Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)
Übungsblatt 7

1*. a) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$f\colon (-\epsilon,\epsilon)\times M \to M, f(t,x)=f_t(x)$$

eine differenzierbare Abbildung. Leiten Sie eine Formel für $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_t(\gamma(t))$ für eine differenzierbare Kurve $\gamma\colon (-\epsilon,\epsilon)\to M$ durch den Punkt $p\in M$ her.

b) Seien $\alpha,\beta\colon (-\epsilon,\epsilon)\to G$ glatte Kurven in einer Lie-Gruppe G mit $\alpha(0)=\beta(0)=e$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\alpha\cdot\beta)(t) = \dot\alpha(0)+\dot\beta(0).$$

2. Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $H\subset G$ eine zusammenhängende Lie-Untergruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$. Beweisen Sie, dass $H\subset G$ genau dann ein Normalteiler ist, wenn $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ ein Ideal ist, d.h. wenn $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}$ gilt.

3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektorkreuzprodukt $\times$ eine Lie-Algebra isomorph zu $\mathfrak{so}(3)$ ist.

4*. Wir identifizieren $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$ mit dem folgenden Vektorraum V:

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & -\bar b\\ b & \bar a\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{C}\right\}.$$

Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ induziert ein Skalarprodukt $\langle\,,\,\rangle$ auf V.

a) Zeigen Sie, dass $\det(X)=\langle X,X\rangle$ für alle $X\in V$.

b) Ein Element $(A_+,A_-)\in SU(2)\times SU(2)$ operiere auf V durch

$$X\mapsto A_- X A_+^{-1}.$$

Beweisen Sie, dass diese Abbildung einen differenzierbaren Gruppenhomomorphismus $\phi\colon SU(2)\times SU(2)\to SO(4)$ definiert.

c) Zeigen Sie, dass ϕ eine Immersion ist und einen Gruppenisomorphismus

$$SU(2)\times SU(2)/K \xrightarrow{\cong} SO(4)$$

induziert, wobei $K=\{(I,I),(-I,-I)\}\cong\mathbb{Z}_2$ mit der Einheitsmatrix I.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 3. Dezember 2012** in der Übung ab.