Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57
Wintersemester 2012/13

Differentialgeometrie (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 1

1. Ein topologischer Raum heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt kompakt, falls sie in der Teilraumtopologie kompakt ist. Seien X und Y topologische Räume. Beweisen Sie:
  a) Ist X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, dann ist A kompakt.
  b) Ist $f: X \to Y$ stetig und X kompakt, dann ist $f(X) \subset Y$ kompakt.
  c) Ist X hausdorff und $A \subset X$ kompakt, dann ist A abgeschlossen.

2. Seien X und Y topologische Räume. Beweisen Sie:
  a) Ist X wegzusammenhängend, dann ist X zusammenhängend.
  b) Ist X lokal euklidisch und zusammenhängend, dann ist X wegzusammenhängend.
  c) Ist $f: X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, dann ist $f(X) \subset Y$ zusammenhängend. Beweisen Sie auch die analoge Aussage mit "wegzusammenhängend" statt "zusammenhängend".

3. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Definieren Sie auf dem kartesischen Produkt $M \times N$ die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die Projektion $\pi: M \times N \to M, (x, y) \mapsto x$, und die Injektion $i: M \to M \times N, x \mapsto (x, p)$, für einen beliebigen festen Punkt $p \in N$, differenzierbare Abbildungen sind.

4. Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die antipodale Abbildung $f: S^n \to S^n, f(y) = -y$, differenzierbar ist, wobei die Sphäre die standard differenzierbare Struktur trägt.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen am **Dienstag, den 23. Oktober 2012** in der Übung ab. Es werden (bis auf weiteres) alle Aufgaben korrigiert. Jede Aufgabe gibt 5 Punkte. Bitte melden Sie sich auch zu den Übungen unter dem Link auf der Vorlesungsseite an.