Kapitel A

Konstruktion und Eigenschaften von Integralen

Inhalt dieses Kapitels

- Wie misst man Flächen- und Rauminhalt?
- Absolut integrierbare Funktionen

Integration: Theorie und Anwendung

Bildquelle: wikipedia.org

Bernhard Riemann
(1826–1866)

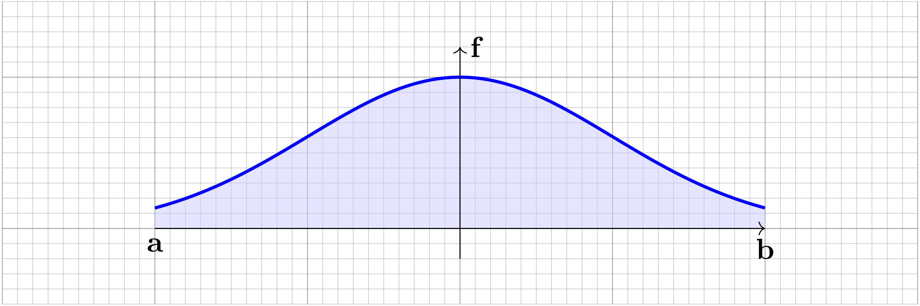
Bildquelle: wikipedia.org

Henri Lebesgue
(1875–1941)

1. Konstruktion: Was sind und was sollen Integrale?
2. Werkzeugkasten: Welche Rechenregeln gelten?
3. Training: Wie berechnet man konkrete Beispiele?

Eindimensionale Integration und Flächeninhalt

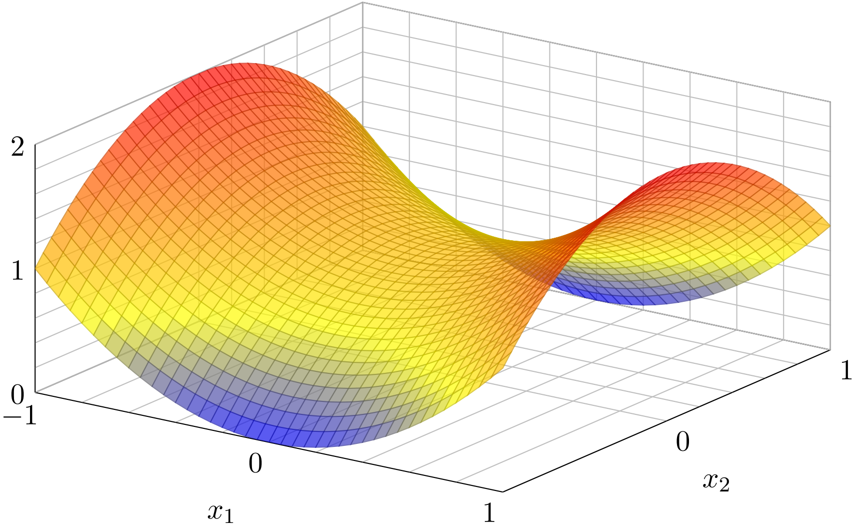
Grundidee: Sei $\Omega = [a,b]$ ein Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ misst die Fläche unter dem Graphen von f.



Verallgemeinerung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig.
Das Integral $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ misst das Volumen unter dem Graphen von f.

Höherdimensionale Integration und Volumen

Beispiel: Wir integrieren $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 - x_2^2$ über $\Omega = [-1, 1]^2$.



Intervalle und ihre Länge

Definition A0A

Für $a \le b$ haben wir die **endlichen Intervalle**

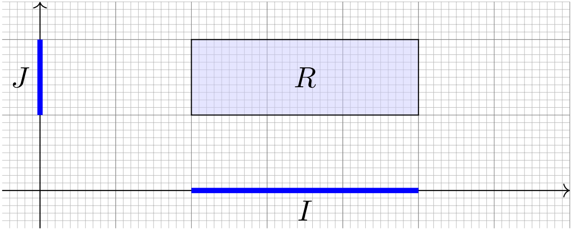
$$[a,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b \,\}, \quad]a,b[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\},$$
$$[a,b[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b \,\}, \quad]a,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b \,\},$$

sowie die **unendlichen Intervalle** wie $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ und

$$[a,+\infty[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x \,\}, \quad]a,+\infty[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \,\},$$
$$]-\infty,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le b \,\}, \quad]-\infty,b[:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < b \,\}.$$

Jedem Intervall $I \neq \emptyset$ ordnen wir die **Länge** $\operatorname{vol}_1(I) := \sup I - \inf I$ zu.

Rechtecke und ihr Flächeninhalt

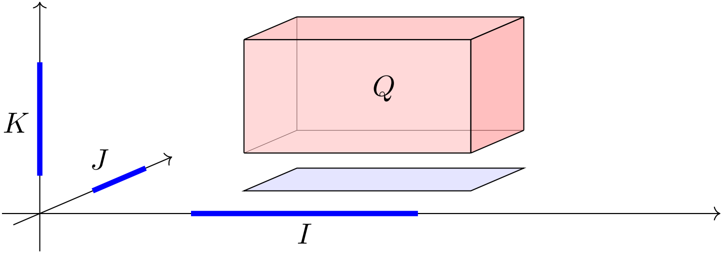


Zwei Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}$ bilden ein achsenparalleles **Rechteck** (Quader)

$$R = I \times J = \left\{ \, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in I,\ y \in J \, \right\}.$$

Es hat den **Flächeninhalt** $\operatorname{vol}_2(R) := \operatorname{vol}_1(I) \cdot \operatorname{vol}_1(J)$.

Quader und ihr Rauminhalt



Je drei Intervalle $I, J, K \subset \mathbb{R}$ definieren einen achsenparallelen **Quader**

$$Q = I \times J \times K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in I,\ y \in J,\ z \in K \right\}.$$

Er hat den **Rauminhalt** $\operatorname{vol}_3(Q) := \operatorname{vol}_1(I) \cdot \operatorname{vol}_1(J) \cdot \operatorname{vol}_1(K)$.

Quader in beliebiger Dimension

Definition A0B

Eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^n$ heißt achsenparalleler **Quader**, falls

$$Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$$

mit Intervallen $I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$. Sein n–dimensionales **Volumen** ist

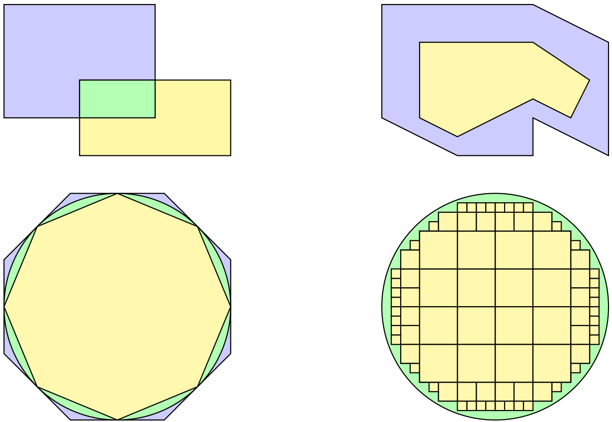
$$\operatorname{vol}_n(Q) := \operatorname{vol}_1(I_1) \cdot \operatorname{vol}_1(I_2) \cdots \operatorname{vol}_1(I_n).$$

Satz A0C (Streckung und Verschiebung)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\operatorname{vol}_n(aQ + v) = |a|^n \operatorname{vol}_n(Q)$.

Wie misst man Flächen- und Rauminhalt?

Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^2$ wollen wir ihren Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(A) \in [0, \infty]$ zuweisen. **Problem**: Welche Mengen sind messbar? Wie?



Ebenso für den Rauminhalt $\operatorname{vol}_3(A)$ von Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^3$, und allgemein für das n–dim. Volumen $\operatorname{vol}_n(A)$ von Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$.

Definierende Eigenschaften des Volumens

Messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ und ihr n–dimensionales Volumen $\operatorname{vol}(A) \in [0, +\infty]$ definiert man nach den folgenden Grundregeln:

Normierung: Das Volumen $\operatorname{vol}(A)$ eines n–dimensionalen Quaders $A \subset \mathbb{R}^n$ ist das Produkt seiner Seitenlängen.

Additivität: Es gilt $\operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B) = \operatorname{vol}(A \cup B) + \operatorname{vol}(A \cap B)$.

Monotonie: Aus $A \subset B$ folgt aus der Additivität $\operatorname{vol}(A) \le \operatorname{vol}(B)$.

Einschachtelung: Gilt $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset C \subset \ldots \subset B_1 \subset B_0$ mit $\operatorname{vol}(B_k \smallsetminus A_k) \searrow 0$, so auch $\operatorname{vol}(A_k) \nearrow \operatorname{vol}(C) \swarrow \operatorname{vol}(B_k)$ (folgt aus der Monotonie).

Ausschöpfung: Insbesondere gilt für $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ mit Vereinigung $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, dass $\operatorname{vol}(A_k) \nearrow \operatorname{vol}(A)$.

Grundlegende Eigenschaften

Satz A0D (Lebesgue 1901)

Mit diesen fünf Regeln können wir jeder messbaren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ eindeutig ihr Volumen $\operatorname{vol}(A) \in [0, \infty]$ zuweisen und ausrechnen.

⚠ Das Ergebnis ist eindeutig und insbesondere unabhängig vom Rechenweg.

⚠ Nichtmessbare Mengen existieren!

☺ Alle in der Praxis betrachteten Mengen sind messbar.

- Alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ sind messbar.
- Ist eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar, so auch ihr Komplement $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$.
- Sind $A_0, A_1, A_2, \dots$ messbar, so auch $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

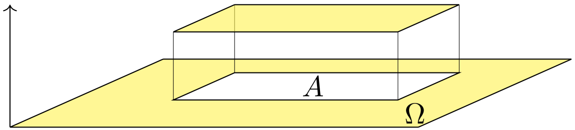
Grundidee: Das Integral misst das Volumen.

Wir wollen nun das Integral erklären. Grundidee: Das Integral $\int_\Omega f$ soll das Volumen unter dem Funktionsgraphen messen. Dies lässt sich besonders leicht für „Treppenfunktionen“ wie auf diesem Bild ausrechnen: Die Dachfläche können wir uns als Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ vorstellen.

Indikatorfunktionen

Zunächst definieren wir die **Indikatorfunktion** einer Teilmenge $A \subset \Omega$ durch

$$\mathbf{I}_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{I}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$



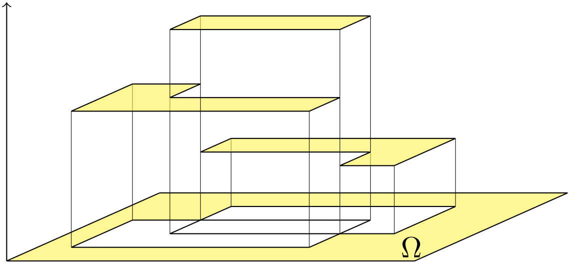
Das Integral misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, hier also

$$\boxed{\int_\Omega \mathbf{I}_A(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{vol}_n(A) \quad \text{und daher} \quad \int_\Omega a\ \mathbf{I}_A(x)\,\mathrm{d}x = a\,\mathrm{vol}_n(A).}$$

Treppenfunktionen

Zu Quadern $Q_k \subset \Omega$ und $a_k \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Treppenfunktion**

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \, \mathbf{I}_{Q_k}(x).$$



Das Integral misst das Volumen unter dem Funktionsgraphen, hier also

$$\boxed{\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{\ell} a_k \, \mathbf{I}_{Q_k}\right)(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \operatorname{vol}_n(Q_k).}$$

Definition: messbare Funktionen und ihr Integral

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader. Messbare Funktionen $f : \Omega \to [0, \infty]$ und ihr Integral $\int_\Omega f \in [0, \infty]$ definieren wir nach folgenden fünf Grundregeln:

(1) **Normierung:** Für jeden endlichen Quader $A \subset \Omega$ gilt $\int_\Omega \mathbf{I}_A = \operatorname{vol}_n(A)$.

(2) **Linearität:** Für alle $a,\ b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\int_\Omega (af + bg) = a \int_\Omega f + b \int_\Omega g$.

(3) **Monotonie:** Aus $f \leq g$ folgt $\int_\Omega f \leq \int_\Omega g$ (wegen Linearität).

(4) **Einschachtelung:** Gilt $f_0 \leq f_1 \leq \ldots \leq h \leq \ldots \leq g_1 \leq g_0$ und $\int_\Omega (g_k - f_k) \searrow 0$, so gilt wegen Monotonie $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega h \swarrow \int_\Omega g_k$.

(5) **Ausschöpfung:** Gilt $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ mit $f_k \nearrow f$, dann $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$.

Bedingungen (1–3) lassen sich erfüllen.

Satz A0E (Treppenfunktionen und ihr Integral)

Bedingungen (1–3) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die ***Treppenfunktionen*** $f : \Omega \to [0, \infty[$,

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } Q_k \subset \mathbb{R}^n \text{ endliche Quader.}$$

Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–3) bestimmt, denn es gilt

$$\int_\Omega f = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^{\ell} c_k \, \mathbf{I}_{Q_k} \right] = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \int_\Omega \mathbf{I}_{Q_k} = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \operatorname{vol}_n(Q_k).$$

Bedingungen (1–4) lassen sich erfüllen.

Satz A0F (Riemann 1854, Darboux 1875)

Bedingungen (1–4) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die ***Riemann–integrierbaren Funktionen*** $f:\Omega \to [0,\infty[$. *Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–4) bestimmt.*

🙂 Die Konstruktion über Riemann–Summen kennen Sie aus der HM2.

🙂 Diese Menge enthält alle Treppenfunktionen und noch viel mehr, z.B. stetige Funktionen $f:\Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf kompakten Quadern $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

🙁 Viele für uns wichtige Funktionen sind nicht Riemann–integrierbar.

Satz A0G (Charakterisierung R-integrierbarer Funktionen)

Genau dann ist f Riemann–integrierbar, wenn f beschränkten Träger und beschränkten Wertebereich hat und zudem fast überall stetig ist.

Bedingungen (1–5) lassen sich erfüllen.

Satz A0H (Lebesgue 1901)

Bedingungen (1–5) lassen sich erfüllen. Die kleinste Funktionenmenge, für die dies möglich ist, sind die ***Lebesgue–messbaren Funktionen*** $f : \Omega \to [0, \infty]$. *Hierauf ist das Integral eindeutig durch (1–5) bestimmt.*

☺ Ganz einfach: Alle für uns wichtigen Funktionen sind messbar!

Satz A0I

Alle Treppenfunktionen und alle stetigen Funktionen sind messbar. Mit f, g *sind* $f + g$ *und* $f \cdot g$ *sowie* $\min(f, g)$ *und* $\max(f, g)$ *messbar. Konvergiert* $f_k \to f$ *und sind alle* f_k *messbar, so ist auch* f *messbar.*

☺ Die nächsten Kapitel entwickeln praktische Rechenmethoden.

Integration über beliebige Bereiche

Definition A0J

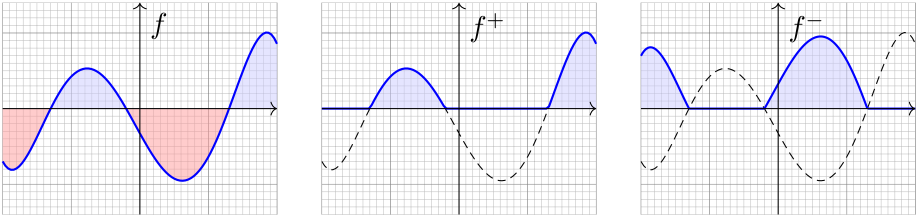
Zu jeder Funktion $f : A \subset \Omega \to [0, \infty]$ definieren wir ihre **Fortsetzung**

$$\tilde{f} : \Omega \to [0, \infty] \quad \text{durch} \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A, \end{cases}$$

Wir nennen die Funktion f **messbar**, wenn ihre Fortsetzung $\tilde{f}$ auf Ω messbar ist. In diesem Falle definieren wir ihr **Integral** durch

$$\boxed{\int_A f(x)\,\mathrm{d}x := \int_\Omega \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Positive und negative Beiträge zum Integral



Wir zerlegen $f = f^+ - f^-$ in **Positivteil** f^+ und **Negativteil** f^- gemäß

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beim Integral soll f^- negativ zählen, also $\int_\Omega f := \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-$.

⚠ Diese Differenz ist nur sinnvoll, wenn beide Integrale endlich sind.

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Definition A0L

Für jede Funktion $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ gilt $f=f^+-f^-$ und $|f|=f^++f^-$.
Genau dann ist f **messbar**, wenn $f^\pm:\Omega\to[0,\infty]$ messbar sind.
In diesem Falle ist auch $|f|=f^++f^-$ messbar, und somit gilt

$$\int_\Omega \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f^+(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega f^-(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist dieser Wert endlich, so nennen wir f **(absolut) integrierbar**.
In diesem Falle können wir das Integral von f definieren durch

$$\boxed{\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x := \int_\Omega f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f^-(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Schreibweisen für Integrale

Das Integral einer Funktion $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ schreiben wir wahlweise

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Bezeichnung der Integrationsvariablen ist dabei willkürlich:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Omega f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\Omega f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \dots$$

Speziell für $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ schreibt man auch

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \dots.$$

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ schreibt man auch

$$\int_\Omega f = \iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) \dots.$$

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ schreibt man auch

$$\int_A f = \iiint_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z) = \int_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z) \dots.$$

Absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral

Satz A0M (absolut integrierbare Funktionen und ihr Integral)

Die Menge aller absolut integrierbaren Funktionen

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_\Omega |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Hierauf ist das Integral eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung

$$L^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \int_\Omega f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Sie ist normiert, monoton, erfüllt Einschachtelung und Ausschöpfung.

Durch diese fünf Eigenschaften ist das Integral eindeutig bestimmt. Schränkt man das Lebesgue–Integral auf Riemann-integrierbare Funktionen ein, so erhält man das Riemann–Integral.

Konstruktion und Eigenschaften von Integralen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to [0, +\infty]$ eine nicht-negative integrierbare Funktion, z.B. f stetig. Solchen Funktionen ordnen wir nach folgenden Grundregeln ihr **Integral** $\int_\Omega f \in [0, +\infty]$ zu:

(1) **Normierung:** Für alle endlichen Quader $A \subset \Omega$ gilt $\int_\Omega \mathbf{I}_A = \mathrm{vol}_n(A)$.

(2) **Linearität:** Für alle $a,\, b \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ gilt $\int_\Omega (af + bg) = a \int_\Omega f + b \int_\Omega g$.

(3) **Monotonie:** Aus $f \le g$ folgt $\int_\Omega f \le \int_\Omega g$ dank Additivität.

(4) **Einschachtelung:** Gilt $f_0 \le f_1 \le \dots \le h \le \dots \le g_1 \le g_0$ und $\int_\Omega (g_k - f_k) \searrow 0$, so gilt dank Monotonie $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega h \swarrow \int_\Omega g_k$.

(5) **Ausschöpfung:** Gilt $f_0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ mit $f_k \nearrow f$ (punktweise Konvergenz), dann $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$.

🙂 **Daumenregel:** Das Integral ist sinnvoll definiert, wenn f Werte in $[0, +\infty]$ annimmt oder $\int_\Omega |f| < +\infty$ für $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ gilt!