Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 12

1*. a) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension eins. Zeigen Sie, dass M genau dann orientierbar ist, wenn ein nirgends verschwindendes differenzierbares Vektorfeld V entlang M existiert, das in jedem $p \in M$ senkrecht auf T_pM steht.

b) Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und $W \subset M$ Urbild eines regulären Wertes von f. Beweisen Sie: Ist M orientierbar, dann ist W orientierbar.

2*. Der Torus T^2 ist definiert durch $T^2 = S^1 \times S^1$. Es gibt zwei Inklusionen $i_1, i_2\colon S^1 \to S^1 \times S^1$, gegeben durch den entsprechenden Faktor kreuz einen Punkt auf dem anderen, und zwei Projektionen $p_1, p_2\colon S^1 \times S^1 \to S^1$. Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}} H^1_{dR}(T^2) \geq 2$. Sie dürfen voraussetzen, dass $H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$.

3. Eine *n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit* ist definiert als eine topologische Mannigfaltigkeit, die einen Atlas aus Karten nach $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ besitzt, so dass die Kartenwechsel biholomorph sind. Zeigen Sie, dass komplexe Mannigfaltigkeiten eine kanonische Orientierung besitzen.

4. Sei (M, g) eine n-dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Das *kanonische Volumenelement* von M ist definiert als die n-Form $dvol_g \in \Omega^n(M)$ mit $dvol_g(e_1, \dots, e_n) = 1$ für alle positiv orientierten Orthonormalbasen $\{e_i\}$ von T_pM für alle $p \in M$.

a) Zeigen Sie, dass $dvol_g$ wohldefiniert ist.

b) Beweisen Sie, dass in jeder Karte der Orientierung von M gilt

$$dvol_g = \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

wobei $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ die Komponenten des metrischen Tensors sind.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 21. Januar 2013** in der Übung ab.