Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)
Übungsblatt 5

1. Sei $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in N$ ein Punkt. Über das Differential der Inklusionsabbildung $i\colon N \to M$ sei T_pN als Unterraum von T_pM realisiert. Zeigen Sie: Ist N das Urbild eines regulären Wertes einer differenzierbaren Abbildung $f\colon M \to X$, dann gilt

$$T_pN = \ker df_p.$$

2. Die orthogonale Gruppe $O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit des Vektorraums $M(n, \mathbb{R})$ der reellen $n \times n$ Matrizen. Bestimmen Sie den Tangentialraum an $O(n)$ in der Einheitsmatrix E als Unterraum von $M(n, \mathbb{R})$.

3*. a) Seien $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und X, Y Vektorfelder auf M, die in jedem Punkt von N tangential an N sind. Dann existieren die Einschränkungen X_N und Y_N als Vektorfelder auf N. Beweisen Sie, dass der Kommutator $[X, Y]$ in jedem Punkt von N tangential an N ist und dass

$$[X_N, Y_N] = [X, Y]_N.$$

b) Seien $X_1, X_2, X_3\colon S^3 \to \mathbb{R}^4$ die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} X_1(x, y, z, w) &= (-y, x, -w, z) \\ X_2(x, y, z, w) &= (z, -w, -x, y) \\ X_3(x, y, z, w) &= (-w, -z, y, x). \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind Vektorfelder auf S^3. Berechnen Sie die Kommutatoren $[X_i, X_j]$ für $1 \le i, j \le 3$.

4*. Wir bezeichnen mit S^2 die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ und mit $A \subset S^2$ den Äquator

$$A = S^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times 0).$$

Sei X ein Vektorfeld auf S^2, das entlang dem Äquator nirgends tangential an ihn ist. Zeigen Sie, dass dann jede Integralkurve von X den Äquator höchstens einmal trifft.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben ausnahmsweise am **Dienstag, den 20. November 2012 um 11.30 Uhr in Raum 7.530** in der Übung ab.