Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 11

1*. Sei $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ und $V = \sum_{i=1}^n v_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$.

a) Berechnen Sie $\eta = i_V \omega$.

b) Berechnen Sie $d\eta$. Wie hängt $d\eta$ mit der Divergenz von V zusammen?

c) Sei $j\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ die Inklusion. Finden Sie ein Vektorfeld V auf $\mathbb{R}^n$, so dass $j^*\eta$ eine nirgends verschwindende $(n-1)$-Form auf S^{n-1} ist.

2*. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachte man die 1-Form

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy.$$

Zeigen Sie:

a) ω ist geschlossen.

b) ω ist nicht exakt.

3. Sei ω die 1-Form aus Aufgabe 2.

a) Sei $i\colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Inklusion und $\sigma = i^*\omega$. Wir betrachten die Abbildung $c\colon [0,1] \to S^1$, gegeben durch

$$c(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

Zeigen Sie, dass $c^*\sigma = 2\pi dx$.

b) Beweisen Sie, dass $H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$, erzeugt von der Klasse von σ.

4. Sei Δ eine k-dimensionale Distribution auf einer Mannigfaltigkeit M. Sei $\Omega(\Delta)$ die Menge aller l-Formen ω auf M (l beliebig), so dass $\omega(X_1, \ldots, X_l) = 0$, falls $X_1, \ldots, X_l$ Schnitte von Δ sind. Zeigen Sie, dass Δ genau dann integrabel ist, wenn

$$d(\Omega(\Delta)) \subset \Omega(\Delta).$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den mit einem Stern markierten Aufgaben am **Montag, den 14. Januar 2013** in der Übung ab.