**Universität Stuttgart**

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

**Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)**
**Übungsblatt 4**

Im folgenden seien $M$ und $N$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $m$ bzw. $n$.

1. a) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $X\colon M \to TM$, mit $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$, genau dann ein glattes Vektorfeld auf $M$ ist, wenn sie bezüglich lokaler Koordinaten $(U, x)$ als

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

geschrieben werden kann, wobei $a_i$ glatte Funktionen auf $U$ sind.

b) Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Beweisen Sie, dass dann auch das Differential $df\colon TM \to TN$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten ist.

2*. a) Seien $X, Y, Z$ beliebige Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit $M$. Beweisen Sie die sogenannte Jacobi-Identität:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \ .$$

b) Sei $M = \mathbb{R}^2$ mit den Standardkoordinaten $(x_1, x_2)$ und $e_1, e_2$ die Vektorfelder $e_1 = \partial/\partial x_1$, $e_2 = \partial/\partial x_2$. Berechnen Sie den Kommutator der Vektorfelder $V = x_1^2 x_2 e_1 + e_2$ und $W = x_1 e_1 - x_2^2 e_2$ auf $\mathbb{R}^2$.

3. Zeigen Sie, dass die Sphäre $S^{4k+3}$, für jede natürliche Zahl $k \geq 0$, drei nirgends verschwindende Vektorfelder hat, die in jedem Punkt linear unabhängig sind.

4*. a) Sei $E \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ die Teilmenge

$$E = \{([x], \lambda x) \mid x \in S^n, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass $E$ mit der Projektion auf den ersten Faktor ein Vektorbündel vom Rang 1 über $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist. Für $n = 1$ heißt $E$ das *Möbiusband* über $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1$.

b) Beweisen Sie, dass für $n \geq 1$ jeder (stetige oder differenzierbare) Schnitt $s\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to E$ eine Nullstelle hat.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 12. November 2012** in der Übung ab.