Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 13

Im Folgenden sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang ∇.

1*. Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Als *Gradient* von f bezeichnet man das Vektorfeld $\mathrm{grad}(f)$, das unter dem von der Metrik induzierten Isomorphismus von TM und T^*M dem Differential df entspricht. Das heißt,

$$g(\mathrm{grad}(f), X) = L_X f = df(X)$$

für alle Vektorfelder X auf M. Beweisen Sie:

a) In lokalen Koordinaten gilt $\mathrm{grad}(f) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, wobei (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix ist.

b) Eine Integralkurve $c_p(t)$ eines Vektorfeldes X liegt in einer Niveaufläche der Funktion f, d.h. $f(c_p(t)) = \text{const.}$, genau dann, wenn X in jedem Punkt entlang der Kurve senkrecht auf $\mathrm{grad}(f)$ bezüglich der Metrik g steht.

2. a) Wir betrachten ein Vektorfeld Y auf M konstanter Länge und ein beliebiges Vektorfeld X. Zeigen Sie, dass $\nabla_X Y$ in jedem Punkt senkrecht auf Y steht.

b) Sei M orientiert und $dvol_g$ das kanonische Volumenelement (Blatt 12, Aufgabe 4). Zeigen Sie, dass $dvol_g$ eine parallele Form ist.

3*. Sei $N = M \times \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ differenzierbar und g_N die durch

$$g_N = f(t)^2 g_M + dt^2$$

definierte Metrik auf N, wobei dt^2 die Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ und g_M die Metrik auf M ist. Hier identifizieren wir $T_{(p,t)}N$ mit $T_pM \oplus T_t\mathbb{R}$. Die Metrik g_N heißt *warped product*. Bestimmen Sie den Levi-Civita Zusammenhang von g_N.

4. Sei M zusammenhängend. Zeigen Sie, dass die Länge paralleler Vektorfelder auf M konstant ist und dass die parallelen Vektorfelder einen endlichdimensionalen Vektorraum bilden.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 28. Januar 2013** in der Übung ab.