Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 6

1*. Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und U eine offene Umgebung des neutralen Elements $e \in G$. Für $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bezeichne U^n die Menge aller Produkte $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ mit $a_i \in U$. Beweisen Sie:

a) U^n ist offen für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U^n$.

2*. Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements $e \in G$. Zeigen Sie:

a) H ist eine Untergruppe von G.

b) H ist ein Normalteiler.

3. Zeigen Sie, dass die Lie-Klammer der Lie-Algebra von $GL(n, \mathbb{R})$ gegeben ist durch

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A\ ,$$

wobei $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$ reelle $n \times n$-Matrizen sind.

4*. a) Sei $\langle\, ,\, \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n^2}$. Zeigen Sie, dass unter der Identifikation der $n \times n$ Matrizen $M(n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ gilt:

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(XY^T),$$

für alle Matrizen $X, Y \in M(n, \mathbb{R})$, wobei tr die Spur und Y^T die transponierte Matrix ist.

b) Beweisen Sie, dass die Gruppe $O(n)$ kompakt ist.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 26. November 2012** in der Übung ab. Dieses Mal sind drei Aufgaben abzugeben, da sie etwas leichter sind.