. Maximale Lösung:

$$y_c \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;:\; x \mapsto y_c(x) = \begin{cases} (c-x)^2 & \text{für } x \leq c, \\ 0 & \text{für } x \geq c. \end{cases}$$

🙂 Jedes AWP $y(x_0) = y_0 > 0$ hat genau eine maximale Lösung!

⚠ Jedes AWP $y(x_0) = 0$ hat unendlich viele Lösungen (y_c mit $c \leq x_0$).

Für $y > 0$ ist $f(x,y) = -2\sqrt{y}$ stetig nach y diff'bar, für $y = 0$ aber nicht!

Exakte Differentialgleichungen

Exakte Differentialgleichungen: die Idee

Die Trennung der Variablen ist nützlich aber leider nicht immer möglich. Hier hilft das allgemeinere Lösungsverfahren für **exakte DGL** weiter: Angenommen $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$, erfüllt eine Gleichung

$$\Phi(x, y(x)) = \mathrm{const}$$

für eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$. Für die Ableitung nach x gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Phi(x, y(x)) = 0.$$

Sind $\Phi(x, y)$ und $y(x)$ stetig differenzierbar, so gilt dank Kettenregel

$$\partial_x \Phi(x, y(x)) \cdot 1 + \partial_y \Phi(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0.$$

Eine Differentialgleichung dieser Form heißt **exakt** mit Potential Φ. Ihre Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ sind dann **Äquipotentialkurven** von Φ.

In Anwendungen verläuft die Rechnung typischerweise umgekehrt: Die Differentialgleichung ist gegeben, wir prüfen Exaktheit, bestimmen ein Potential Φ und lösen schließlich die Gleichung $\Phi(x, y) = c$ nach y. Meist wird ein Anfangswert (x_0, y_0) vorgeben und somit $c = \Phi(x_0, y_0)$.

Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

Aufgabe: Wir betrachten erneut $y'(x) = -x/y(x)$, umgeschrieben zu

$$\boxed{2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0.}$$

Dieser Typ von Differentialgleichung hat die allgemeine Form

$$\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = 0 \qquad \text{hier mit} \qquad \begin{cases} f(x,y) = 2x, \\ g(x,y) = 2y. \end{cases}$$

(1) Wie liegen die Lösungen $x \mapsto (x, y(x))$ zum Vektorfeld (f,g)?

(2) Finden und skizzieren Sie ein Potential $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu (f,g).

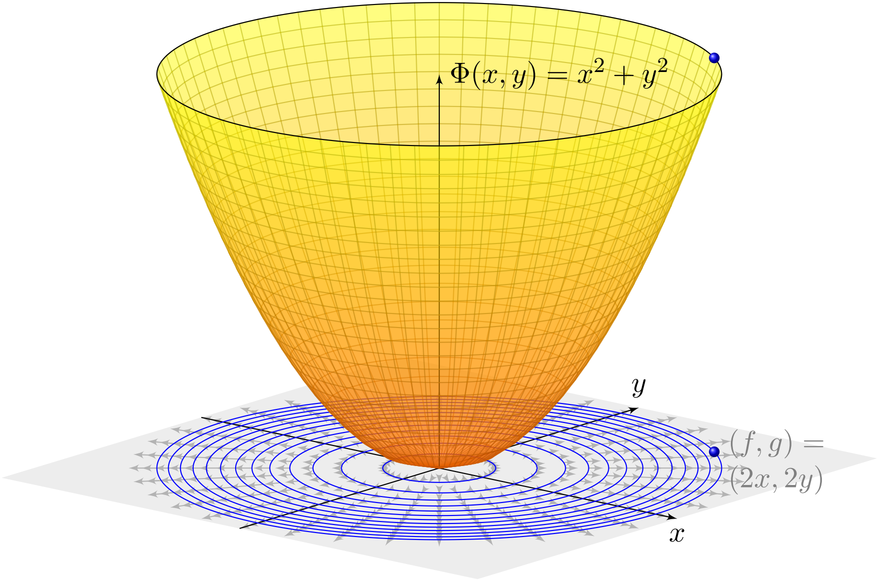
(3) Gewinnen Sie aus den Niveaulinien von Φ die Lösungen der DG.

(4) Finden Sie die maximalen Lösungen mit $y(3) = 4$ bzw. $y(1) = -1$.

Lösung: (1) Jede Lösung verläuft senkrecht zum Vektorfeld (f,g).

(2) Wir finden $\Phi(x,y) = x^2 + y^2$ $(+\mathrm{const})$. Probe: $\operatorname{grad} \Phi = (2x, 2y)$.

Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel



Exakte Differentialgleichungen: erstes Beispiel

(3) Die Niveaulinien des Potentials Φ sind Kreise um den Nullpunkt. Zu jedem Radius $r > 0$ hat die DG demnach die beiden Lösungen

$$y_r^{\pm} : \,]{-r}, r[\, \to \mathbb{R}, \quad y_r^{\pm}(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

(4a) Auflösen von $\Phi(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2 \stackrel{!}{=} \Phi(3,4) = 25$ ergibt

$$y(x) = +\sqrt{25 - x^2} \quad \text{für } -5 < x < 5.$$

(4b) Auflösen von $\Phi(x, y(x)) = x^2 + y(x)^2 \stackrel{!}{=} \Phi(1,-1) = 2$ ergibt

$$y(x) = -\sqrt{2 - x^2} \quad \text{für } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Exakte Differentialgleichungen: die Methode

Satz L2A (Lösung exakter Differentialgleichung)

Jedes stetige Vektorfeld $(f, g) : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^2$ *definiert eine DGL*

$$\boxed{f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0.}$$

*Diese DGL heißt **exakt**, wenn ein Potential* Φ *zu* (f, g) *existiert, also eine Funktion* $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ *mit* $\operatorname{grad} \Phi = (f, g)$, *d.h.* $\partial_x \Phi = f$, $\partial_y \Phi = g$. *Die Lösungen der DG sind dann die Äquipotentialkurven von* Φ*:*

(1) Eine differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ *ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn* $\Phi(x, y(x)) = \mathrm{const}$ *für alle* $x \in I$ *gilt.*

(2) Zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ *mit* $g(x_0, y_0) \neq 0$ *existiert ein offenes Intervall* I *um* x_0 *und eine eindeutige Lösung* $y : I \to \mathbb{R}$ *mit* $y(x_0) = y_0$.

🙂 Implizite Lösung 🙂 Eindeutigkeit 🙂 Stetig abhängig von (x_0, y_0)

Wie löst man exakte Differentialgleichungen?

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$f(x,y) + g(x,y)\, y' = 0$$

ist genau dann exakt, wenn das Vektorfeld $(f,g) : G \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

exakt ist, also ein Potential $\Phi : G \to \mathbb{R}$ besitzt. Zur Erinnerung (G2E):

$$\boxed{\begin{array}{c} (f,g) \text{ ist exakt, d.h.} \\ \exists \Phi : \partial_x \Phi = f, \partial_y \Phi = g \end{array}} \;\underset{G \text{ einfach zshgd}}{\overset{(f,g) \text{ stetig diff'bar}}{\Longleftrightarrow}}\; \boxed{\begin{array}{c} f \text{ ist rotationsfrei,} \\ \text{d.h. } \partial_x g = \partial_y f \end{array}}$$