



Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)
Übungsblatt 2

Im folgenden seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n .

1. a) Sei $f: M \rightarrow N$ eine Submersion. Zeigen Sie, dass $m \geq n$ und f lokal von der Form

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

ist, d.h. für jeden Punkt $p \in M$ existieren Karten (U, x) um p bzw. (V, y) um $f(p)$, so dass die Abbildung $y \circ f \circ x^{-1}$ von der angegebenen Form ist.

b) Sei $f: M \rightarrow N$ eine Immersion. Zeigen Sie analog, dass $m \leq n$ und f lokal von der Form

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

ist. Geben Sie ein Beispiel für eine Immersion an, die nicht injektiv ist und für eine injektive Immersion, die keine Einbettung ist.

2*. Sei $f: M \rightarrow N$ eine Submersion.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung f offen ist, d.h. Bilder offener Mengen in M unter f sind offen in N .

b) Sei M kompakt und N zusammenhängend. Beweisen Sie, dass f surjektiv ist.

3*. a) Beweisen Sie, dass eine differenzierbare Abbildung $f: M \rightarrow N$ genau dann eine Einbettung ist, wenn f eine Immersion und ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

b) Sei M kompakt und $f: M \rightarrow N$ eine injektive Immersion. Zeigen Sie, dass f eine Einbettung ist.

4. Beweisen Sie, dass es eine Einbettung des Produkts $S^p \times S^q$ von Sphären in den $\mathbb{R}^{p+q+1}$ für alle $p, q \geq 0$ gibt (insbesondere gibt es eine Einbettung von T^2 in $\mathbb{R}^3$).

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 29. Oktober 2012** in der Übung ab. Sie können in Ihren Lösungen die Aussagen der anderen Aufgaben ohne Beweis verwenden.