Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 3

1. Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Wir bezeichnen mit $K_p(M)$ die Menge aller Karten (U, x) um p und mit $V_p(M)$ die Menge aller Abbildungen $v\colon K_p(M) \to \mathbb{R}^n$, so dass:

$$v(V, y) = J_{x(p)}(y \circ x^{-1}) \cdot v(U, x)$$

wobei J die Jacobi-Matrix bezeichnet und $(U, x), (V, y)$ zwei Karten um p sind.

a) Beweisen Sie, dass $V_p(M)$ ein reeller Vektorraum ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung, die jedem $\xi \in T_pM$ die Abbildung $(U, x) \mapsto (L_\xi(x_1), \ldots, L_\xi(x_n))$ zuordnet, einen Isomorphismus zwischen T_pM und $V_p(M)$ definiert. Geben Sie die Umkehrabbildung an. (Tangentialvektoren in einem Punkt können also in jeder Karte als Elemente von $\mathbb{R}^n$ angesehen werden, die ein bestimmtes Transformationsverhalten unter Kartenwechseln haben. Diese Sichtweise wird oft in der Physik verwendet, z.B. in der Relativitätstheorie.)

2. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ ein Punkt und $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Beschreiben Sie das Differential $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ bezüglich der Realisierung von T_pM als $\mathcal{D}_p(M)$ bzw. $V_p(M)$.

3*. Sei X ein Hausdorffraum und M eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$.

a) Sei $p \in X$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass $\{p\} \subset X$ abgeschlossen ist.

b) Sei $p \in M$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass $M \setminus \{p\}$ nicht kompakt ist.

c) Sei M kompakt und $V \subset M$ offen. Zeigen Sie, dass $M \setminus V$ kompakt ist.

4*. Seien $n, d \geq 1$ beliebige natürliche Zahlen. Beweisen Sie, dass die Teilmenge

$$M(n, d) = \{[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \mid \sum_{i=0}^{n} z_i^d = 0\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ der (reellen) Kodimension 2 ist. $M(n, d)$ heißt *Fermat-Hyperfläche vom Grad d in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$*.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 5. November 2012** in der Übung ab.