Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 8

1*. Sei $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ die Menge der Derivationen der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und sei $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ die Gruppe der Lie-Algebren-Automorphismen. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})).$$

2. Eine Lie-Gruppe G wirke auf einer Mannigfaltigkeit M. Für einen festen Punkt $p \in M$ sei $\beta \colon G \to M$ definiert durch $\beta(g) = g \cdot p$. Zeigen Sie:

$$\ker(d\beta_e) = \mathrm{Lie}(G_p),$$

wobei $G_p \subset G$ der Stabilisator von p ist.

3. Sei M die Menge der komplexen Strukturen auf einem gerade-dimensionalen reellen Vektorraum V, d.h. $M := \{J \in \mathrm{End}(V) | J^2 = -\mathrm{Id}_V\}$. Beweisen Sie, dass M ein homogener Raum ist. Finden Sie dazu Lie-Gruppen G und H mit $M = G/H$.

4*. Eine Lie-Gruppe G wirke auf einer Mannigfaltigkeit M. Zu jedem $X \in \mathfrak{g}$ ist dann ein Vektorfeld $\tilde{X}$ auf M definiert durch:

$$\tilde{X}_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\exp tX \cdot p), \text{ für } p \in M.$$

Man nennt $\tilde{X}$ das fundamentale Vektorfeld zu X. Beweisen Sie:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = -\widetilde{[X, Y]}\ .$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 10. Dezember 2012** in der Übung ab.