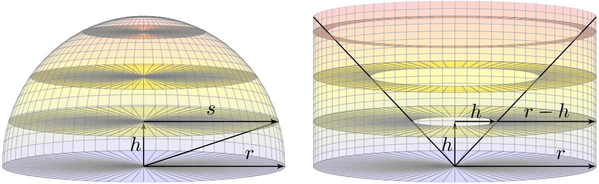
Kapitel C

Mehrdimensionale Integration



Inhalt dieses Kapitels

Mehrdimensionale Integration

Der Transformationssatz

Erinnerung: Transformationssatz

Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi : X \to Y$ bijektiv und stetig diff.bar. Es gilt

$$\int_Y |f(y)| \,\mathrm{d}y = \int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und es folgt

$$\boxed{\int_Y f(y) \,\mathrm{d}y = \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \,\mathrm{d}x.}$$

⚠ Auch hier ist die absolute Integrierbarkeit von f wesentlich!

Die Ableitung $\Phi' : X \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die **Jacobi–Matrix**, $\Phi' = (\partial_j \Phi_i)_{ij}$.

Die Funktion $\det \Phi' : X \to \mathbb{R}$ ist hierzu die **Funktionaldeterminante**.

Bemerkung: Die Abbildung Φ ist meistens eine Umparametrisierung bzw. Koordinatentransformation: y alte Koordinaten, x neue Koordinaten.

Erinnerung: Polarkoordinaten

Zu Radien $0 \le r_0 < r_1 < \infty$ betrachten wir den Kreisring

$$Y = K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; r_0^2 \le x^2 + y^2 \le r_1^2 \right\}.$$

Diesen können wir durch **Polarkoordinaten** parametrisieren:

$$\Phi : X = [r_0, r_1] \times [0, 2\pi] \to K \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} =: \Phi\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Jacobi–Matrix und Funktionaldeterminante sind hier:

$$\Phi' = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det\Phi' = \rho$$

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\boxed{\int_K f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) = \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{F-det}} \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho}$$

Polarkoordinaten und das Gaußsche Integral

Aufgabe: (1) Skizzieren Sie die **Gaußsche Glockenkurve**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2},$ sowie die Glockenfläche

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \qquad g(x,y)=f(x)f(y)$

(2) Können Sie $\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ in geschlossener Form angeben?

(3) Berechnen Sie zur Funktion g das Flächenintegral

$$\int_K \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

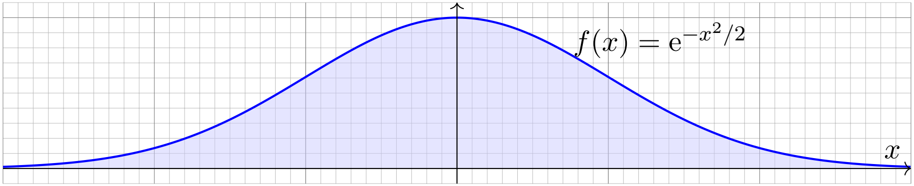
über dem Kreisring $K=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; a^2\le x^2+y^2\le b^2\,\right\}$.

(4) Welches Integral erhalten Sie für $a\to 0$ und $b\to\infty$?

(5) Bestimmen Sie hiermit das Integral $I=\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.

Das Gaußsche Integral

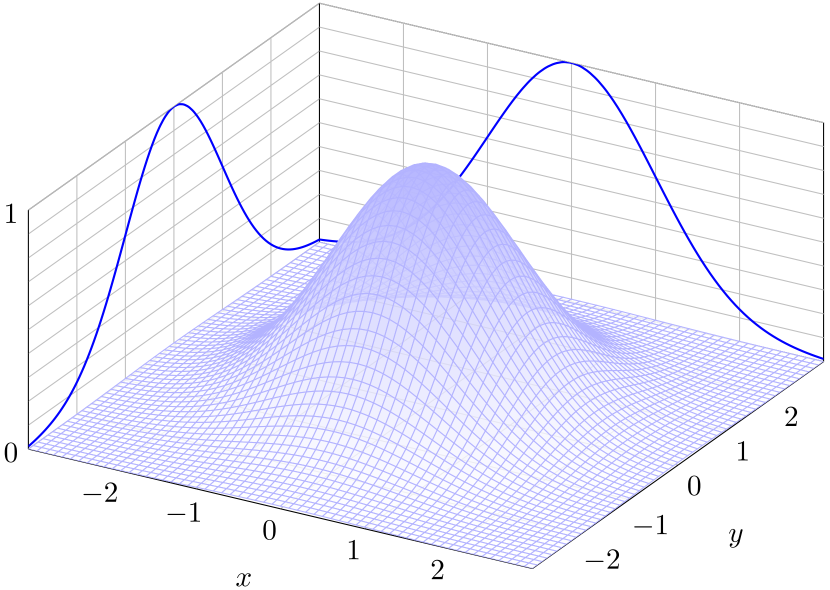
Lösung: (1) Skizze der Gaußschen Glockenkurve:



(2) Für die Integralfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ gibt es keine geschlossene Formel, ebensowenig für die Integrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

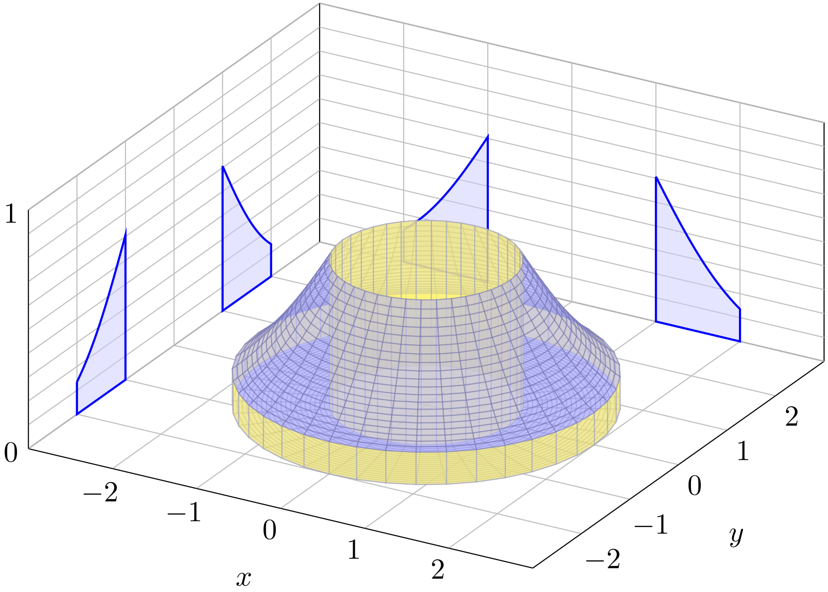
Das Gaußsche Integral

Skizze der Gaußschen Glockenfläche $g(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$



Das Gaußsche Integral

Diese Funktion g wollen wir über den Kreisring K integrieren:



Anwendung: Das Gaußsche Integral

(3) In Polarkoordinaten $(x,y) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ gilt $\mathrm{d}(x,y) = \rho\,\mathrm{d}(\rho,\varphi)$. Die Integration gelingt dank Transformationssatz, Fubini und HDI:

$$\begin{aligned}
\int_K \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y) &\overset{\text{Trafo}}{=} \int_{[a,b]\times[0,2\pi]} \mathrm{e}^{-\rho^2/2} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}}\,\mathrm{d}(\rho,\varphi) \\
\overset{\text{Fub}}{=} \int_{\rho=a}^{b}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho &\overset{\text{HDI}}{=} \int_{\rho=a}^{b} 2\pi\rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\,\mathrm{d}\rho \\
\overset{\text{HDI}}{=} \Big[-2\pi\,\mathrm{e}^{-\rho^2/2}\Big]_{\rho=a}^{b} &= 2\pi\Big(\mathrm{e}^{-a^2/2} - \mathrm{e}^{-b^2/2}\Big)
\end{aligned}$$

(4) Für $a \to 0$ und $b \to \infty$ finden wir:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y) = 2\pi}$$

(5) Schließlich erhalten wir so auch das eindimensionale Integral:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Kunstgriff: Statt I berechnen wir I^2!

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y \quad \overset{\text{Lin}}{=} \quad \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \cdot \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad \overset{\text{Exp}}{=} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

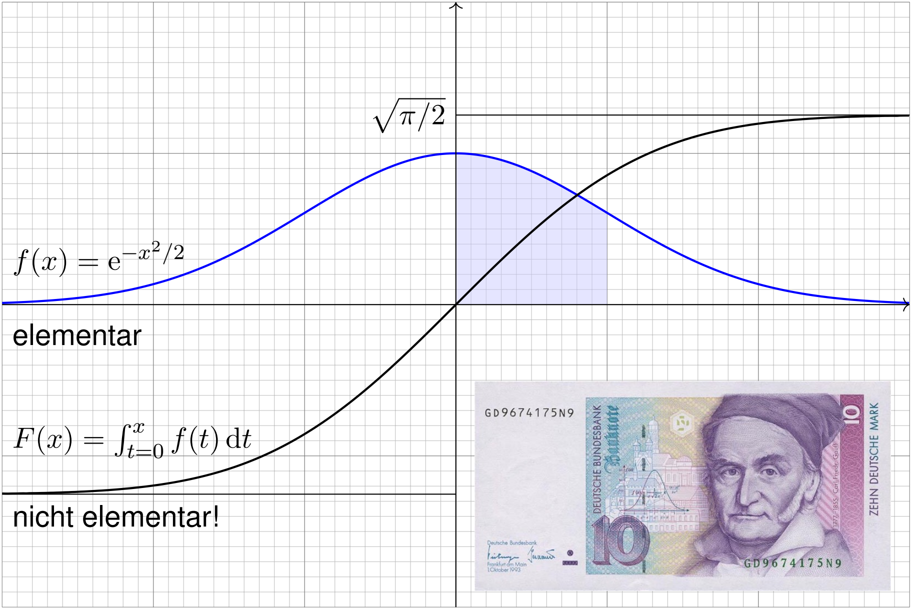
$$\overset{\text{Fub}}{=} \quad \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y) \quad \overset{(4)}{=} \quad 2\pi$$

Satz C2C (Gaußsches Integral)

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Gaußsche Glockenkurve und Integralfunktion



Erinnerung: Die Gamma–Funktion

Definition C2D

Die **Gamma-Funktion** $\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist $\Gamma(z) := \int_{x=0}^{\infty} x^{z-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$.

Dieses Integral konvergiert für $z > 0$ und divergiert für $z \le 0$. Zur Berechnung nutzt man Ausschöpfung und partielle Integration.

Satz C2E (Funktionalgleichung)

Für alle $z > 0$ gilt

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).}$$

Mit $\Gamma(1) = 1$ folgt per Induktion $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Gamma–Funktion an halbzahligen Stellen

Aufgabe: Berechnen Sie den Wert $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{x=0}^{\infty} x^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$.

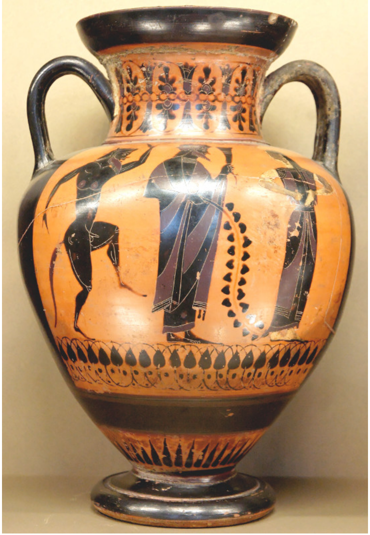
Lösung: Die Substitution $x = u^2$ und $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ ergibt:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_{u=0}^{\infty} u^{-1}\, \mathrm{e}^{-u^2} \cdot 2u\, \mathrm{d}u &&= 2\int_{u=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u &&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-v^2/2}\, \mathrm{d}v = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

🙂 Dank der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ aus Satz C2E folgt:

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}}$$

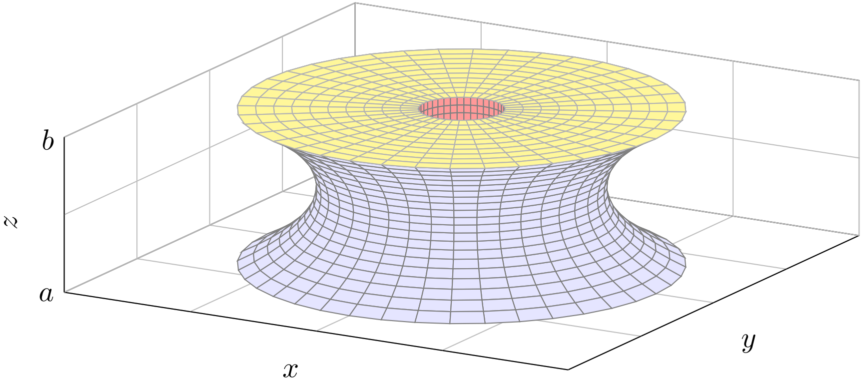
Zylinderkoordinaten



Griechische Amphore aus dem Louvre, Bildquelle: wikipedia.org

Stuttgarter Fernsehturm, Bildquelle: wikipedia.org

Zylinderkoordinaten



Aufgabe: Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \le z \le b,\ r_0(z)^2 \le x^2 + y^2 \le r_1(z)^2 \right\}$$

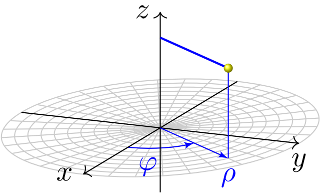
(1) in Zylinderkoordinaten

(2) mit Fubini (zum Vergleich).

(3) Was erhalten Sie für $-1 \le z \le 1$ mit $r_0 = 0$ und $r_1(z) = \cosh(z)$?

Zylinderkoordinaten

Lösung: Wir nutzen **Zylinderkoordinaten** um die z–Achse:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$\Phi : D \to R$ mit $D = \{\, (\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le z \le b,\ r_0(z) \le \rho \le r_1(z),\ 0 \le \varphi \le 2\pi \,\}$

Die **Funktionaldeterminante** ist wie zuvor bei Polarkoordinaten:

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \det \Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \rho$$

Volumen eines Rotationskörpers

(1) Volumenberechnung in Zylinderkoordinaten, $\mathrm{d}(x,y,z) = \rho\,\mathrm{d}(z,\rho,\varphi)$:

$$\operatorname{vol}_3(R) = \int_R 1\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{=} \int_D \rho\,\mathrm{d}(z,\rho,\varphi) \overset{\text{Fub}}{=} \int_{z=a}^{b} \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{HDI}}{=} \int_{z=a}^{b} \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} 2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z \overset{\text{HDI}}{=} \int_{z=a}^{b} \Big[\pi\rho^2\Big]_{r_0(z)}^{r_1(z)} \mathrm{d}z = \int_{z=a}^{b} \pi r_1(z)^2 - \pi r_0(z)^2 \mathrm{d}z$$

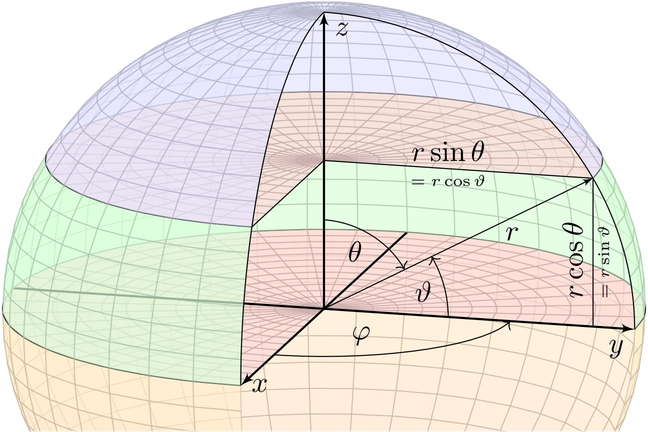
(2) Mit Fubini und Kreisringen erhalten wir dasselbe Ergebnis:

$$\operatorname{vol}_3(R) \overset{\text{Fub}}{=} \int_{z=a}^{b} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{I}_R(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z \overset{\text{Kreis}}{=} \int_{z=a}^{b} \pi r_1(z)^2 - \pi r_0(z)^2\,\mathrm{d}z$$

(3) Für $r_0, r_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $r_0 = 0$ und $r_1(z) = \cosh(z)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}_3(R) = \int_{z=-1}^{1} \pi\cosh(z)^2\,\mathrm{d}z \qquad &= \pi \int_{z=-1}^{1} \frac{1}{2}\cosh(2z) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}z \\ = \pi\Big[\frac{1}{4}\sinh(2z) + \frac{z}{2}\Big]_{z=-1}^{1} &= \pi\Big(\frac{1}{2}\sinh(2) + 1\Big) \;\approx\; 8.84\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten

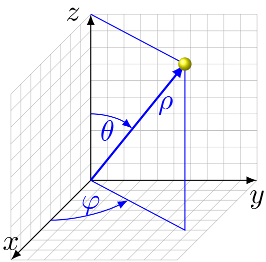


Aufgabe: Bestimmen Sie das Volumen der **Kugel** vom Radius r:

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \le r^2 \right\}$$

(1) in Kugelkoordinaten und (2) als Rotationskörper (zum Vergleich).

Kugelkoordinaten



Wir parametrisieren durch **Kugelkoordinaten**:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin\theta \cos\varphi \\ \rho \sin\theta \sin\varphi \\ \rho \cos\theta \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Phi : D \to K \quad \text{mit} \quad D = \big\{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \big\}$$

Wir berechnen die **Jacobi–Matrix** und **Funktionaldeterminante**:

$$\Phi' \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \det \Phi' = \rho^2 \sin\theta \qquad \text{(Übung!)}$$

Lösung: (1) Das Volumen berechnen wir in **Kugelkoordinaten**:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{=} \int_D \rho^2 \sin\theta \,\mathrm{d}(r,\theta,\varphi) \qquad \text{Fu'det!}$$

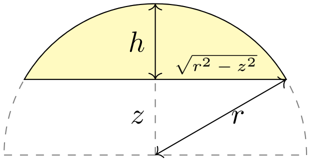
$$\overset{\text{Fub}}{=} \int_{\rho=0}^{r} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho \overset{\text{HDI}}{=} \int_{\rho=0}^{r} \int_{\theta=0}^{\pi} 2\pi\rho^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho$$

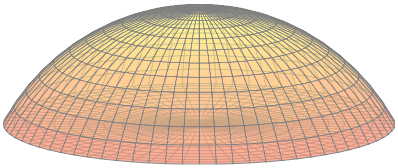
$$\overset{\text{HDI}}{=} \int_{\rho=0}^{r} 2\pi \Big[-\rho^2 \cos\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{d}\rho = \int_{\rho=0}^{r} 4\pi\rho^2 \,\mathrm{d}\rho \overset{\text{HDI}}{=} \left[\frac{4\pi}{3}\rho^3\right]_{\rho=0}^{r} = \frac{4\pi}{3} r^3$$

(2) Zum Vergleich die Rechnung als **Rotationskörper**:

$$\mathrm{vol}_3(K) \overset{\text{Fub}}{=} \int_{z=-r}^{r} \pi(r^2 - z^2) \,\mathrm{d}z \overset{\text{HDI}}{=} \pi\left[r^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{z=-r}^{r} = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Kugelsegment





Aufgabe: Bestimmen Sie das Volumen des **Kugelsegments**

$$K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ r - h \le z \le r \}.$$

Lösung: Wir nutzen Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{vol}_3(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{\underset{\text{Fub}}{=}} \int_{z=r-h}^{r} \int_{\rho=0}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \int_{z=r-h}^{r} \pi (r^2 - z^2) \,\mathrm{d}z \overset{\text{HDI}}{=} \pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=r-h}^{r} = \dots = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$$

Masse, Schwerpunkt, Trägheitsmoment

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper. Berechnung der **Masse** aus der Dichte ϱ:

$$\boxed{M(K) = \int_K \varrho(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}(x_1, x_2, x_3)}$$

Berechnung des **Schwerpunkts** $S(K) = (S_1, S_2, S_3)$ zur Dichte ϱ:

$$\boxed{S_i(K) = \frac{1}{M(K)} \int_K x_i\,\varrho(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}(x_1, x_2, x_3)}$$

Trägheitsmoment $T_3(K)$ des Körpers K bzgl. der x_3–Achse:

$$\boxed{T_3(K) = \int_K (x_1^2 + x_2^2)\,\varrho(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}(x_1, x_2, x_3)}$$

Trägheitsmoment eines Zylinders

Aufgabe: Berechnen Sie das Trägheitsmoment $T_z(K)$ des Zylinders

$$K = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le r^2,\ 0 \le z \le h\ \}$$

bezüglich der z–Achse. Die Massendichte sei konstant $\varrho = 1$.

Lösung: In Zylinderkoordinaten $(x,y,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$ gilt $\mathrm{d}(x,y,z) = \rho\,\mathrm{d}(\rho,\varphi,z)$. Für das Trägheitsmoment finden wir:

$$\begin{aligned} T_z(K) &= \int_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y,z) \\ &= \int_{z=0}^{h}\int_{\rho=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Fu'det}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi h \int_{\rho=0}^{r} \rho^3\,\mathrm{d}\rho \quad = \quad 2\pi h\,\frac{r^4}{4} \quad = \quad \frac{\pi}{2} h r^4 \end{aligned}$$

Trägheitsmoment einer Kugel

Aufgabe: Berechnen Sie das Trägheitsmoment $T_z(K)$ der Kugel

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \le r^2 \right\}$$

(1) in Kugelkoordinaten und (2) in Zylinderkoordinaten (zum Vergleich).

Lösung: (1) Für $(x, y, z) = (\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)$ gilt $\mathrm{d}(x, y, z) = \rho^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}(\rho, \theta, \varphi)$. Für das Trägheitsmoment finden wir:

$$\begin{aligned}
T_z(K) &= \int_K (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}(x, y, z) \\
&= \int_{\rho=0}^{r}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2\sin(\theta)^2 \cdot \underbrace{\rho^2\sin(\theta)}_{\text{Fu'det}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi\int_{\rho=0}^{r}\rho^4\,\mathrm{d}\rho\int_{\theta=0}^{\pi}\sin(\theta)^3\,\mathrm{d}\theta \quad = \quad 2\pi\,\frac{r^5}{5}\cdot\frac{4}{3} \quad = \quad \frac{8}{15}\pi r^5
\end{aligned}$$

Trägheitsmoment einer Kugel

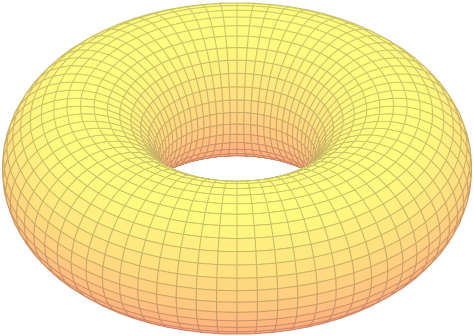
(2) Alternative Berechnung in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} T_z(K) &= \int_K (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y,z) \\ &= \int_{z=-r}^{r} \int_{D(z)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

mit der Kreisscheibe $D(z) = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le r^2 - z^2 \,\}$.
Das innere Integral kennen wir aus der vorigen Aufgabe!

$$\begin{aligned} T_z(K) &= \int_{z=-r}^{r} \frac{\pi}{2}(r^2-z^2)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\int_{-r}^{r} r^4 - 2r^2z^2 + z^4\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{2}\Big[r^4 z - \frac{2}{3}r^2 z^3 + \frac{1}{5}r^5\Big]_{z=-r}^{r} \quad = \quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{16}{15}r^5 \quad = \quad \frac{8}{15}\pi r^5 \end{aligned}$$

Volumen eines Volltorus



Aufgabe: Bestimmen Sie für $0 < r < R$ das Volumen des Volltorus

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (R+\rho\sin\theta)\cos\varphi \\ (R+\rho\sin\theta)\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} =: \Phi\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

(1) in Toruskoordinaten und (2) als Rotationskörper (zum Vergleich).

Volumen eines Volltorus

Lösung: (1) Wir nutzen die angegebene Parametrisierung Φ:

$$\Phi' = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -(R+\rho\sin\theta)\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & (R+\rho\sin\theta)\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\Phi' = \rho\,(R+\rho\sin\theta)$$

Volumenberechnung dank **Transformationssatz** und **Fubini** und **HDI**:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(V) &= \int_V 1\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\rho=0}^{r}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho\,(R+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\int_{\rho=0}^{r}\Big[\rho\,(R\theta-\rho\cos\theta)\Big]_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_{\rho=0}^{r}\rho\cdot R\cdot 2\pi\,\mathrm{d}\rho \\ &= (2\pi)^2 R\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{r} = 2\pi R\cdot\pi r^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Das entspricht der **Guldinschen Volumenregel** für Rotationskörper: πr^2 ist der Flächeninhalt des kleinen Kreises, $2\pi R$ ist der bei Rotation zurückgelegte Weg seines Schwerpunkts.

Zusammenfassung

Integrationstechniken

Hauptsatz (HDI)

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** erklärt, in welchem Sinne Differenzieren und Integrieren einander umkehren:

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. Ihre Integralfunktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar, und für die Ableitung gilt $F' = f$. Ist umgekehrt $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F\Big]_a^b \quad \text{mit} \quad \Big[F\Big]_a^b := F(b) - F(a).$$

Dieser nützliche Zusammenhang gilt noch wesentlich allgemeiner:

f stetig	$\Longleftrightarrow$	F stetig differenzierbar	HM1
f stückweise stetig	$\Longleftrightarrow$	F stückweise stetig differenzierbar	
f absolut integrierbar	$\Longleftrightarrow$	F absolut stetig	

Satz von Fubini

Seien $X \subset \mathbb{R}^p$, $Y \subset \mathbb{R}^q$ und $f : X \times Y \to \mathbb{C}$. Es gilt

$$\int_{X\times Y} \bigl|f(x,y)\bigr| \,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X |f(x,y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und es gilt

$$\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.}$$

⚠ Hierzu ist die absolute Integrierbarkeit wesentlich! Andernfalls ist das erste Integral nicht definiert und die letzten beiden evtl. verschieden.

☺ **Daumenregel:** Gilt wieder, dass f nicht negativ oder absolut integrierbar ist (z.B. X, Y und f beschränkt, also insbesondere für X, Y kompakt und f stetig), so folgt Vertauschbarkeit).

Fubini über Normalbereichen

Integration über Normalbereiche ist ein wichtiger Spezialfall und die wohl häufigste Anwendung des Satzes von Fubini:

Das Integral einer absolut integrierbaren Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ über

$$B = \left\{\, x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \le x_k \le b_k(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ für alle } k \,\right\}$$

lässt sich durch iterierte eindimensionale Integrale berechnen:

$$\int_B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{x_n=a_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$$

Dies gilt ebenso bei jeder anderen Reihenfolge der Variablen.

⚠ Man muss hierzu allerdings die Integrationsgrenzen umschreiben! Das gelingt oft am besten anhand einer Skizze.

⚠ Das Ergebnis ist dasselbe, aber der Rechenweg kann verschieden schwierig sein. Für ein bemerkenswertes Beispiel siehe.

Transformationssatz

Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi : X \to Y$ bijektiv und stetig differenzierbar.

Es gilt

$$\int_Y |f(y)| \,\mathrm{d}y = \int_X |f(\Phi(x))| \cdot |\det \Phi'(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Ist dieser Wert endlich, so ist f absolut integrierbar, und es gilt

$$\boxed{\int_Y f(y) \,\mathrm{d}y = \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \,\mathrm{d}x.}$$

⚠ Auch hier ist die absolute Integrierbarkeit wesentlich!

Die Ableitung $\Phi' : X \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die **Jacobi–Matrix**, $\Phi' = (\partial_j \Phi_i)_{ij}$.

Die Funktion $\det \Phi' : X \to \mathbb{R}$ ist hierzu die **Funktionaldeterminante**.

Polarkoordinaten

Zu Radien $0 \le r_0 < r_1 < \infty$ betrachten wir den Kreisring

$$Y = K = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0^2 \le x^2 + y^2 \le r_1^2 \,\}.$$

Diesen können wir durch **Polarkoordinaten** parametrisieren:

$$\Phi : X = [r_0, r_1] \times [0, 2\pi] \to K \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} =: \Phi\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Jacobi–Matrix und Funktionaldeterminante sind hier:

$$\Phi' = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \det\Phi' = \rho$$

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\boxed{\int_K f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) = \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{F-det}} \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho}$$

Zylinderkoordinaten

Zu Radien $r_0, r_1 : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir den Rotationskörper

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \le z \le b,\ r_0(z)^2 \le x^2 + y^2 \le r_1(z)^2 \right\}.$$

Diesen können wir durch **Zylinderkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen $a \le z \le b$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$ sowie $r_0(z) \le \rho \le r_1(z)$.

Die Funktionaldeterminante ist hier wie zuvor $\det \Phi' = \rho$ (Übung!).

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\boxed{\int_K f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{z=a}^{b} \int_{\rho=r_0(z)}^{r_1(z)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \underbrace{\rho}_{\text{F-det}} \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z}$$

Kugelkoordinaten

Zum Radius $r > 0$ betrachten wir die Kugelschale

$$K = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_0^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le r_1^2 \,\}.$$

Diese können wir durch **Kugelkoordinaten** parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} =: \Phi\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

mit den Grenzen $r_0 \le \rho \le r_1$ und $0 \le \theta \le \pi$ sowie $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Die Funktionaldeterminante ist hier $\det \Phi' = \rho^2 \sin\theta$. (Übung!)

Für jede absolut integrierbare Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ gilt somit:

$$\boxed{\int_K f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}(x, y, z) = \int_{\rho=r_0}^{r_1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \underbrace{\rho^2 \sin\theta}_{\text{F-det}} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho}$$

Kapitel C

Integrale und Grenzwerte

Inhalt dieses Kapitels

Wann vertauschen Integral und Limes?

Integration einer Reihe: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_\Omega \left[\sum_{k=0}^\infty f_k(x)\right] \mathrm{d}x \quad = \quad \sum_{k=0}^\infty \left[\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x\right] \quad ?$$

Stetigkeit des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_\Omega \left[\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right] \mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{k\to\infty} \left[\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x\right] \quad ?$$

Ableitung des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_Y \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right] \mathrm{d}y \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \quad ?$$

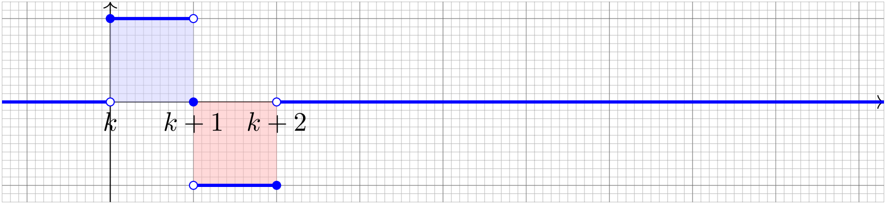
Die Gleichungen gelten nicht immer! Das muss man wissen.

Es gibt einfache Kriterien. Die müssen Sie beherrschen.

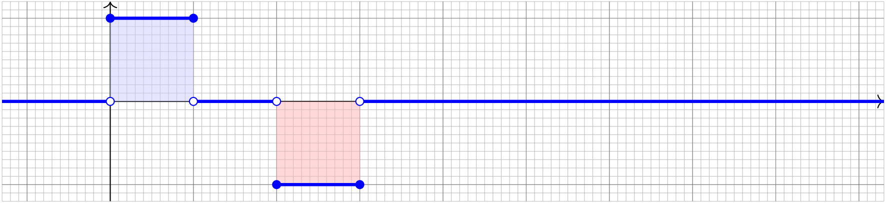
Das zentrale Kriterium ist die **majorisierte Integrierbarkeit**.

Gegenbeispiel zu Reihen

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k = \mathbf{I}_{[k,k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2]}$.



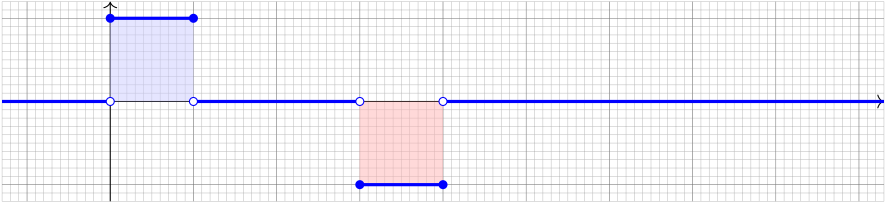
Offensichtlich gilt $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$.



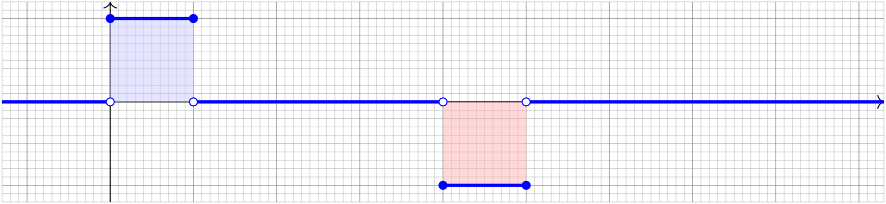
Auch für $f_0 + f_1$ ist das Integral Null.

Gegenbeispiel zu Reihen

Graph zu $f_0 + f_1 + f_2$:



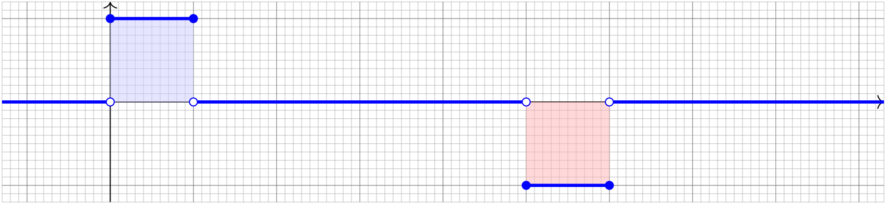
Graph zu $f_0 + f_1 + f_2 + f_3$:



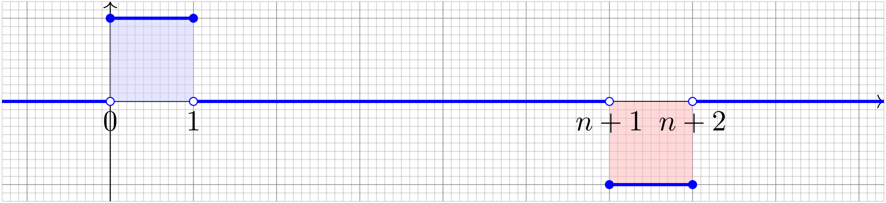
Das Integral ist jeweils Null.

Gegenbeispiel zu Reihen

Graph zu $f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$:



Graph zu $f_0 + f_1 + \dots + f_n$:



Das Integral ist jeweils Null.

Gegenbeispiel zu Reihen

Aufgabe: Man berechne und vergleiche:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right] \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right]\mathrm{d}x$$

Lösung: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sehen wir :

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right] = 0$$

Andererseits kennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Teleskopsumme

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) - \mathbf{I}_{[n+1,n+2]}(x) \quad \to \quad \mathbf{I}_{[0,1]}(x) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$ gilt daher punktweise Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right]\mathrm{d}x = 1$$

⚠ Anschauliche Ursache: „Masse verschwindet nach Unendlich“.