Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)
Übungsblatt 14

1. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel mit kovarianter Ableitung ∇. Bezeichne ∇ auch die induzierte kovariante Ableitung auf $\mathrm{End}(E)$, definiert durch

$$(\nabla_X L)(Y) = \nabla_X(L(Y)) - L(\nabla_X Y).$$

Beweisen Sie, dass die Krümmung gegeben ist durch

$$R^{\mathrm{End}(E)}_{XY} L = [R^E_{XY}, L],$$

wobei $[\cdot,\cdot]$ der Kommutator zweier Endomorphismen von E ist und R^E_{XY} als Endomorphismus von E interpretiert wird.

2*. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, X ein Killing-Vektorfeld und Z ein beliebiges Vektorfeld. Auf M definieren wir die Funktionen $f = g(X,X)$ und

$$h = \frac{1}{2} L_Z L_Z g(X,X) - g(R(X,Z)X,Z).$$

Sei $p \in M$ ein kritischer Punkt von f. Beweisen Sie, dass im Punkt p die folgenden Formeln gelten:

(a) $\nabla_X X = 0$ und $g(\nabla_Z X, X) = 0$.

(b) $h = g(\nabla_{[X,Z]}X, Z) - g(\nabla_X X, \nabla_Z Z) - g(\nabla_X \nabla_Z X, Z)$.

(c) $h = g(\nabla_Z X, \nabla_Z X)$.

3*. Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und X ein Killing-Vektorfeld. Im Punkt $p \in M$ gelte $X_p \neq 0$. Sei $A\colon T_pM \to T_pM, Z \mapsto \nabla_Z X$ und $E \subset T_pM$ das orthogonale Komplement von X_p.

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von A einen schiefsymmetrischen Endomorphismus $A\colon E \to E$ definiert.

b) Beweisen Sie mit Aufgabe 2 folgenden Satz von Berger: Auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit gerader Dimension, deren Schnittkrümmung in jedem Punkt positiv ist, hat jedes Killing-Vektorfeld eine Nullstelle.

4. Sei $(M \times N, \pi_M^* g_M + \pi_N^* g_N)$ ein Produkt Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten Vektorfelder X und Y auf dem Produkt, die tangential an M und N sind. Zeigen Sie, dass $\nabla_X Y = 0$ und $K(X,Y) = 0$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 4. Februar 2013** in der Übung ab.