Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)
Übungsblatt 9

1*. Eine k-Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ auf einem Vektorraum V heißt *zerlegbar*, falls

$$\omega = \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k$$

mit $\phi_i \in V^*$. Beweisen Sie:

a) Ist $\dim V \leq 3$, dann ist jede 2-Form auf V zerlegbar.

b) Sei $\dim V \geq 4$ und $\phi_i \in V^*$, $i = 1, \ldots, 4$, linear unabhängig. Dann ist die 2-Form $\omega = (\phi_1 \wedge \phi_2) + (\phi_3 \wedge \phi_4)$ nicht zerlegbar.

2. Der *Annihilator* einer k-Form $\omega \neq 0$ auf einem Vektorraum V ist definiert durch

$$\mathrm{Ann}(\omega) = \{\phi \in V^* \mid \phi \wedge \omega = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\dim \mathrm{Ann}(\omega) \leq k$ für jede k-Form $\omega \neq 0$.

b) Zeigen Sie, dass $\dim \mathrm{Ann}(\omega) = k$ genau dann, wenn $\omega \neq 0$ zerlegbar ist.

3*. Sei V ein d-dimensionaler Vektorraum und $\omega_1, \ldots, \omega_p$ linear unabhängige 1-Formen auf V. Seien $\theta_1, \ldots, \theta_p$ 1-Formen auf V, so dass

$$\sum_{i=1}^{p} \theta_i \wedge \omega_i = 0.$$

Beweisen Sie, dass es eine symmetrische $p \times p$-Matrix (A_{ij}) gibt, so dass

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{p} A_{ij}\omega_j, \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, p.$$

4. Seien $f_1, \ldots, f_n \colon M \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n. Zeigen Sie, dass $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon M \to \mathbb{R}^n$ in einer Umgebung des Punktes p eine Karte bildet, genau dann, wenn

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_n(p) \neq 0.$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 17. Dezember 2012** in der Übung ab.