Kapitel J

Fourier–Transformation

Inhalt dieses Kapitels

Motivation: von Fourier–Reihe zu Fourier–Integral

Die Funktion $f:[-T/2,T/2]\to\mathbb{C}$ zerlegen wir in ihre **Fourier–Reihe**:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk\cdot 2\pi/T} \quad\text{mit}\quad c_k=\frac{1}{T}\int_{x=-T/2}^{T/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk\cdot 2\pi/T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Wir betrachten $\xi=k\Delta\xi$ mit $\Delta\xi=2\pi/T=\omega$ als **diskrete Variable**:

$$g(\xi)=\int_{x=-T/2}^{T/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x \quad\text{und}\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}\Delta\xi} g(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\Delta\xi$$

Für nicht-periodische Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ betrachten wir $T\to\infty$.

$$g(\xi)=\int_{x=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x \quad\text{und}\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{\infty} g(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

Fourier–Transformation

Definition J1A

Die **Fourier–Transformierte** einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist

$$\boxed{\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad \widehat{f}(\xi):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Die Zuordnung $\mathscr{F}: f\mapsto \widehat{f}$ heißt **Fourier–Transformation**.

Die **inverse Fourier–Transformation** $\mathscr{F}^{-1}:\widehat{f}\mapsto f$ ist definiert durch

$$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad f(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.}$$

Dies kürzen wir ab als **Transformationspaar** $f \circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{f}$ bzw. $\widehat{f}\ \bullet\!\!-\!\!\circ f$.

Fourier–Transformation und Cauchy–Hauptwert

Wir setzen stillschweigend voraus, dass $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ auf jedem endlichen Intervall $[-r,r]$ integrierbar ist. Bei Polstellen, etwa $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}/(x-s)$ in $x=s$, betrachten wir das uneigentliche Integral $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-r}^{s-\varepsilon}+\int_{s+\varepsilon}^{r}$.

Als Integral über $\mathbb{R}$ vereinbaren wir hier den **Cauchy–Hauptwert**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Dieses Integral existiert, wenn f auf ganz $\mathbb{R}$ absolut integrierbar ist, also $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$ erfüllt, aber auch noch in weiteren Fällen.

Als Beispiel betrachten wir unten die **Spaltfunktion** $\mathrm{si}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{si}(x)=\begin{cases}\sin(x)/x & \text{für } x\neq 0,\\ 1 & \text{für } x=0.\end{cases}$$

Diese ist über $\mathbb{R}$ nicht absolut integrierbar, $\int_{\mathbb{R}}|\mathrm{si}(x)|\,\mathrm{d}x=\infty$.
Glücklicherweise existiert noch der obige Cauchy–Hauptwert analog zur Summierbarkeit der Leibniz–Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$.

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet$ Spaltfunktion

Aufgabe: Wir betrachten ein reelles Intervall $[a,b]=[c-r,c+r]$.
(1) Fourier–transformieren Sie die Rechteckfunktion $f(x)=\mathbf{I}_{[a,b]}(x)$.
(2) Berechnen Sie aus der Transformierten $\widehat{f}$ die Rücktransformierte.

Lösung: (1) Im Punkt $\xi=0$ ist die Rechnung besonders leicht:

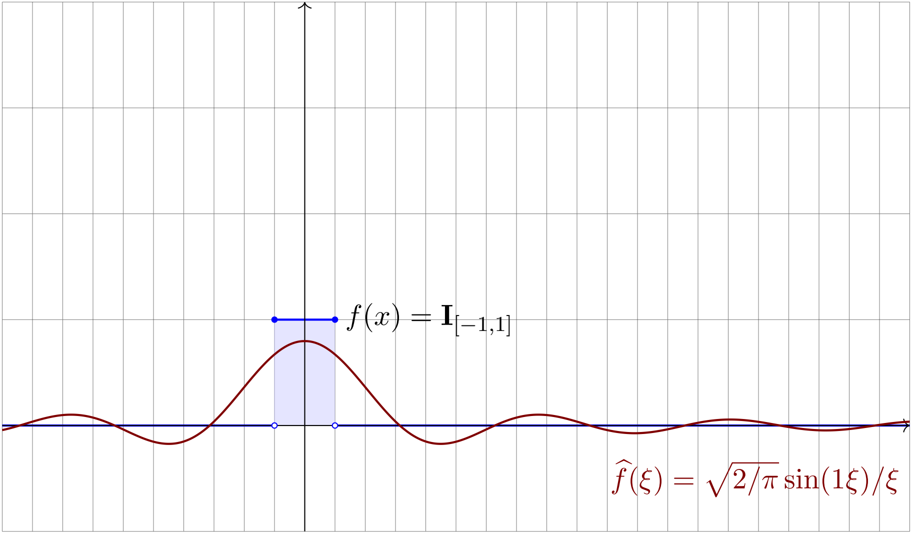
$$\widehat{f}(0) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} 1\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,r$$

Für $\xi \neq 0$ berechnen wir und finden die **Spaltfunktion**

$$\widehat{f}(\xi) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=a}^{b} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}}{-\mathrm{i}\xi}\right]_{a}^{b}$$

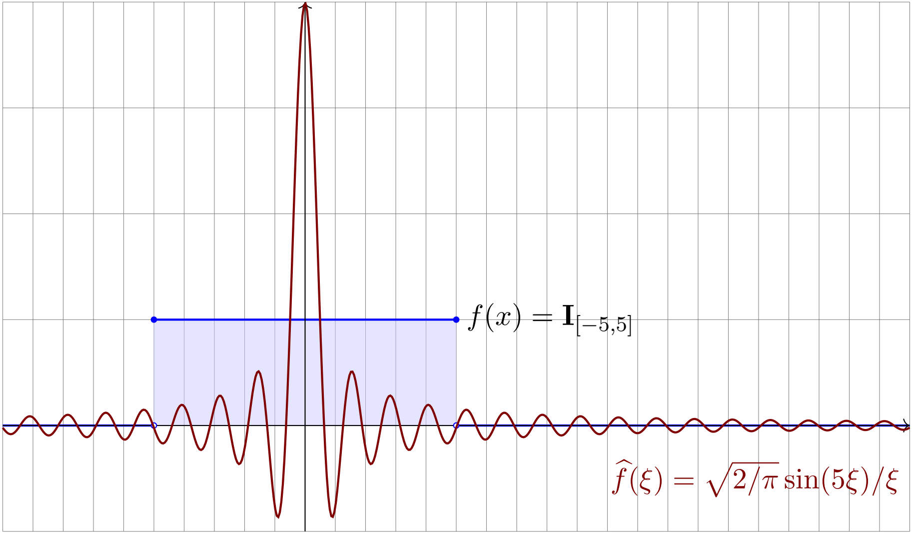
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi c}}{\xi}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi r}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi r}}{2\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi c}\,\frac{\sin(\xi r)}{\xi}.$$

Beispiel: Rechteckfunktion ○——● Spaltfunktion



🙂 Wir sehen hier die **Unschärferelation**: Ist f schmal, so ist $\widehat{f}$ breit.

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ Spaltfunktion



Wir sehen hier die **Unschärferelation**: Ist $\widehat{f}$ schmal, so ist f breit.

Beispiel: Rechteckfunktion $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ Spaltfunktion

(2) Die Fourier–Transformierte von $f(x) = \mathbf{I}_{[a,b]}$ ist

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi b}}{\mathrm{i}\xi}.$$

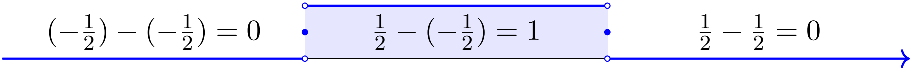
Erinnerung: Mit dem Residuenkalkül berechnen wir

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi u}}{\xi} \,\mathrm{d}\xi = \operatorname{sign}(u) \operatorname{res}_0\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z}\right) = \operatorname{sign}(u).$$

Zu $\widehat{f}$ berechnen wir damit die **inverse Fourier–Transformation**:

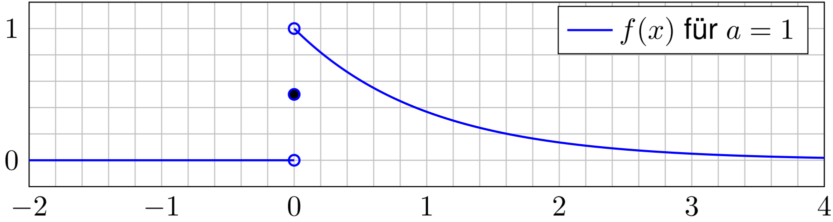
$$\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f})(x) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi b}}{\mathrm{i}\xi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \,\mathrm{d}\xi$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-a)}}{\xi} \,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-b)}}{\xi} \,\mathrm{d}\xi \overset{\text{Res}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin [a,b], \\ 1 & \text{für } x \in \,]a,b[, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in \{a,b\}. \end{cases}$$



Wir erhalten die ursprüngliche Funktion f, aber sprungnormiert!

Fourier–Transformation der Exponentialverteilung



Aufgabe: Sei $a > 0$. Berechnen Sie folgende Fourier–Transformation:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 & \text{für } x < 0 \\ \mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x > 0 \\ 1/2 & \text{für } x = 0 \end{array}\right\} = f(x) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + \mathrm{i}\xi}$$

Lösung: Wir setzen die Definition ein und berechnen:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(\xi) &\overset{\text{Def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def}}{=} \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Exp}}{=} \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\xi)x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\xi)x}}{a+\mathrm{i}\xi}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{a+\mathrm{i}\xi} \end{aligned}$$

Refsatz:HDI

Fourier–Transformation der Exponentialverteilung

Aufgabe: Berechnen Sie die Rücktransformation.

Lösung: Wir verwenden den Residuenkalkül:

$$f(x) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}\xi \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}}{a + \mathrm{i}\xi}\, \mathrm{d}\xi$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}}{\xi - \mathrm{i}a}\, \mathrm{d}\xi \overset{\text{Res}}{=} \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & \text{für } x > 0 \quad \text{(Residuum in } \xi = \mathrm{i}a\text{)}, \\ 0 & \text{für } x < 0 \quad \text{(keine Sing. in } \mathbb{C}_{\mathrm{Im} \le 0}\text{)}. \end{cases}$$

Den Fall $x = 0$ müssen wir separat weiterrechnen:

$$f(0) \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi - \mathrm{i}a}\, \mathrm{d}\xi \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi + \mathrm{i}a}{\xi^2 + a^2}\, \mathrm{d}\xi \quad \text{(gerader Anteil)}$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\xi^2 + a^2}\, \mathrm{d}\xi \overset{\text{HDI}}{=} \frac{1}{2\pi} \Big[\arctan(x/a)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Eigenschaften der Fourier–Transformierten

Linearität der Fourier–Transformation

Satz J1C

Die Fourier–Transformation ist linear:

$$\boxed{\mathscr{F}\big[a\,f + b\,g\big] = a\,\mathscr{F}(f) + b\,\mathscr{F}(g)}$$

für alle $\mathscr{F}$–transformierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{f \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f},\quad g \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{g} \quad\Longrightarrow\quad af + bg \circ\!\!-\!\!\bullet a\widehat{f} + b\widehat{g}}$$

Beweis: Dank Linearität des Integrals gilt:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(af + bg)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \big[a\,f(x) + b\,g(x)\big]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= a\,\widehat{f}(\xi) + b\,\widehat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

Stetigkeit, Abklingverhalten, Energiegleichung

Satz J1D

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *absolut integrierbar, also* $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$*, dann gilt:*

Die Fourier–Transformierte $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *ist stetig und beschränkt:*

$$\boxed{\big|\widehat{f}(\xi)\big| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } \xi\in\mathbb{R}.}$$

Sie verschwindet im Unendlichen (Riemann–Lebesgue–Lemma):

$$\boxed{\big|\widehat{f}(\xi)\big|\to 0 \quad \text{für} \quad |\xi|\to\infty.}$$

Zudem gilt die Plancherel–Gleichung (Energiegleichung):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\big|\widehat{f}(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi.}$$

Beweis der Stetigkeit der Transformierten

Sei f absolut integrierbar. Die Beschränktheit von $\widehat{f}$ ist dann klar:

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right|}_{=1} \cdot \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$$

Zur gleichmäßigen Stetigkeit von $\widehat{f}(\xi)$ betrachten wir

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)\right| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi+\eta)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right] f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\right|}_{=1} \cdot \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x} - 1\right| \cdot \left|f(x)\right|}_{=:g_\eta(x)} \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta x} \to 1$ für $\eta \to 0$, also $g_\eta(x) \to 0$.
Zudem ist $g_\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt durch die integrierbare Funktion $2|f|$.
Dank majorisierter Konvergenz vertauschen Integral und Limes:

$$\lim_{\eta\to 0} \int_{\mathbb{R}} g_\eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\eta\to 0} g_\eta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

Somit gilt $\left|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)\right| \to 0$, also $\widehat{f}(\xi+\eta) \to \widehat{f}(\xi)$ für $\eta \to 0$.

Der Umkehrsatz im Spezialfall $L^1 \circ\!\!-\!\!\bullet\, L^1$

Satz J1E (Umkehrformel)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *absolut integrierbar mit Fourier–Transformierter*

$$\boxed{\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Dann ist die Funktion $\widehat{f}$ *stetig. Ist umgekehrt auch* $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *absolut integrierbar und* f *stetig, so gilt in jedem Punkt* $x \in \mathbb{R}$ *die Umkehrformel*

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.}$$

Der Umkehrsatz für sprungnormierte Funktionen

Satz J1F (Umkehrformel)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *absolut integrierbar mit Fourier–Transformierter*

$$\boxed{\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x) \,\mathrm{d}x.}$$

Zudem sei f *stückweise stetig differenzierbar und sprungnormiert,*

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

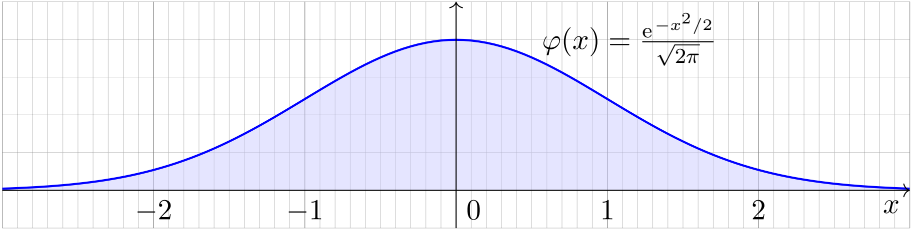
Dann gilt für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ *die Umkehrformel*

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \,\mathrm{d}\xi.}$$

Für solche Funktionen ist die Transformation $f \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}$ *also umkehrbar.*

Fourier–Transformation der Normalverteilung

Die Standard-Normalverteilung



Insbesondere gilt: $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Dies ist die sogenannte **Wahrscheinlichkeitsdichte**.

Sie spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle. Auch für die Fourier–Transformation ist sie ein wichtiges Beispiel.

Fourier–Transformation der Normalverteilung

Satz J1G

Für die Normalverteilung gilt $\varphi \circ\!\!-\!\!\bullet\ \varphi$*, also* $\mathrm{e}^{-x^2/2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$*.*

Aufgabe: (1) Berechnen Sie den Wert $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ sowie
(2) $\widehat{\varphi}'(\xi) = -\xi\, \widehat{\varphi}(\xi)$ durch Ableitung unter dem Integral.
(3) Berechnen Sie hieraus die Funktion $\widehat{\varphi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

Lösung: (1) Die Fourier–Transformierte ist definiert durch

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x.$$

Den Wert für $\xi = 0$ kennen wir dank des Gaußschen Integrals:

$$\widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Fourier–Transformation der Normalverteilung

(2) Wir berechnen $\widehat{\varphi}'$ durch Differenzieren unter dem Integral:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varphi}'(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\xi}\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(\dots\ partielle Integration\dots)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\Big[\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\Big]_{x\to-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = -\xi\,\widehat{\varphi}(\xi)
\end{aligned}
$$

(3) Demnach genügt $\widehat{\varphi}$ der Differentialgleichung $\widehat{\varphi}'(\xi) = -\xi\,\widehat{\varphi}(\xi)$.

Wir trennen die Variablen gemäß $\widehat{\varphi}'(\xi)/\widehat{\varphi}(\xi) = -\xi$

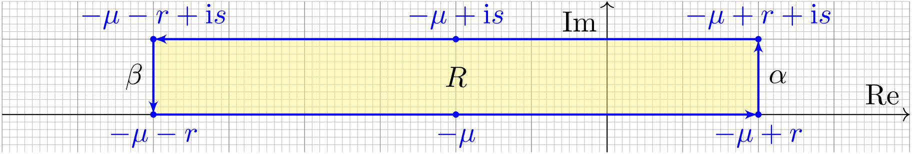
und integrieren zu $\ln\widehat{\varphi}(\xi) - \ln\widehat{\varphi}(0) = -\xi^2/2$.

Wir erhalten so die Lösung $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

Mit $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ folgt $\widehat{\varphi}(\xi) = (1/\sqrt{2\pi})\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

Fourier–Transformation der Normalverteilung

Aufgabe: Vergleichen Sie $\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x$ mit $\int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}s)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x$ dank des Cauchy–Integralsatzes und zeigen Sie Gleichheit für $r \to \infty$.



Lösung: Dies sind Wegintegrale der holomorphen Funktion $\mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}$:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\partial R} \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z &= \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}s)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\alpha} \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\beta} \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z \\
&\to \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}s)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

🙂 Die Wegintegrale längs α und β verschwinden für $r \to \infty$, denn $\left|\int_\alpha \mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\alpha \left|\mathrm{e}^{-z^2/2\sigma^2}\right| \cdot |\mathrm{d}\alpha| \le s\,\mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(\mathrm{i}s-\mu+r)^2/2\sigma^2} \to 0$.

Fourier–Transformation der Normalverteilung

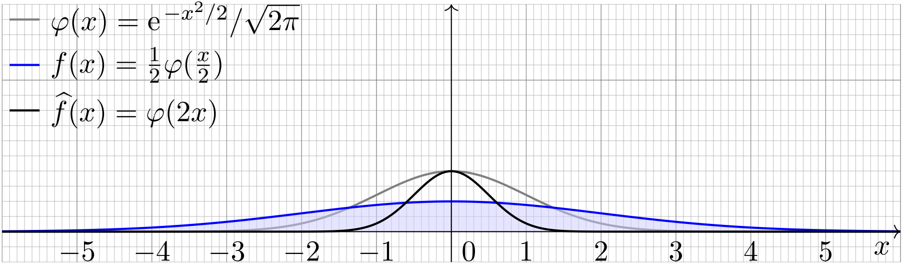
Aufgabe: Fourier–transformieren Sie die Normalverteilung

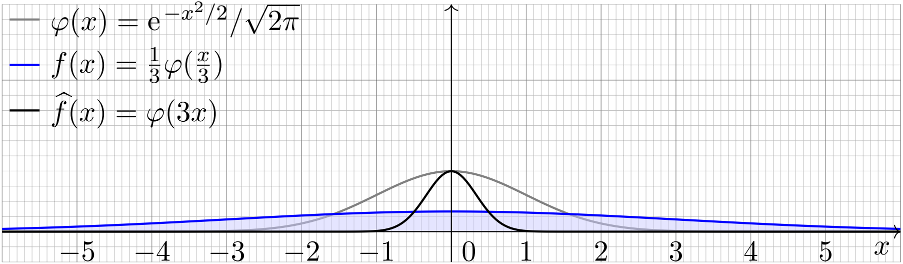
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi}\,\varphi(\sigma\xi).}$$

Lösung: Wir setzen die Definition ein und berechnen:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{qE}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}\sigma^2\xi)^2/2\sigma^2}}_{\text{quadratische Ergänzung}}\;\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2}}_{\text{Rest ohne } x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lin}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu+\mathrm{i}\sigma^2\xi)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Res}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi-\sigma^2\xi^2/2} \quad = \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi}\,\varphi(\sigma\xi)
\end{aligned}$$

Fourier–Transformation der Normalverteilung





Analytische Eigenschaften der Fourier–Transformation

Grundlegende Rechenregeln

Für die Transformation $f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt:

$$a f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet a\widehat{f}(\xi), \qquad f(x) + g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi),$$

$$f(-x) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(-\xi), \qquad \overline{f(x)} \circ\!\!-\!\!\bullet \overline{\widehat{f}(-\xi)},$$

$$f(ax) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|}\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big), \qquad \frac{1}{|a|} f\Big(\frac{x}{a}\Big) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(a\xi),$$

$$f(x-a) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}\widehat{f}(\xi), \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \widehat{f}(\xi - a),$$

$$\partial_x f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi), \qquad x\,f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi),$$

$$(f * g)(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{2\pi}\cdot\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{g}(\xi), \qquad f(x)\cdot g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi).$$

Streckung und Verschiebung

Konjugation:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Streckung: Substitution mit $y = ax$ für $a \neq 0$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y/a} f(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{|a|}.$$

Ortsverschiebung: Substitution mit $y = x - a$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(y+a)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Phasenverschiebung: Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi-a)x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ableitung und Multiplikation

Satz J2A

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *absolut integrierbar mit* $\mathscr{F}$*–Transformierter* $f \circ\!\!-\!\!\bullet\ \widehat{f}$.

(1) Ist f *absolut stetig und* $\partial_x f$ *über* $\mathbb{R}$ *absolut integrierbar, so gilt*

$$\boxed{\partial_x f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi).}$$

(2) Ist $x\,f(x)$ *über* $\mathbb{R}$ *absolut integrierbar, so ist* $\widehat{f}$ *stetig diff'bar und*

$$\boxed{x\,f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi).}$$

Beweis: Ableitung und Multiplikation

Beweis: (1) Für $f' = \partial_x f$ erhalten wir dank partieller Integration

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

(2) Dank $\int_{\mathbb{R}} |x f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ dürfen wir ∂_ξ unters Integral ziehen:

$$\begin{aligned}\widehat{xf(x)}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, x\, f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\partial_\xi\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\, f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}\partial_\xi\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\partial_\xi\, \widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

⚠ Die technischen Voraussetzungen sind leider wesentlich, sonst verwickelt sich die Rechnung leicht in verheerende Widersprüche.

Ableitung und Multiplikation: Normalverteilung

Wir betrachten erneut die Standard-Normalverteilung:

$$\boxed{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}}$$

(1) Die Funktion φ erfüllt die Differentialgleichung $\partial_x \varphi(x) + x\varphi(x) = 0$.

(2) Die $\mathscr{F}$–Transformierte erfüllt somit ebenfalls $\xi\widehat{\varphi}(\xi) + \partial_x \widehat{\varphi}(\xi) = 0$.

(3) Aus $\widehat{\varphi}'(\xi)/\widehat{\varphi}(\xi) = -\xi$ folgt durch Integration $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0)\, \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

(4) Mit dem Anfangswert $\widehat{\varphi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ folgt $\widehat{\varphi}(\xi) = (1/\sqrt{2\pi})\, \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

Ableitung und Multiplikation: Normalverteilung

Aufgabe:

Fourier–transformieren Sie $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ und $h(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Lösung: (1) Wir nutzen die Multiplikationsregel:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{-x^2/2} &&\circ\!\!-\!\!\bullet && \widehat{f}(\xi) &&= \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
g(x) &= x\,f(x) &&\circ\!\!-\!\!\bullet && \mathrm{i}\partial_\xi\,\widehat{f}(\xi) &&= -\mathrm{i}\xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
h(x) &= x^2\,f(x) &&\circ\!\!-\!\!\bullet && (\mathrm{i}\partial_\xi)^2\,\widehat{f}(\xi) &&= (1-\xi^2)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}
\end{aligned}$$

(2) Alternativ nutzen wir die Ableitungsregel:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{-x^2/2} &&\circ\!\!-\!\!\bullet && \widehat{f}(\xi) &&= \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
g(x) &= -\partial_x\,f(x) &&\circ\!\!-\!\!\bullet && -\mathrm{i}\xi\,\widehat{f}(\xi) &&= -\mathrm{i}\xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\\
h(x) &= \partial_x^2\,f(x) + f(x) &&\circ\!\!-\!\!\bullet && (\mathrm{i}\xi)^2\,\widehat{f}(\xi) + \widehat{f}(\xi) &&= (1-\xi^2)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2}
\end{aligned}$$

Faltung und Produkt

Satz J2B (Faltung und Produkt)

Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *absolut integrierbar, so auch ihre* ***Faltung***

$$\boxed{(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(x-s)\, \mathrm{d}s.}$$

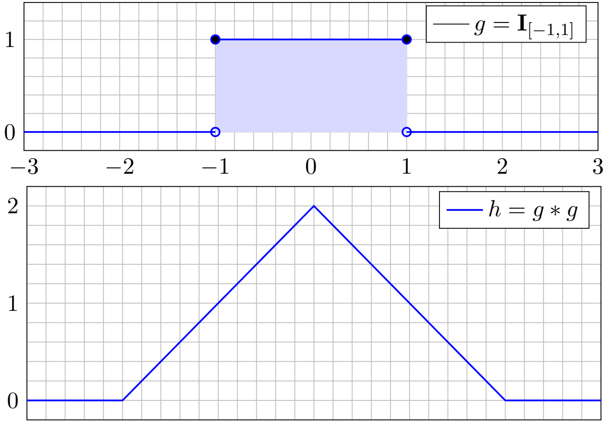
(1) Unter Fourier–Transformation wird sie zum punktweisen ***Produkt****:*

$$\boxed{(f * g)(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi)}$$

(2) Umgekehrt wird das punktweise Produkt zur Faltung:

$$\boxed{f(x) \cdot g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)}$$

Faltung von Rechteck zu Dreieck



☺ Faltung glättet! Hier ist g ist unstetig, hingegen $h = g * g$ stetig, $g * g * g$ sogar stetig differenzierbar, etc. Dies entspricht dem schnellen Abklingen der $\mathscr{F}$–Transformierten:
$\widehat{g}$ geht gegen Null wie $1/\xi$, hingegen $\widehat{h} = \widehat{g}^2$ wie $1/\xi^2$, dann $\widehat{g}^3$ sogar wie $1/\xi^3$, etc.

Die Fourier–Isometrie

Die quadrat-integrierbaren Funktionen bilden den Vektorraum

$$L^2 = L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \Big\{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\Big|\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \,\Big\}.$$

Auf diesem definieren wir Skalarprodukt und Norm durch

$$\langle\, f \mid g \,\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, g(x) \,\mathrm{d}x, \qquad \|f\|_{L^2}^2 := \langle\, f \mid f \,\rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Satz J3A (Plancherel 1910)

Die Fourier–Transformation $\mathscr{F} : f \mapsto \widehat{f}$ definiert die Isometrie

$$\boxed{\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \langle\, f \mid g \,\rangle = \langle\, \widehat{f} \mid \widehat{g} \,\rangle, \quad \|f\| = \|\widehat{f}\|.}$$

Anwendung des Satzes von Plancherel

Aufgabe: Wenden Sie Plancherel an auf die Spaltfunktion

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-a,a]} \circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi a)}{\xi} \quad \text{und berechnen Sie} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Lösung: Die linke Seite der Plancherel–Gleichung ist

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x = 2a.$$

Die rechte Seite der Plancherel–Gleichung ist

$$\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Die Gleichung $\|f\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f}\|_{L^2}^2$ liefert das gesuchte Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a)^2}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = a\pi$$

Anwendung des Satzes von Plancherel

Aufgabe: Bestimmen Sie mit Plancherel den Wert des Integrals

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{ab}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \, \mathrm{d}x \quad \text{für} \quad a, b > 0.$$

Lösung: Wir erkennen und nutzen die Fourier–Transformierte

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{-a|x|} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2+a^2} = \widehat{f}_a(\xi).$$

Plancherel transformiert ein schweres Integral in ein leichtes:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}_a(\xi)} \cdot \widehat{f}_b(\xi) \, \mathrm{d}\xi && = \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \overline{f_a(x)} \cdot f_b(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(a+b)|x|} \, \mathrm{d}x && = \pi \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+b)x} \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[\frac{-1}{a+b} \, \mathrm{e}^{-(a+b)x} \right]_{x=0}^{\infty} && = \frac{\pi}{a+b} \end{aligned}$$

Anwendung des Satzes von Plancherel

Aufgabe: Bestimmen Sie mit Plancherel den Wert des Integrals

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin(x)}{x+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Wir erkennen und nutzen die Fourier–Transformierten

$$f(x) = \mathbf{I}_{[-1,1]}(x) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\xi)}{\xi} = \widehat{f}(\xi),$$

$$g(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\xi^2} = \widehat{g}(\xi).$$

Plancherel transformiert ein schweres Integral in ein leichtes:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\,\widehat{f}(\xi)} \cdot \widehat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x-1)} \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,2]}(x)\cdot \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{x=0}^{2} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^{2} = \frac{\pi}{2}\Big[1-\mathrm{e}^{-2}\Big] = 1.35821\ldots \end{aligned}$$