Vorlesungsskript Differentialgeometrie WS 12/13

Uwe Semmelmann

26. Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

Topologische Mannigfaltigkeiten sollen als spezielle topologische Räume definiert werden. Dafür sind zunächst einige Grundbegriffe der Topologie zu wiederholen.

Sei M eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{O} = \mathcal{O}_M \subset \mathcal{P}(M)$ heisst *Topologie* auf M, falls

1. $\emptyset, M \in \mathcal{O}$
2. $U, V \in \mathcal{O}$ dann ist auch $U \cap V \in \mathcal{O}$
3. $U_i \in \mathcal{O}, i \in I$ dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Ein Paar $(M, \mathcal{O})$ heisst *topologischer Raum*. Eine Teilmenge heisst *offen*, falls $U \in \mathcal{O}$. Eine Teilmenge $A \subset M$ heisst *abgeschlossen*, falls $M \setminus A$ offen.

Beispiele: (1) Die offenen Mengen der *Standardtopologie* auf $\mathbb{R}^n$ sind die Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$, für die zu jedem Punkt $x \in U$ eine kleine Kugel $B_r(x)$ existiert, die ganz in U liegt. (2) Die *diskrete Topologie* auf einer Menge M ist definiert durch $\mathcal{O} = \mathcal{P}(M)$, d.h. jede Teilmenge von M ist offen. (3) Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ ein topologischer Raum und $X \subset M$ eine Teilmenge. Dann sind die offenen Mengen der *Teilraumtopologie* (auch *induzierte* Topologie) auf X genau die Schnitte von X mit offenen Mengen in M.

Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$ heisst *Basis der Topologie* $\mathcal{O}_M$, falls die offenen Mengen aus $\mathcal{O}_M$ genau die Vereinigungen der Mengen aus $\mathcal{B}$ sind. Insbesondere ist also $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}_M$.

Beispiel: Eine (abzählbare) Basis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ bilden die Kugeln $B_r(x)$ mit rationalem Radius r um Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit rationalen Koordinaten.

Eine Abbildung $f\colon (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ heisst *stetig*, falls $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_M$ für alle $V \in \mathcal{O}_N$. Eine bijektive Abbildung $f\colon M \to N$ heisst *Homöomorphismus* falls f und f^{-1} stetig sind. In diesem Fall nennt man die Räume M und N zueinander *homöomorph*.

Ein topologischer Raum M heisst *lokal homöomorph* zu $\mathbb{R}^n$ (auch *lokal euklidisch*), falls für alle $p \in M$ eine offene Menge $U \subset M$ mit $p \in U$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $\phi\colon U \to V$ existieren.

Ein topologischer Raum M heisst *zusammenhängend*, falls kein $U \subset M, U \neq \emptyset, M$ existiert, dass zugleich offen und abgeschlossen ist. Äquivalent ist, dass M nicht als nicht-triviale Vereinigung zweier disjunkter offener Mengen dargestellt werden kann. Eine Teilmenge $X \subset M$ heisst zusammenhängend, falls X mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

Ein topologischer Raum M heisst *wegzusammenhängend*, falls sich je zwei Punkte in M durch einen stetigen Weg in M verbinden lassen. D.h. für je zwei Punkte $p, q \in M$ existiert eine stetige Abbildung $c\colon [0, 1] \to M$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$.

Lemma 1.1 *Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend. Zusammenhängende, lokal euklidische Räume sind auch wegzusammenhängend.*

Ein topologischer Raum M heisst *hausdorff* (auch T_2), falls für alle $p, q \in M, p \neq q$ offene Mengen $U, V \subset M$ existieren mit $p \in U, q \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Bemerkung Aus lokal euklidisch folgt *nicht* hausdorff.

Definition 1.2 *Eine n-dimensionale* topologische Mannigfaltigkeit *ist ein topologischer Raum M mit:*

1. *M ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$*
2. *M ist hausdorff*
3. *M besitzt eine abzählbare Basis der Topologie*

Die lokalen Homöomorphismen $\phi\colon U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^n$ heissen Karten oder lokale Koordinatensysteme von M.

Genaugenommen muss man noch überprüfen, dass die Dimension wohldefiniert ist, also nicht vom Punkt abhängig ist. Das folgt aus dem Satz von Brouwer bzw. aus dem Satz über die Invarianz des Gebietes.

Satz: (Brouwer) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

Folgerung: *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Sind U und V zueinander homöomorph, so folgt $n = m$.*

Beweis: Man nimmt $n \neq m$ an und o.B.d.A. auch $m < n$. Sei $i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die kanonische Einbettung $i(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Dann ist i stetig, injektiv und $i(\mathbb{R}^m)$ enthält keine in $\mathbb{R}^n$ offene Menge.

Sei nun $\phi\colon U \to V$ der laut Voraussetzung existierende Homöomorphismus. Dann ist auch $f := i|_V \circ \phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Aus dem Satz von Brouwer folgt nun, dass $f(U) = i(V) \subset i(\mathbb{R}^n)$ offen in $\mathbb{R}^n$. Das ist ein Widerspruch und es muss also $m = n$ gelten. $\square$

Im Folgenden sollen drei Beispiele topologischer Mannigfaltigkeiten vorgestellt werden.

1. Der n-dimensionale *euklidische Raum* $M = \mathbb{R}^n$. Hier hat man eine Karte, die durch die Identität gegeben ist. Analog ist auch jede offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

2. Die n-dimensionale *Sphäre*: $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Als Topologie auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wählt man die von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierte Topologie. Dann ist klar, dass der topologische Raum S^n hausdorff ist und eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Auf S^n kann man mittels der stereographischen Projektion zwei Karten definieren, die zeigen, dass S^n lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

   Sei $U_1 = S^n \backslash \{e_{n+1}\}$ und $U_2 = S^n \backslash \{-e_{n+1}\}$. Dann definiert man Homöomorphismen $g_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n, i = 1, 2$ durch

   $$g_1(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} (x_1, \ldots, x_n), \qquad g_2(x) = \frac{1}{1 + x_{n+1}} (x_1, \ldots, x_n) .$$

3. Der n-dimensionale *hyperbolische Raum*: $H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1, x_0 > 0\}$. Hier reicht eine Karte, d.h. H^n ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. Man definiert $\phi\colon H^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ durch $\phi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$. Die (stetige) Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\psi\colon \mathbb{R}^n \to H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \psi(y) = (\sqrt{1 + y_1^2 + \ldots + y_n^2}, y_1, \ldots, y_n)$$

Bemerkung: Der Doppelkegel $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2\}$ ist keine topologische Mannigfaltigkeit.

Satz 1.3 *Eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ist eine abzählbare Menge von Punkten mit der diskreten Topologie.*

Beweis: Sei M eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann existiert eine offene Menge $U \subset M$ mit $p \in U$, die homöomorph zu $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ist. Daraus folgt $U = \{p\}$, d.h. die Punkte in M sind offene Mengen und M trägt damit die diskrete Topologie. □

Bemerkung: Eine zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu S^1 oder $\mathbb{R}^1$.

Satz 1.4 *Sei M eine n-dimensionale und N eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist $M \times N$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n + m$.*

Beispiel: Sei $M = N = S^1$, dann ist $T^2 = S^1 \times S^1$ der 2-dimensionale *Torus*. Allgemeiner hat man den n-dimensionalen Torus $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$.

1.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Es soll nun für topologische Mannigfaltigkeiten der Begriff einer differenzierbaren Abbildung definiert werden. Dazu muss zunächst auf der topologischen Mannigfaltigkeit eine differenzierbare Struktur eingeführt werden. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Seien $(U, x), (V, y)$ Karten um $p \in M$. Dann gilt:

$$f \circ y^{-1} = (f \circ x^{-1})\,(x \circ y^{-1})\ .$$

Man sieht, dass für die Definition der Differenzierbarkeit von f mit Hilfe von Karten, die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel $x \circ y^{-1}$ benötigt wird.

Definition 1.5 *Zwei Karten $(U, x), (V, y)$ heissen* verträglich *falls die Abbildung*

$$x \circ y^{-1}\colon y(U \cap V) \to x(U \cap V)$$

ein Diffeomorphismus von offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist. Die Abbildung $x \circ y^{-1}$ heisst Kartenwechsel. *Eine Menge von Karten $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ heisst* Atlas *von M, falls die Karten M überdecken und je zwei Karten verträglich sind. Ein Atlas $\mathcal{A}$ heisst* maximaler Atlas*, falls jede Karte, die mit allen Karten in $\mathcal{A}$ verträglich ist, schon in $\mathcal{A}$ liegt.*

Bemerkung: Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas für M, dann definiert man

$\mathcal{A}_{max}$:= Menge aller Karten von M, die mit allen Karten aus $\mathcal{A}$ verträglich sind.

Lemma 1.6 *1.* $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{max}$

2. $\mathcal{A}_{max}$ *ist ein Atlas*

3. $\mathcal{A}_{max}$ *ist maximaler Atlas*

4. Jeder Atlas ist in genau einem maximalen Atlas enthalten

Definition 1.7 *Eine n-dimensionale* differenzierbare Mannigfaltigkeit *ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einem maximalen Atlas.*

Bemerkung: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten nennt man auch $\mathcal{C}^\infty$- oder *glatte* Mannigfaltigkeiten. Ein maximaler Atlas definiert eine *differenzierbare* Struktur. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keine differenzierbare Strukturen zulassen. Auf einer topologischen Mannigfaltigkeit kann es "unterschiedliche" differenzierbare Strukturen geben.

Notation: Im Weiteren soll mit "Mannigfaltigkeit" immer "differenzierbare Mannigfaltigkeit" gemeint sein.

Beispiele: (1) Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist trivialerweise eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Als Atlas nimmt man hier $\mathcal{A} = \{(U, \mathrm{id})\}$. (2) Die Sphäre S^n ist eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Seien $(U_i, g_i), i = 1, 2$ die oben eingeführten Karten. Zu überprüfen bleibt, ob der Kartenwechsel $g_1 \circ g_2^{-1}$ differenzierbar ist. Für $x \in g_2(U_1 \cap U_2) = g_2(S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$g_1 \circ g_2^{-1}(x) = g_1 \left(\frac{2x}{1 + \|x\|^2}, \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2}} \cdot \frac{2x}{1 + \|x\|^2} = \frac{2x}{2\|x\|^2} = \frac{x}{\|x\|^2}$$

Damit sind die Karten (U_1, g_1) und (U_2, g_2) verträglich. Da sie auch S^n überdecken erhält man den Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, g_i), i = 1, 2\}$.

Definition 1.8 *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $f\colon M \to N$ heisst* differenzierbar*, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ Karten (U, x) um p und (V, y) um $f(p)$ gibt, so dass auf einer Umgebung $W \subset x(f^{-1}(V) \cap U)$ von $x(p)$ die Abbildung*

$$y \circ f \circ x^{-1} \colon W \subset x(f^{-1}(V) \cap U) \to y(V)$$

differenzierbar ist. Ein Diffeomorphismus *ist ein Homöomorphismus f, für den f und f^{-1} differenzierbar sind. In diesem Fall nennt man die Mannigfaltigkeiten M und N* diffeomorph.

Bemerkungen: (1) Genauer kann man noch von Differenzierbarkeit in einem Punkt und k-facher Differenzierbarkeit sprechen. Im Weiteren soll "differenzierbar" immer "beliebig oft differenzierbar" bedeuten. Solche Abbildungen nennt man dann *glatt* oder $\mathcal{C}^\infty$. (2) Ist f in p bzgl. eines Paares von Karten differenzierbar, so auch für alle anderen Karten um p bzw. $f(p)$. Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der differenzierbaren Funktionen auf M mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichnet man mit $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Beispiele:

1. Die antipodale Abbildung $f\colon S^n \to S^n, f(y) = -y$ ist differenzierbar. (ÜA)

2. Auf $\mathbb{R}$ seien die Atlanten $\mathcal{A}_1 = \{x = \mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{\tilde{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{x}(t) = t^3\}$ fixiert. Dann sind x und $\tilde{x}$ keine verträglichen Karten, da $x \circ \tilde{x}^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$ nicht differenzierbar ist. Damit ist $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1,max}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2,max})$ differenzierbar, aber kein Diffeomorphismus, denn die Abbildung $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2,max}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1,max})$ ist nicht differenzierbar. Allerdings liefert die Abbildung $f(t) = \sqrt[3]{t}$ einen Diffeomorphismus $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1,max}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2,max})$.

Bemerkungen:

1. Für $n \neq 4$ ist jede differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^n$ diffeomorph zur Standardstruktur $\mathcal{A}_{max}$ zu $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$.

2. Auf $\mathbb{R}^4$ gibt es überabzählbar viele differenzierbare Strukturen, die paarweise nicht diffeomorph sind (= exotische Strukturen).

3. Jede topologische Mannigfaltigkeit in Dimension 1, 2 und 3 besitzt genau eine differenzierbare Struktur.

4. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten in Dimension 4, die keine differenzierbare Struktur zulassen.

5. Es gibt für $n \geq 7$ Mannigfaltigkeiten, die homöomorph zu S^n aber nicht diffeomorph sind. Diese nennt man exotische Sphären. In jeder Dimension $n, n \geq 7$ gibt es höchstens endlich viele exotische Sphären. Die Existenz einer exotischen S^4 ist ungeklärt.

1.3 Projektive Räume

Im Folgenden soll noch ein wichtiges Beispiel differenzierbarer Mannigfaltigkeiten vorgestellt werden: die projektiven Räume. Diese sind definiert als Quotientenräume.

Sei X ein topologischer Raum, sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, dann bezeichne $X/_\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Auf dieser lässt sich eine Topologie definieren. Dafür bezeichne $\pi\colon X \to X/_\sim, x \mapsto [x]$ die kanonische Projektion. Dann ist eine Menge $U \subset X/_\sim$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset X$ offen ist. Die Quotiententopologie wird damit die größte (feinste) Topologie auf $X/_\sim$, für die die kanonische Projektion stetig ist. Im Allgemeinen ist $X/_\sim$ keine Mannigfaltigkeit, noch nicht einmal hausdorff. Die Eigenschaften kompakt und zusammenhängend übertragen sich von X auf $X/_\sim$. Sei Y ein beliebiger topologischer Raum. Eine Abbildung $f\colon X/_\sim \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi X \to Y$ stetig ist.

Auf S^n betrachtet man die Äquivalenzrelation $x \sim -x$. Dann ist der *reell-projektive Raum* definiert als

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = S^n/_\sim$$

mit der Quotientenraumtopologie. Offensichtlich ist $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ein kompakter, zusammenhängender topologischer Raum. Das $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ eine abzählbare Basis der Topologie besitzt und hausdorff ist, wird später gezeigt (im Zusammenhang mit Gruppenwirkungen auf Mannigfaltigkeiten). Man kann $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ auch mit dem Raum aller 1-dimensionalen Unterräume, also aller Geraden durch die Null in $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren. Dafür bildet man die Äquivalenzklasse $[x]$ auf die Gerade durch x ab. Es ist

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/_\sim$$

wobei $x \sim y$ genau dann, wenn $x = \lambda y$ für ein $\lambda \neq 0$, genau dann, wenn x und y auf einer Geraden durch die Null liegen.
Auf dem reell-projektiven Raum kann man folgendermassen Karten definieren. Sei dazu $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die kanonische Projektion. Man schreibt

$$\pi(x_0, \dots, x_n) \;=\; [(x_0, \dots, x_n)] \;=\; [x_0 : \dots : x_n]\ .$$

Man betrachtet die offenen Mengen $V_i := \{(x_0, \dots, x_n) \,|\, x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, i = 0, \dots, n$ und definiert für $i = 0, \dots, n$ Karten auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ durch

$$U_i \;:=\; \pi(V_i) \;=\; \{[x_0 : \dots : x_n] \,|\, x_i \neq 0\} \;=\; \{[x_0 : \dots : 1 : \dots x_n]\}$$

mit der 1 an der $(i+1)$ten Stelle. Lokale Homöomorphismen $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n$ sind gegeben durch

$$\varphi_i([x]) \;=\; (\tfrac{x_0}{x_i}, \dots, \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, \tfrac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \tfrac{x_n}{x_i})\ .$$

Tatsächlich sind die Abbildungen φ_i wohl-definiert, denn

$$[x] = [y] \;\leftrightarrow\; x \sim y \;\leftrightarrow\; \exists \lambda \neq 0 :\; x = \lambda y \;\leftrightarrow\; \tfrac{x_k}{y_k} = \tfrac{x_i}{y_i} \;\leftrightarrow\; \tfrac{x_k}{x_i} = \tfrac{y_k}{y_i} \;\leftrightarrow\; \varphi_i([x]) = \varphi_i([y])$$

für alle k, i. Die Abbildung φ_i ist bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$\varphi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) \;=\; [y_0 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_{n-1}]$$

Offensichtlich ist damit φ_i für alle i ein Homöomorphismus. Weiterhin ist der Kartenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ ein Diffeomorphismus. Man findet

$$\begin{aligned}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(y_0, \dots, y_{n-1}) \quad &= \quad \varphi_j([y_0 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_{n-1}]) \\ &= \quad \left(\tfrac{y_0}{y_j}, \dots, \tfrac{y_{i-1}}{y_j}, \tfrac{1}{y_j}, \tfrac{y_i}{y_j}, \dots, \tfrac{y_{j-1}}{y_j}, \tfrac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \tfrac{y_{n-1}}{y_j}\right)\ .\end{aligned}$$

Zusammenfassend ist damit der folgende Satz bewiesen

Satz 1.9 *Der reell-projektive Raum* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ *ist eine* n*-dimensionale kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit.*

Etwas allgemeiner kann man zu jedem $(n+1)$-dimensionalen Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$ einen projektiven Raum definieren:

$$\mathbb{K}\mathrm{P}^n := \text{Menge aller 1-dimensionaler Unterräume in } V.$$

Diese Räume sind Quotientenräume von V bzgl. der Äquivalenzrelation: $v \sim w$ genau dann, wenn v und w linear abhängig sind. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ hat man den *komplex projektiven Raum* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ und für $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ den *quaternionisch projektiven Raum* $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$.

Bemerkung: Es gilt $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1, \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2, \mathbb{H}\mathrm{P}^1 \cong S^4$. Für $n \geq 2$ ist $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \neq S^n$.

Die projektiven Räume sind mit Sphären durch die sogenannte *Hopf-Faserung* verbunden. Das sind jeweils Abbildungen der Form $(z_0, \ldots, z_n) \mapsto [z_0 : \ldots : z_n]$,

$$S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n, \qquad S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n, \qquad S^{4n+3} \to \mathbb{H}\mathrm{P}^n$$

Dabei ist das Urbild eines Punktes im reell projektiven Raumes gleich $\mathbb{Z}_2$, im komplex-projektiven Raum diffeomorph zu S^1 und im quaternionisch projektiven Raum diffeomorph zu S^3. Es gibt noch die Hopf-Faserung $S^{15} \to S^8$ mit Urbild (= Faser) diffeomorph zu S^7.

1.4 Der Satz vom regulären Wert

In diesem Abschnitt soll die Konstruktion differenzierbarer Mannigfaltigkeiten als Urbild regulärer Werte beschrieben werden. Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung.

Definition 1.10 *Seien* (U, x) *bzw.* (V, y) *Karten um* p *bzw.* $f(p)$*. Dann ist der* Rang *von* f *in* p *definiert als der Rang der Jacobi-Matrix von* $y \circ f \circ x^{-1}$*, d.h.*

$$\mathrm{rg}_p(f) = \mathrm{Rang}\left(\frac{\partial(y\, f\, x^{-1})_i}{\partial x_j}\right) = \mathrm{Rang}\, J_{x(p)}(y\, f\, x^{-1}) \ ,$$

wobei $J_p(r)$ *im Weiteren die Jacobi-Matrix einer Abbildung* r *im Punkt* p *bezeichnet.*

Bemerkung: Der Rang der Jacobi-Matrix $J_{x(p)}(y\, f\, x^{-1})$ hängt nicht von den gewählten Karten (U, x) und (V, y) ab, d.h. der Rang $\mathrm{rg}_p(f)$ ist damit wohldefiniert.

Beweis: Seien (U, x) und $(\tilde{U}, \tilde{x})$ Karten um p und (V, y) und $(\tilde{V}, \tilde{y})$ Karten um $f(p)$. Dann gilt

$$\tilde{y}\, f\, \tilde{x}^{-1} \;=\; (\tilde{y}\, y^{-1}) \circ (y\, f\, x^{-1}) \circ (\tilde{x}\, x^{-1})^{-1} \ .$$

Nun sind die Kartenwechsel $\tilde{y}\, y^{-1}$ bzw. $\tilde{x}\, x^{-1}$ Diffeomorphismen und deren Jacobi-Matrizen damit Isomorphismen, die den Rang einer linearen Abbildung also nicht ändern. Daraus und aus der Kettenregel folgt nun

$$\mathrm{rg}\, J(\tilde{y}\, f\, \tilde{x}^{-1}) \;=\; \mathrm{rg}\, \left(J(\tilde{y}\, y^{-1}) \circ J(y\, f\, x^{-1}) \circ J(\tilde{x}\, x^{-1})^{-1}\right) \;=\; \mathrm{rg}\, J(y\, f\, x^{-1}) \ .$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass der Rang das lokale Verhalten von Abbildungen bestimmt. Die entsprechenden Sätze übertragen sich nun direkt auf Mannigfaltigkeiten. Zunächst überträgt sich der Rangsatz.

Rangsatz: *Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, die in einer Umgebung von $p \in M$ konstanten Rang r hat. Dann ist f bzgl. geeigneter lokaler Koordinaten um p von der Form*

$$\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^t, \quad (x, y) \mapsto (x, 0, \ldots, 0)\,,$$

wobei $\dim M = r + s$ *und* $\dim N = r + t$.

Bemerkung: Die Abbildung $p \mapsto \operatorname{rg}_p(f)$ ist unterhalbstetig, d.h. hat f in p den Rang r, dann gilt $\operatorname{rg}_q(f) \geq r$ für alle q in einer kleinen Umgebung von p.

Ist r ein Diffeomorphismus, dann ist $J_p(r)$ invertierbar. Die partielle Umkehrung dieser Aussage beinhaltet der Umkehrsatz.

Umkehrsatz: *Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten der Dimension n. Sei $p \in M$ ein Punkt mit $\operatorname{rg}_p(f) = n$. Dann existiert eine Umgebung von p, auf der f ein Diffeomorphismus ist.*

Zum Beweis: ist der Rang von f in p gleich n, dann ist die Jacobi-Matrix von yfx^{-1} invertierbar und damit ist yfx^{-1} ein lokaler Diffeomorphismus um $x(p)$, was sich entsprechend auf die Mannigfaltigkeit überträgt.

Den letzten Satz kann man etwas verallgemeinern, wenn man von der Jacobi-Matrix nur noch verlangt, dass sie surjektiv sein soll. Dazu definiert man zunächst

Definition 1.11 *Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann heißt ein Punkt $p \in M$* regulär, *falls $\operatorname{rg}_p(f) = \dim N$, d.h. falls $J(yfx^{-1})$ surjektiv in $x(p)$ ist.*

Bemerkung: (1) Ist p regulär, dann folgt $\dim M \geq \dim N$. (2) Ist $\dim M < \dim N$, dann sind alle Punkte in M *kritisch*, d.h. nicht regulär.

Satz vom regulären Punkt: *Sei $f\colon M \to N$ differenzierbar und sei $p \in M$ regulär. Dann existieren Karten (U, x) um p und (V, y) um $f(p)$ mit $f(U) \subset V$ und*

$$y\,f\,x^{-1}\colon (x_1, \ldots, x_{r+s}) \mapsto (x_1, \ldots, x_r)$$

wobei $\dim M = r + s$ *und* $\dim N = r$, *d.h. in lokalen Koordinaten stimmt f mit der kanonischen Projektion von $\mathbb{R}^{r+s}$ auf $\mathbb{R}^r$ überein.*

Definition 1.12 *Sei $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Punkt $q \in N$ heißt* regulärer Wert *von f, falls jedes $p \in f^{-1}(q)$ ein regulärer Punkt von f ist.*

Bemerkung: (1) Jeder Punkt, der nicht im Bild von $f\colon M \to N$ liegt, ist ein regulärer Wert. (2) Nach dem Satz von Sard liegt die Menge der regulären Werte dicht in N. (3) Es gibt keine surjektive differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, wohl aber stetige.

Definition 1.13 *Eine Teilmenge $M_0 \subset M$, einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M nennt man k-dimensionale* Untermannigfaltigkeit, *wenn es um jeden Punkt von M_0 eine Karte (U, x) von M gibt mit*

$$x(U \cap M_0) = \mathbb{R}^k \cap x(U) \ ,$$

wobei $\mathbb{R}^k = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)\} \subset \mathbb{R}^n$. Die Differenz $\dim M - \dim M_0$ *nennt man die* Kodimension *von M_0 in M.*

Bemerkungen: (1) Jede Untermannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Untermannigfaltigkeiten von M der Kodimension 0 sind genau die offenen Mengen in M. Untermannigfaltigkeiten der Dimension 0 sind genau die diskreten Teilmengen in M (endlich, falls M kompakt). (2) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit der Dimension k von $\mathbb{R}^n$, wenn M lokal diffeomorph zu einer offenen Menge in $\mathbb{R}^k$ ist, z.B. reguläre Flächen im $\mathbb{R}^3$. (3) Der Satz von Whitney besagt, dass jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n}$ ist. Genauer kann man noch sagen:

1. Falls n eine 2er-Potenz ist, läßt sich $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ nicht in $\mathbb{R}^{2n-1}$ einbetten, z.B. ist $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ nicht diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

2. Ist n keine 2er-Potenz, dann existiert für jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit eine Einbettung nach $\mathbb{R}^{2n-1}$. (Haefliger-Hirsch-Wall)

3. Orientierbare Flächen lassen sich in $\mathbb{R}^3$ einbetten. Nicht-orientierbare Flächen nur nach $\mathbb{R}^4$.

4. Jede kompakte, orientierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit besitzt eine Einbettung nach $\mathbb{R}^{2n-1}$.

Satz vom regulären Wert: *Ist $q \in N$ ein regulärer Wert einer differenzierbaren Abbildung $f\colon M \to N$, dann ist $f^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit von M und es gilt*

$$\dim f^{-1}(q) = \dim M - \dim N \ .$$

Beweis: Sei $p \in f^{-1}(q)$ ein regulärer Punkt. Dann wählt man Karten (U, x) um p und (V, y) um q, wie sie nach dem Satz vom regulären Punkt existieren. O.B.d.A. kann man auch noch $y(q) = 0$ voraussetzen. Dann gilt $p \in U \cap f^{-1}(q)$ g.d.w. $yfx^{-1}\,x(p) = 0$. Da man die Karten so gewählt hat, dass f lokal mit der kanonischen Projektion

$$(x_1, \ldots, x_{r+s}) \mapsto (x_1, \ldots, x_r)$$

übereinstimmt, ist dies äquivalent zu $x(p)_i = 0$ für $i = 1, \ldots, r$, d.h. zu $x(p) \in \mathbb{R}^s \cap x(U)$. Insgesamt erhält man die gesuchte Untermannigfaltigkeitsgleichung $x(U \cap f^{-1}(q)) = \mathbb{R}^s \cap x(U)$. □

Der Satz vom regulären Wert kann benutzt werden, um Mannigfaltigkeitsstrukturen nachzuweisen. Dafür sollen zwei Beispiele gegeben werden.

Beispiel: *Die n-dimensionale Sphäre*

Für $M = \mathbb{R}^{n+1}$ und $N = \mathbb{R}$ betrachtet man die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \|x\|^2 = \sum_i x_i^2$. Als Jacobi-Matrix in $x = (x_0, \ldots, x_n)$ findet man $J(f) = (2x_0, \ldots, 2x_n)$. Damit folgt $\mathrm{rg}_p(f) \neq 0$ für alle Punkte $p \neq 0$, d.h. 1 ist ein regulärer Wert für f und $f^{-1}(1) = S^n$ damit eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beispiel: *Die orthogonale Gruppe* $\mathrm{O}(n) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \,|\, A^T \cdot A = E\}$

Sei $M = M(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ und sei $N = \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \,|\, A^T = A\} = \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$. D.h. N ist die Menge der symmetrischen Matrizen.

Lemma 1.14 *Für die Abbildung $f\colon M(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}), A \mapsto A^TA$ ist die Einheitsmatrix E ein regulärer Wert. Damit ist die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(E)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass die Jacobi-Matrix der Abbildung f in jedem Punkt $p \in f^{-1}(E) = \mathrm{O}(n)$ surjektiv ist. Dafür nutzt man die Definition der Jacobi-Matrix als Abbildung (Richtungsableitung) und berechnet für $v \in \mathbb{R}^{n^2}$:

$$\begin{aligned} J(f)_p v &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p+tv) \\ &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} (p+tv)^T(p+tv) \\ &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} (p^Tp + tp^Tv + tv^Tp + t^2v^Tv) \\ &= p^Tv + v^Tp \end{aligned}$$

Für $B \in \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ und $p \in \mathrm{O}(n) = f^{-1}(E)$ definiert man $v := \frac{1}{2}pB$ und berechnet

$$p^Tv + v^Tp = \frac{1}{2}p^TpB + \frac{1}{2}B^Tp^Tp = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^T = B\ .$$

D.h. die Jacobi-Matrix der oben definierten Abbildung f ist surjektiv in allen Punkten von $f^{-1}(E)$ und die Einheitsmatrix E ist damit ein regulärer Wert von f. Nach dem Satz vom regulären Wert ist damit die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$ als Urbild der Einheitsmatrix E unter f eine Mannigfaltigkeit, nämlich eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$. □

Bemerkungen: (1) Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathrm{O}(n)$ und daher eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0. (2) Die Mannigfaltigkeit $\mathrm{O}(n)$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten. (3) Die klassischen Matrizengruppen $\mathrm{GL}(n), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{Sp}(n)$ sind alles Mannigfaltigkeiten. Zusätzlich sind die Gruppenoperationen differenzierbare Abbildungen. Solche Gruppen nennt man *Lie-Gruppen*.

1.5 Immersionen, Submersionen, Einbettungen

Mit Hilfe des Ranges lassen sich zwei Klassen von differenzierbaren Abbildungen charakterisieren.

Definition 1.15 *Sei $f\colon M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung. Die Abbildung f heißt* Submersion, *wenn $\operatorname{rg}_p(f) = \dim N$ für alle $p \in M$ gilt. Die Abbildung f heißt* Immersion, *wenn $\operatorname{rg}_p(f) = \dim M$ für alle $p \in M$ gilt. Die Abbildung f heißt* Einbettung, *wenn $f(M) \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit und $f\colon M \to f(M)$ ein Diffeomorphismus ist.*

Submersionen und Immersionen lassen sich durch weitere äquivalente Bedingungen beschreiben.

Lemma 1.16 *Eine Abbildung $f\colon M^m \to N^n$ ist genau dann eine Submersion, wenn die Jacobi-Matrix $J(yfx^{-1})$ in allen Punkten $p \in M$ bzgl. von Karten (U, x) um p und (V, y) um $f(p)$ surjektiv ist. Weiter ist f eine Submersion genau dann, wenn f in lokalen Koordinaten von folgender Form ist: $(x_1, \ldots, x_m) \;\mapsto\; (x_1, \ldots, x_n)$.*

Lemma 1.17 *Eine Abbildung $f\colon M^m \to N^n$ ist genau dann eine Immersion, wenn die Jacobi-Matrix $J(yfx^{-1})$ in allen Punkten $p \in M$ bzgl. von Karten (U, x) um p und (V, y) um $f(p)$ injektiv ist. Weiter ist f eine Immersion genau dann, wenn f in lokalen Koordinaten von folgender Form ist: $(x_1, \ldots, x_m) \;\mapsto\; (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$.*

Bemerkungen: (Übungsaufgaben)

1. Immersionen sind i.A. nicht injektiv, injektive Immersionen sind i.A. keine Einbettungen.
2. Einbettungen sind Immersionen, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild sind.
3. Sei M kompakt und $f\colon M \to N$ eine injektive Immersion, dann ist f eine Einbettung.
4. f ist ein lokaler Diffeomorphismus genau dann, wenn f Immersion und Submersion ist.
5. Diffeomorphismen sind bijektive lokale Diffeomorphismen.
6. Submersionen sind i.A. nicht surjektiv.
7. Submersionen sind offene Abbildungen.
8. Sei $f\colon M \to N$ eine Submersion, M kompakt und N zusammenhängend, dann ist f surjektiv.

2 Der Tangentialraum

2.1 Die geometrische Definitionen des Tangentialraumes

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist eine lineare Approximation von f in x gegeben durch das Differential $df_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, d.h. die lineare Abbildung $df_x = J_x(f)$ mit $f(x+v) = f(x) + df_x(v) + \varphi(v)$ und $\lim_{v\to 0} \varphi(v)/\|v\| = 0$. Es gilt

$$df_x(v) \;=\; J_x(v)v \;=\; v(f)_x \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x+tv)\ ,$$

wobei $J_x(f)$ die Jacobi-Matrix von f bezeichnet. Die partiellen Ableitungen von f entsprechen genau den Bildern der Basisvektoren e_i der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^n$ unter der Abbildung df_x, also den Spalten der Jacobi-Matrix.

Nun möchte man analog Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten approximieren. Dazu definiert man zu jedem Punkt p der Mannigfaltigkeit M einen abstrakten Vektorraum T_pM, den *Tangentialraum* in p, und dann definiert man zu jeder Abbildung $f\colon M \to N$ eine lineare Abbildung $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$, das *Differential* von f in p.

Für Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$ hat man eine anschauliche Definition des Tangentialraumes, als Menge der Tangentialvektoren an Kurven in M:

$$T_pM := \{\dot\gamma(0) \,|\, \gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M \text{ differenzierbar}, \gamma(0) = p\}\ .$$

Im Allgemeinen hat man aber keine kanonische Einbettung und muß daher den Tangentialraum T_pM durch innere Eigenschaften von M definieren. Dazu definiert man auf der Menge der Kurven in M eine Äquivalenzrelation: zwei Kurven $\alpha, \beta\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = p = \beta(0)$ heißen äquivalent, $\alpha \sim \beta$, falls für eine und damit für jede Karte (U,x) um p gilt:

$$(x \dot\circ \alpha)(0) = (x \dot\circ \beta)(0)\ .$$

Tatsächlich gilt $x\circ\alpha = (x\tilde x^{-1})\,\tilde x\circ\alpha$ und damit $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\, x\circ\alpha(t) = d(x\tilde x^{-1})\ \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\,\tilde x\circ\alpha(t)$. Die Gleichung der Äquivalenzrelation bzgl. der neuen Karte $\tilde x$ ergibt sich also durch Anwendung des Isomorphismus $d(x\tilde x^{-1})$. Die Definiton

Definition 2.1 Tangentialvektoren *an M im Punkt $p \in M$ sind Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ von Kurven in M durch p. Der* Tangentialraum *von M in p ist die Menge all dieser Äquivalenzklassen:*

$$T_pM = \{\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M \textit{ differenzierbar}, \gamma(0) = p\}/_\sim\ .$$

Für die Äquivalenzklasse einer Kurve γ in M nutzt man folgende Schreibweisen:

$$[\gamma] = \dot\gamma(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma(t)\ .$$

Lemma 2.2 *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann ist der Tangentialraum T_pM ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.*

Beweis: Sei (U, x) eine Karte um p, dann definiert man:

$$dx_p \colon T_pM \to \mathbb{R}^n, \qquad [\gamma] \mapsto (x \dot{\circ} \gamma)(0) \ .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert nach Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ bzw. des Tangentialraumes T_pM. Man zeigt nun, dass dx_p bijektiv ist. Injektivität ist wiederum klar nach der Definition. Um die Surjektivität zu zeigen, definiert man für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ die Kurve $\gamma(t) := x^{-1}(x(p)+tv)$. Man wählt ε so klein, dass $x(p)+tv$ für $|t| < \varepsilon$ in $x(U)$ liegt. Dann folgt

$$dx_p([\gamma]) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} x \circ x^{-1}(x(p) + tv) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x(p) + tv) = v \ .$$

Die Vektorraumstruktur auf T_pM wird nun so definiert, dass dx_p eine lineare Abbildung wird. Also z.B. für $v, w \in T_pM$ definiert man:

$$v + w := (dx_p)^{-1}(dx_p(v) + dx_p(w)) \ .$$

Zu zeigen bleibt noch, dass die Vektorraumstruktur auf T_pM nicht von der gewählten Karte abhängt. Die Abbildung dx_p ist das Differential der Kartenabbildung x im Punkt p (siehe unten). □

Bemerkung: Die kanonische differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch die Karte $(\mathbb{R}^n, x = \mathrm{id})$. Daher liefert dx_p hier die kanonische Identifizierung

$$\Phi \colon T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad [\alpha] \mapsto \dot{\alpha}(0) \ ,$$

die nach Definition ein linearer Isomorphismus ist. In der umgekehrten Richtung ordnet man einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ die Klasse $[\alpha]$ zu mit $\alpha(t) = p + tv$. Dabei ist α eine Kurve durch p mit $\dot{\alpha}(0) = v$.

Definition 2.3 *Sei $f \colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist das* Differential *von f in p definiert durch*

$$df_p \colon T_pM \to T_{f(p)}N, \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma] \ .$$

Man schreibt auch: $df_p(\dot{\gamma}(0)) = f \dot{\circ} \gamma(0)$.

Die Eigenschaften des Differentials für Funktionen zwischen Euklidischen Räumen übertragen sich jetzt direkt auf Mannigfaltigkeiten.

Lemma 2.4 *Das Differential ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, linear und erfüllt die Kettenregel.*

Beweis: Seien α und $\tilde{\alpha}$ zwei äquivalente Kurven auf M durch p, d.h es gilt $x\dot{\alpha}(0) = x\dot{\tilde{\alpha}}(0)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} dy_{f(p)}[f \circ \alpha] &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\, yf\alpha = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\, (yfx^{-1})x\alpha = d(yfx^{-1})x\dot{\alpha}(0) = d(yfx^{-1})x\dot{\tilde{\alpha}}(0) \\ &= dy_{f(p)}[f \circ \tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Es war schon gezeigt worden, dass die Abbildung dy bijektiv ist und somit folgt die Gleichung $[f \circ \alpha] = [f \circ \tilde{\alpha}]$, d.h. die Definition des Differentials df ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten des Tangentialvektors. Die Kettenregel folgt aus einer formalen Rechnung:

$$dg \circ df[\alpha] = dg(df[\alpha]) = dg[f \circ \alpha] = [g \circ f \circ \alpha] = d(g \circ f)[\alpha] \ .$$

Das Differential dx der Kartenabbildung ist nach Definition linear. Hierbei nutzt man die kanonische Identifikation $\Phi\colon T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n, [\alpha] \mapsto \dot{\alpha}(0)$ und unterscheidet nicht zwischen $dx_p\colon T_pM \to T_{x(p)}\mathbb{R}^n$ und dem vorher eingeführten $dx_p\colon T_pM \to \mathbb{R}^n$. Schreibt man nun $f = y^{-1} \circ (yfx^{-1}) \circ x$ folgt nach der Kettenregel $df = (dy)^{-1} \circ d(yfx^{-1}) \circ dx$, d.h. man hat ein entsprechendes kommutatives Diagramm. Das Differential ist damit als Verknüpfung linearer Abbildungen linear. □

Bemerkungen: (1) $(d\,\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{T_pM}$. (2) Ist f ein Diffeomorphismus, dann ist df_p für alle p ein Isomorphismus. (3) Ist df_p ein Isomorphismus, dann ist f lokal um p ein Diffeomorphismus. (4) Da die Jacobi-Matrix von yfx^{-1} nur eine andere Beschreibung des Differential $d(yfx^{-1})$ ist, folgt für den Rang einer differenzierbaren Abbildung f im Punkt $p \in M$ auch die Gleichung $\mathrm{rg}_p(f) = \mathrm{rg}_p(df_p)$.

2.2 Die algebraische Definition des Tangentialraumes

Den Tangentialraum in einem Punkt p kann man identifizieren mit dem Raum der Derivationen auf Funktionskeimen um p. Das soll im Folgenden genauer erklärt werden. Dieser Zugang verallgemeinert den Begriff der Richtungsableitung aus der Analysis.

Zwei Funktionen f und h definiert auf einer Umgebung U von p heißen äquivalent, $f \sim h$, falls eine Umgebung $V \subset U$ von p existiert, so dass $f|_V = h|_V$ gilt.

Definition 2.5 *Die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ differenzierbarer Funktionen, definiert auf Umgebungen von $p \in M$ nennt man* Funktionskeime *in p. Man schreibt $\mathcal{C}^\infty_p(M)$ für den Raum der Funktionskeime in p.*

Bemerkung: Man kann Funktionskeime addieren und multiplizieren, z.B. definiert man $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$. Damit wird $\mathcal{C}^\infty_p(M)$ eine reelle Algebra, d.h. ein Vektorraum mit einer verträglichen Multiplikation.

Lemma 2.6 *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist: $\mathcal{C}^\infty_p(M) \cong \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis: Sei (U, x) eine Karte um p mit $x(p) = 0$, dann wird die Isomorphie definiert durch die Abbildung $[f] \mapsto [f \circ x^{-1}]$. □

Definition 2.7 *Eine* Derivation *auf $\mathcal{C}^\infty_p(M)$ ist eine lineare Abbildung $v\colon \mathcal{C}^\infty_p(M) \to \mathbb{R}$ mit*

$$v([f][g]) = v([f])g(p) + f(p)v([g]) \ .$$

Die Menge der Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty_p(M)$ wird mit $\mathcal{D}_p(M)$ bezeichnet.

Bemerkung: (1) $\mathcal{D}_p(M)$ ist ein reeller Vektorraum. (2) $\mathcal{D}_p(M) \cong \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$. Dieser Isomorphismus ist folgendermassen definiert: Sei v eine Derivation in $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, dann definiert die Abbildung $f \mapsto v(f \circ x^{-1})$ eine Derivation in $\mathcal{D}_p(M)$

Beispiel: Jeder Vektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert durch die Richtungsableitung eine Derivation auf $\mathcal{C}^\infty_{x_0}(\mathbb{R}^n)$:

$$v([f]) \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x_0 + tv) \;=\; df_{x_0}(v) \;=\; \langle v, \operatorname{grad} f\rangle \;=\; \sum_{j=1}^n v_j \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{x_0} .$$

Dabei entsprechen also die Vektoren e_i der kanonischen Basis, den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \ldots, n$. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass auch umgekehrt jede Derivation von dieser Form ist, d.h. man hat eine Isomorphie $\mathbb{R}^n \cong \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ für einen beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt dann auch $\mathcal{D}_p(M) \cong \mathbb{R}^n$.

Satz 2.8 *Jede Derivation δ auf $\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ schreibt sich, angewendet auf $[f] \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, als*

$$\delta([f]) = \sum_{j=1}^n \delta([x_j]) \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_0 .$$

Insbesondere hat der Raum der Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ die Dimension n, mit den Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \ldots, n$, als Basis.

Beweis: Die Aussage des Satzes folgt aus einem fundamentalen Lemma, das zuerst bewiesen werden muss.

Lemma 2.9 *Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer konvexen Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^n$. Dann kann f geschrieben werden als:*

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^n x_j\, h_j(x) ,$$

für gewisse differenzierbare Funktionen h_j mit $h_j(0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_0$.

Beweis des Lemmas: Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel folgt

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, x_j\, dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt .$$

Um den Beweis des Satzes abzuschliessen, muss man noch bemerken, dass Derivationen auf konstanten Funktionen verschwinden. Es genügt dies für die konstante Funktion $f \equiv 1$ nachzuweisen: Sei δ eine Derivation, dann folgt $\delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$ und somit $\delta(1) = 0$. Sei nun $[f]$ ein Funktionskeim in $0 \in \mathbb{R}^n$ und δ eine beliebige Derivation. Schreibt man f wie in dem oben angeführten Lemma und wendet δ darauf an, so folgt

$$\delta([f]) = \sum_{j=1}^n \delta(x_j) \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_0 .$$

Die Abbildung $[f] \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_0$, also die partielle Ableitung nach x_j im Punkt 0, ist eine Derivation, die wie üblich mit $\frac{\partial}{\partial x_j}$ bezeichnet wird und, wie gezeigt, den Raum der Derivationen aufspannen. Offensichtlich sind sie auch linear unabhängig, bilden also eine Basis in $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Definition 2.10 *Sei $v \in T_pM$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dann ist die* Lie-Ableitung *von f in Richtung v definiert als:*

$$L_v(f) = v(f) = df_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\alpha(t)) \ ,$$

wobei $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Kurve in M ist mit $\alpha(0) = p$ und $\dot{\alpha}(0) = v$. Auf Funktionskeimen definiert man die Lie-Ableitung durch $L_v([f]) = [L_v(f)]$.

Satz 2.11 *Die Abbildung $\xi \mapsto L_\xi$ definiert eine lineare Isomorphie zwischen T_pM und dem Raum der Derivationen auf $\mathcal{C}_p^\infty(M)$, d.h.*

$$T_pM \cong \mathcal{D}_p(M) \ .$$

Beweis: Sei (U, x) eine Karte um $p \in M$ mit $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, sei $\xi \in T_pM$ ein Tangentialvektor mit $dx_p(\xi) = v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$L_\xi(f) = df_p(\xi) = d(fx^{-1}x)_p(\xi) = d(fx^{-1})_0\, dx_p(\xi) = v(fx^{-1})(0) = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f x^{-1}}{\partial x_j}(0) \ .$$

Aus dieser Formel folgt sofort, dass die Zuordnung $\xi \mapsto L_\xi$ injektiv ist. Denn gilt $L_\xi(f) = 0$ für alle f dann auch für $f = x_j$, woraus dann $v_j = 0$ und schließlich auch $\xi = 0$ folgt. Die Zuordnung ist bijektiv aus Dimensionsgründen: $\dim T_pM = n = \dim \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n) = \dim \mathcal{D}_p(M)$. $\square$

Bezeichnung: Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und sei (U, x) eine Karte um $p \in M$. Dann schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p (f) = \frac{\partial f x^{-1}}{\partial x_j}(x(p)) \ .$$

Genaugenommen betrachtet man f auf der Kartenumgebung U von p bzw. geht zu dem Funktionskeim $[f]$ in p über.

Bemerkungen:

1. Die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p, j = 1, \ldots, n$ bilden eine Basis in $\mathcal{D}_p(M) \cong T_pM$, d.h. jeder Tangentialvektor $\xi \in T_pM$ schreibt sich eindeutig als

$$\xi = \sum_{j=1}^n v_j \ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \ , \qquad v_j \in \mathbb{R} \ .$$

2. Da $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$, bestimmen sich die Koeffizienten v_j durch $v_j = L_\xi(x_j) = dx_j(\xi)$. Insbesondere gilt:
$$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p = (dx_p)^{-1}(e_j) \ .$$

3. Die Derivationen $\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \in T_pM$ entsprechen den Kurven
$$\alpha_j(t) = x^{-1}(x(p) + te_j) \ .$$

4. Seien (U,x) und (V,y) zwei Karten um p. Dann gilt:
$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \ .$$

5. Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und seien $(U,x),(V,y)$ Karten um p bzw. $f(p)$. Dann gilt:
$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \ ,$$
wobei f_j die Komponentenfunktion $f_j = y_j \circ f$ bezeichnet.

2.3 Das Tangentialbündel

Definition 2.12 *Das* Tangentialbündel TM *einer Mannigfaltigkeit* M *ist definiert als die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume:*

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM \ .$$

Satz 2.13 *Sei* M *eine* n*-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann trägt* TM *die Struktur einer* $2n$*-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die Fußpunktabbildung* $\pi\colon TM \to M$ *ist surjektiv und differenzierbar.*

Beweis: Man definiert die kanonische Projektion als die Fußpunktabbildung:

$$\pi\colon TM \to M, \qquad \pi(\xi) = p \qquad \text{falls} \quad \xi \in T_pM \ .$$

Sei (U, x) eine Karte von M, dann definiert man

$$\begin{aligned} &\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to x(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ &\Phi(\xi) = (x \circ \pi(\xi), dx_{\pi(\xi)}(\xi)) \end{aligned}$$

Es ist klar, dass Φ eine bijektive Abbildung ist. Die Topologie auf TM wird durch die Forderung definiert, dass alle Abbildungen Φ Homöomorphismen sind.

Nun ist noch der Kartenwechsel zu berechnen. Dafür seien (U, x), (V, y) Karten um $p \in M$ mit den assoziierten Karten $(\pi^{-1}(U), \Phi), (\pi^{-1}(V), \Psi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi^{-1}\colon \quad & x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \\ & (q, v) \mapsto (y \circ x^{-1}(q), d(yx^{-1})_q v) \ . \end{aligned}$$

Denn für $\xi = \Phi^{-1}(q, v)$ folgt $\pi(\xi) = x^{-1}(q)$ und $v = dx_{\pi(\xi)}(\xi)$, wobei $x(\pi(\xi)) = q$. Wendet man darauf Ψ an, so ergibt sich

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(q, v) = \Psi(\xi) = (y \circ \pi(\xi), dy_{\pi(\xi)}(\xi)) = (yx^{-1}(q), dy_{\pi(\xi)} \circ (dx_{\pi(\xi)})^{-1} v) \ ,$$

der Kartenwechsel ist also differenzierbar und die Karten $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ definieren eine differenzierbare Struktur auf TM. □

Offensichtlich hat TM eine abzählbare Basis der Topologie und $\pi\colon TM \to M$ ist differenzierbar, denn

$$x \circ \pi \circ \Phi^{-1}\colon x(U) \times \mathbb{R}^n \to x(U), (x_1, \ldots, x_{2n}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \ .$$

Es bleibt noch, die Hausdorff-Eigenschaft zu zeigen. Dafür seien (p, a) und (q, b) zwei verschiedene Punkte in TM, mit $a \in T_pM$ und $b \in T_qM$.

1. Fall: Sei $p \neq q$. Dann existieren offene Umgebungen U, V von p, q mit $U \cap V = \emptyset$. Dann sind aber auch $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ disjunkte offene Umgebungen von (p, a) und (q, b).

2. Fall: Sei $p = q, a \neq b$ in T_pM. Sei (U, x) eine Karte um p mit der Karte $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ für TM und $\Phi(a) = (x(p), v), \Phi(b) = (x(p), w)$. Sind V, W offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit $v \in V, w \in W$ und $V \cap W = \emptyset$, dann sind $\Phi^{-1}(x(U) \times V)$ und $\Phi^{-1}(x(U) \times W)$ disjunkte offene Umgebungen von a, b.

2.4 Vektorbündel

Das Tangentialbündel TM ist ein Beispiel für ein reelles Vektorbündel. Diese sind folgendermassen definiert.

Definition 2.14 *Seien E und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi\colon E \to B$ eine differenzierbare Abbildung. Ein* Vektorbündel *vom Rang n ist ein Tripel (E, π, B) mit:*

1. *π ist surjektiv*
2. *Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von B und Diffeomorphismen*

$$h_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$$

mit:

- $h_i(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{R}^n$
- $h_i \circ h_j^{-1}\colon (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n, \quad (x, v) \mapsto (x, g_{ij}(x)v)$
  für differenzierbare Abbildungen $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to GL(n, \mathbb{R})$.

Bemerkungen:

1. Das Urbild $E_x = \pi^{-1}(x)$ heißt *Faser* über $x \in B$. Die Fasern E_x sind für alle x Vektorräume isomorph zu $\mathbb{R}^n$.
2. Die Mannigfaltigkeit E nennt man *Totalraum*, B die *Basis* und h_i die *lokalen Trivialisierungen* des Vektorbündels $\pi\colon E \to B$.

Beispiele: (1) Das *Tangentialbündel* $\pi\colon TM \to M$ einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist ein Vektorbündel vom Rang n. (2) Das *triviale Bündel* über B ist definiert als $\pi\colon E = B \times \mathbb{R}^n \to B$, wobei π die Projektion auf den ersten Faktor ist.

Definition 2.15 *Eine differenzierbare Abbildung $s\colon B \to E$ heißt* Schnitt *des Vektorbündels, falls*

$$\pi \circ s = \mathrm{id}_B \ ,$$

d.h. falls $s(x) \in E_x$ für alle $x \in B$. Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der Schnitte in E bezeichnet man mit $\Gamma(E)$.

3 Vektorfelder

Definition 3.1 *Ein* Vektorfeld *ist ein Schnitt des Tangentialbündels, d.h. eine differenzierbare Abbildung $X\colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, also $X_p = X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$.*

Beispiel: Sei $M = S^n$ dann schreibt sich der Tangentialraum in einem Punkt $p \in S^n$ als $T_pS^n = p^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle v, p\rangle = 0\}$. Ein Vektorfeld auf S^n ist also eine glatte Abbildung $v\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle v(p), p\rangle = 0$ für alle $p \in S^n$. Interessant ist die Frage, ob es Vektorfelder ohne Nullstellen gibt, also ohne p mit $v(p) = 0$. Auf der S^{2n+1} läßt sich leicht ein Beispiel dafür angeben:

$$v(x_0, \dots, x_{2n+1}) := (-x_1, x_0, \dots, -x_{2n+1}, x_{2n}) \ .$$

Der Satz vom Igel in allgemeiner Fassung besagt nun:

Satz: Jedes Vektorfeld auf S^{2n} hat eine Nullstelle.

Bemerkung:

1. Sei $n + 1 = (2r + 1)\, 2^{c+4d}$ mit $0 \leq c \leq 3$. Dann gibt es auf der S^n genau $2^c + 8d - 1$ punktweise linear unabhängige Vektorfelder, die also insbesondere keine Nullstellen haben.

2. S^n hat n linear unabhängige Vektorfelder genau dann, wenn $n = 1, 3$ oder 7.

3. Gibt es auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M die maximal mögliche Anzahl von n linear unabhängigen Vektorfeldern, so sagt man, dass M *parallelisierbar* bzw. das Tangentialbündel trivial ist.

4. Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der Vektorfelder auf M bezeichnet man mit $\chi(M)$ bzw. $\Gamma(TM)$.

3.1 Vektorfelder als Derivationen

Tangentialvektoren kann man identifizieren mit Derivationen auf Funktionskeimen. Analog kann man Vektorfelder identifizieren mit Derivationen auf dem Raum $\mathcal{C}^\infty(M)$ der glatten Funktionen auf M. Die Identifikation wird wieder durch eine Lie-Ableitung gegeben.

Definition 3.2 *Eine* Derivation δ *auf* $\mathcal{C}^\infty(M)$ *ist eine lineare Abbildung* $\delta\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ *mit der Produktregel:*

$$\delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g) \ .$$

Der Raum der Derivationen auf M *wird mit* $\mathcal{D}(M)$ *bezeichnet.*

Beispiel: Jedes Vektorfeld $X \in \chi(M)$ definiert durch die Lie-Ableitung $L_X\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Derivation auf M. Dabei ist $L_X(f)(p) := L_{X_p}[f] = df_p(X_p)$.

Satz 3.3 *Die Abbildung* $X \mapsto L_X$ *von* $\Gamma(TM)$ *nach* $\mathcal{D}(M)$ *ist ein Isomorphismus unendlich-dimensionaler Vektorräume.*

Beweis: Klar ist, dass $X \mapsto L_X$ eine lineare Abbildung ist, und dass die Lie-Ableitung L_X tatsächlich eine Derivation auf M definiert.

Als erstes soll gezeigt werden, dass $X \mapsto L_X$ injektiv ist, d.h. für $X \in \chi(M)$ mit $X \neq 0$ ist $L_X \neq 0$ zu zeigen. Dafür sei $X \neq 0$ ein Vektorfeld auf M, d.h. es existiert ein $p \in M$ mit $X_p = X(p) \neq 0$. Nun war aber schon gezeigt worden, dass die Abbildung $X_p \in T_pM \mapsto L_{X_p} \in \mathcal{D}_p(M)$ injektiv ist. Damit existiert eine Funktion f, definiert auf einer Umgebung U von p mit $L_{X_p}[f] = df_p(X_p) \neq 0$.

Man kann nun f zu einer auf ganz M definierten Funktion fortsetzen. Dafür wählt man eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}(\phi) \subset U$ und $\phi|_V \equiv 1$ auf einer Umgebung $V \subset U$ von p. Dann ist $f \cdot \phi$ die gewünschte Fortsetzung von f, deren Lie-Ableitung nach X nicht verschwindet:

$$L_X(f \cdot \phi)(p) = d(f \cdot \phi)_p(X_p) = df_p(X_p) \neq 0 \ .$$

Die Existenz der sogenannten *Abschneidefunktion* ϕ bleibt noch zu zeigen.

Als zweites ist zu zeigen, dass $X \mapsto L_X$ surjektiv ist. Zunächst bemerkt man, dass sich mit Hilfe von Abschneidefunktionen jeder Funktionskeim einer lokal definierten Funktion als Keim einer global definierten Funktion auffassen läßt. Sei nun δ eine Derivation auf M. Dann definiert $\delta_p\colon f \mapsto \delta(f)(p)$ eine Derivation auf den Funktionskeimen $\mathcal{C}_p^\infty(M)$. Wie schon gezeigt wurde, schreibt sich δ_p als $\delta_p = \sum_{j=1}^n \delta_p(x_j) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p$. Damit erhält man ein Vektorfeld X auf M: in jedem Punkt $p \in M$ definiert man X_p als den Tangentialvektor, der zur Derivation δ_p gehört. Es gilt dann $L_X = \delta$. In lokalen Koordinaten (U, x) schreibt sich X als

$$X|_U = \sum_{j=1}^n \delta(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \ ,$$

womit gezeigt ist, dass X ein glattes Vektorfeld ist.

Zur Konstruktion der Abschneidefunktion ϕ:

Lemma 3.4 *Sei $R > 0$, dann existiert eine glatte Funktion $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit*

$$\phi|_{B_0(\frac{1}{3}R)} \equiv 1 \qquad \textit{und} \qquad \phi|_{\mathbb{R}^n \setminus B_0(\frac{2}{3}R)} \equiv 0 \ .$$

3.2 Die Lie-Algebra der Vektorfeldern

Die Verknüpfung zweier Derivationen ist i.A. keine Derivation. Es gilt:

$$\delta_1\, \delta_2(f \cdot g) = (\delta_1\, \delta_2 f) \cdot g + \delta_2 f \cdot \delta_1 g + \delta_1 f \cdot \delta_2 g + f \cdot \delta_1 \delta_2 g \ .$$

Insbesondere hat man damit gezeigt:

Lemma 3.5 *Seien δ_1, δ_2 zwei Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty$. Dann ist $\delta_1\, \delta_2 - \delta_2\, \delta_1$ wieder eine Derivation.*

Definition 3.6 *Seien X, Y Vektorfelder auf M. Dann ist $[X, Y]$ das eindeutig bestimmte Vektorfeld mit*

$$L_{[X,Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X \ .$$

Man nennt $[X, Y]$ die Lie-Klammer *bzw. den* Kommutator *der Vektorfelder X, Y. Die* Lie-Ableitung *von Y nach X ist definiert als $L_X Y := [X, Y]$.*

Lemma 3.7 *Die Vektorfelder $X, Y \in \chi(M)$ seien lokal gegeben als $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dann gilt*

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Beweis: Man schreibt das Vektorfeld $[X, Y]$ lokal als $[X, Y] = \sum c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Die Koeffizienten c_i bestimmen sich durch

$$c_i = [X, Y](x_i) = L_X(L_Y(x_i)) - L_Y(L_X(x_i)) = L_X(b_i) - L_Y(a_i) = \sum_j a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - \sum_j b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \ .$$

□

Satz 3.8 *Seien X, Y, Z Vektorfelder auf M, a, b reelle Zahlen und f eine differenzierbare Funktion auf M, dann gilt:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$, *(Schiefsymmetrie bzw. Antikommutativität)*
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$, *(Linearität)*
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, *(Jacobi-Identität)*

4. $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X, \quad [X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$.

Bemerkung: Eine reelle *Lie-Algebra* ist ein reeller Vektorraum V mit einer Abbildung $[\cdot,\cdot]\colon V \times V \to V$, die die Eigenschaften 1, 2, 3 erfüllt. Die Lie-Klammer $[\cdot,\cdot]$ ist also eine bilineare schiefsymmetrische Abbildung, die die Jacobi-Identität erfüllt.

Der Raum $\chi(M)$ der Vektorfelder über einer Mannigfaltigkeit M zusammen mit dem Kommutator ist eine unendlichdimensionale reelle Lie-Algebra.

3.3 Das Bild von Vektorfeldern unter Diffeomorphismen

Definition 3.9 *Sei $f\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus, dann ist das Bild des Vektorfeldes $X \in \chi(M)$ unter f ein Vektorfeld auf N definiert durch*

$$(f_*X)_q := df_{f^{-1}(q)}(X_{f^{-1}(q)}) \ .$$

Zwei Vektorfelder X, Y nennt man f-verknüpft, falls es einen Diffeomorphismus f gibt mit $Y = f_*X$.

Satz 3.10 *Sei $f\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus und $X \in \chi(M)$. Dann ist f_*X ein glattes Vektorfeld auf N und es gilt:*

1. $L_{f_*X}(\phi) = L_X(\phi \circ f) \circ f^{-1}$
2. $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$

wobei ϕ eine beliebige reell-wertige Funktion auf N ist.

3.4 Vektorfelder und Differentialgleichungen

Sei $X \in \chi(M)$ ein Vektorfeld auf M und (U, x) eine Karte um $p \in M$. Dann schreibt sich X eingeschränkt auf U als:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

für glatte Funktionen $a_i\colon U \to \mathbb{R}$. Man sucht nun glatte Kurven $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit

1. $\qquad c(0) = p$
2. $\qquad \dot{c}(t) = X_{c(t)} \qquad$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Der Tangentialvektor $\dot{c}(t)$ schreibt sich in der Karte (U, x) als $\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$ wobei c_i definiert ist durch $c_i := x_i \circ c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gleichung (2) ist damit äquivalent zu

$$\dot{c}_i(t) = a_i(c(t)) = (a_i\, x^{-1})\,(c_1(t), \ldots, c_n(t)) \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

Zur Bestimmung der Kurve c erhält man also n gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen $c_i, i = 1, \ldots, n$ mit den Anfangsbedingungen $c_i(0) = x_i(p)$.

Definition 3.11 *Eine Kurve* $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *heißt* Integralkurve *des Vektorfeldes* $X \in \chi(M)$ *durch* p*, falls* $c(0) = p$ *und* $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$ *für alle* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Aus dem Satz über die lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen bzw. dem Satz über die differenzierbare Abängigkeit von den Anfangswerten ergeben sich die folgenden Eigenschaften der Integralkurven:

Satz 3.12 *Für alle* $p \in M$ *existiert ein Intervall* $I_p \subset \mathbb{R}$ *um* 0 *und eine eindeutig bestimmte Kurve* $c_p\colon I_p \to M$ *mit*

$$c_p(0) = p \qquad \textit{und} \qquad \dot{c}_p(t) = X_{c(t)}$$

für alle $t \in I_p$*, d.h. die Integralkurven von* X *sind (lokal) eindeutig bestimmt und existieren lokal.*

Satz 3.13 *Für alle* $p \in M$ *existiert eine offene Umgebung* U *von* p *und ein Intervall* I *um Null, so dass für alle* $q \in U$ *die Kurve* c_q *auf* I *definiert ist. Die Abbildung*

$$I \times U \to M, \qquad (t, q) \mapsto c_q(t)$$

ist differenzierbar.

Folgerung 3.14 *Durch jeden Punkt der Mannigfaltigkeit* M *geht genau eine Integralkurve von* X*, d.h. insbesondere, dass sich Integralkurven nicht schneiden.*

Definition 3.15 *Die Abbildung* $(t, q) \mapsto c_q(t)$ *heißt der* lokale Fluß *des Vektorfeldes* X*. Die Integralkurven von* X *nennt man auch* Flußlinien *von* X*. Der Fluß definiert auch für alle hinreichend kleinen Parameter* t *eine lokale Abbildung* $\varphi_t\colon U \subset M \to M$ *durch* $\varphi_t(q) = c_q(t)$.

Satz 3.16 *Die Abbildungen* ϕ_t *sind lokale Diffeomorphismen und es gilt*

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$$

für alle Parameter t, s*, für die* φ_t, φ_s *und* φ_{t+s} *definiert sind. Man sagt:* $\{\varphi_t\}$ *ist eine 1-parametrige Gruppe (lokaler) Diffeomorphismen.*

Beweis: Aus der Definition der Fluß-Abbildung φ_t folgt:

$$\varphi_{t+s}(q) = c_q(t+s) = c_{c_q(s)}(t) = \varphi_t(c_q(s)) = \varphi_t \circ \varphi_s(q)$$

Insbesondere folgt aus dieser Gleichung $\mathrm{id} = \phi_0 = \phi_{t+(-t)} = \varphi_t \circ \varphi_{-t}$, also $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$. Damit ist φ_t invertierbar und die Umkehrabbildung ist wieder differenzierbar, d.h. φ_t ist ein (lokaler) Diffeomorphismus. □

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}$ und X das Vektorfeld $X_x = x^2 \frac{d}{dx}$ für $x \in \mathbb{R}$. Die Integralkurve von X durch x ist gegeben durch $c(t) = \frac{x}{1-tx}$. Denn:

$$\dot{c}(t) = x \, \frac{-1}{(1-tx)^2} \, (-x) = \frac{x^2}{(1-tx)^2} = c(t)^2 = X_{c(t)}$$

wobei $T_x\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ identifiziert wird. Die Integralkurve von X durch x ist für folgende Parameter t definiert:

$$t \in (-\infty, \frac{1}{x}) \qquad \text{falls} \quad x > 0, \qquad t \in (\frac{1}{x}, \infty) \qquad \text{falls} \quad x < 0 \; .$$

Der Fluß ist also definiert auf $I_x = (-\frac{1}{|x|}, \frac{1}{|x|})$ und es folgt, dass I_x immer kleiner wird für $x \mapsto \pm\infty$.

Definition 3.17 *Ein Vektorfeld $X \in \chi(M)$ hat kompakten Träger, falls der Abschluß der Menge $\{p \in M \,|\, X_p \neq 0\}$ kompakt ist.*

Satz 3.18 *Ist X ein Vektorfeld mit kompaktem Träger, so ist sein Fluß φ_t für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert und jedes $\varphi_t \colon M \to M$ ist ein globaler Diffeomorphismus.*

Bemerkung: Die Voraussetzung des Satzes ist zum Beispiel für kompakte Mannigfaltigkeiten erfüllt. Ist der lokale Fluß von X für alle t definiert, so nennt man X vollständig.

Beweis: Für alle $p \in M$ existieren offene Umgebungen V von p und ein Intervall $I_q = (-\varepsilon, \varepsilon)$, so dass der Fluß $\varphi_t(q)$ für alle $q \in V, t \in I_q$ definiert ist. Endlich viele dieser Mengen überdecken den Träger $K = \mathrm{supp}\,(X)$: $V_1, \ldots, V_r$, d.h.

$$X_q = 0 \qquad \text{für alle} \quad q \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{r} V_i \; .$$

Durch Punkte $q \in M$ mit $X_q = 0$ existiert immer die konstante Integralkurve $c(t) = q$. Seien $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ die Definitionsbereiche der Flüsse auf V_i und $\varepsilon := \min \varepsilon_i$. Dann ist $\varphi_t(q)$ definiert für alle $q \in M$ und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sei $T \in \mathbb{R}$ beliebig und $|T| = k\,\frac{\varepsilon}{2} + r$, mit $k \in \mathbb{N}$ und $r \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$. Man definiert nun

$$\varphi_T := (\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})^k \cdot \varphi_r \quad \text{für} \quad T > 0 \qquad \text{und} \qquad \varphi_T := (\varphi_{-\frac{\varepsilon}{2}})^k \cdot \varphi_r \quad \text{für} \quad T < 0 \; .$$

Mit dieser Definition wird $\{\varphi_t\}$ ein global definierter Fluß des Vektorfeldes X. □

3.5 Lie-Ableitung von Vektorfeldern

Die Lie-Ableitung von Funktionen und Vektorfeldern kann man auch mit Hilfe des lokalen Flußes beschreiben. Sei X ein glattes Vektorfeld auf M mit dem lokalem Fluß $\varphi_t\colon M \to M$. Dann ist X nach Definition tangential zu den Flußlinien $c_p(t) = \varphi_t(p)$, woraus folgt:

$$\begin{aligned} L_X(f)_p &= df_p(X_p) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\varphi_t(p)) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(f(\varphi_t(p)) - f(p)) \\ &= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}((\varphi_t^* f)(p) - f(p)) \ , \end{aligned}$$

wobei das Zurückziehen von Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mittels φ_t durch Verknüpfung definiert ist, d.h. $(\varphi_t^* f)(p) = f(\varphi_t(p))$. Analog, also unter Benutzung des lokalen Flußes kann man nun auch die Lie-Ableitung anderer Objekte beschreiben. Für Vektorfelder definiert man das Zurückziehen mittels der lokalen Diffeomorphismen φ_t durch

$$(\varphi_t^* Y)_p = ((\varphi_{-t})_* Y)_p = (d\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)} Y_{\varphi_t(p)} \ .$$

wobei $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ und $d\varphi_{-t}\colon T_{\varphi_t(p)}M \to T_pM$.

Satz 3.19 *Seien X, Y beliebige glatte Vektorfelder auf M. Dann gilt in $p \in M$:*

$$L_X Y_p = [X,Y]_p \ = \ \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}((\varphi_t^* Y)_p - Y_p) \ = \ \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(Y_p - (\varphi_{t*} Y)_p) \ .$$

Beweis: Beim Übergang von φ_t^* zu φ_{t*} geht t in $-t$ über, daher stimmen die beiden Grenzwerte in der Formel für $L_X Y$ offensichtlich überein.

Sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann definiert man $f(t,p) := f(\varphi_t(p)) - f(p)$. Es existiert eine glatte Funktion g mit $f(t,p) = t\, g(t,p)$. Insbesondere folgt:

$$g(0,p) = \lim_{t\to 0} g(t,p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\varphi_t(p)) = X_p(f) = L_X f_p$$

Die Existenz der Funktion g ist ein Spezialfall des Lemmas 2.9. Unmittelbar aus der Definition des Differentials ergibt sich nun die folgende Rechnung

$$\begin{aligned} (\varphi_t^* Y)_p(f) &= (d\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)} Y_{\varphi_t(p)}(f) \\ &= Y_{\varphi_t(p)}(f \circ \varphi_{-t}) \\ &= Y_{\varphi_t(p)}(f(-t,\cdot) + f) \\ &= -t\, Y_{\varphi_t(p)}(g(t,\cdot)) + Y_{\varphi_t(p)}(f) \\ &= Y(f)_{\varphi_t(p)} - t\, Y_{\varphi_t(p)}(g(t,\cdot)) \end{aligned}$$

Für den Grenzwert folgt also:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}((\varphi_t^* Y)_p - Y_p)(f) &= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(Y(f)_{\varphi_t(p)} - Y(f)_p) - \lim_{t\to 0} Y_{\varphi_t(p)}(g(t,\cdot)) \\ &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} Y(f)(\varphi_t(p)) - Y_p(X(f)) \\ &= X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) \\ &= [X,Y]_p(f) \ . \end{aligned}$$

□

3.6 Ergänzungen zu Vektorfeldern

Satz 3.20 *Sei X ein Vektorfeld auf M mit $X_p \neq 0$ für ein $p \in M$. Dann existiert eine Karte (U, y) um p mit*

$$X = \frac{\partial}{\partial y_1} \qquad \textit{auf} \quad U \ .$$

Beweis: Die Aussage ist lokal, kann also mittels Karten auf die entsprechende Situation im $\mathbb{R}^n$ zurückgeführt werden. Somit sei o.B.d.A. $M = \mathbb{R}^n$ mit den Standardkoordinaten $x = (x_1, \ldots, x_n)$, weiter sei $p = 0$ und $X_0 = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0 = e_1$. Dies letzte Eigenschaft kann man immer durch eine lineare Koordinatentransformation erreichen.

Man nutzt folgende Idee für die Konstruktion der geeigneten Karten: durch den Punkt $(0, a_2, \ldots, a_n)$ existiert eine eindeutig bestimmte Integralkurve von X. Jeder Punkt auf dieser Kurve ist eindeutig festgelegt durch die benötigte Zeit.

Sei φ_t der lokale Fluß von X, dann definiert man durch

$$\psi(a_1, \ldots, a_n) = \varphi_{a_1}(0, a_2, \ldots, a_n)$$

eine Abbildung ψ auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$. Man möchte nun zeigen, dass ψ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Dazu berechnet man $d\psi$ im Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n)$:

$$\begin{aligned}
d\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_a\right)(f) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0 (f \circ \psi) \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left[f(\psi(a_1 + t, a_2, \ldots, a_n)) - f(\psi(a))\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left[f(\varphi_{a_1+t}(0, a_2, \ldots, a_n) - f(\psi(a))]\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left[f(\varphi_t(\psi(a))) - f(\psi(a))\right] \\
&= X(f)_{\psi(a)}
\end{aligned}$$

Analog berechnet man nun im Punkt 0 und für $i \geq 2$ das Differential von ψ auf den Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0$:

$$\begin{aligned}
d\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0\right)(f) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 (f \circ \psi) \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left[f(\psi(0, \ldots, t, \ldots, 0)) - f(0)\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left[f(0 \ldots, t, \ldots, 0) - f(0)\right] \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_0
\end{aligned}$$

Da $X_0 = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0$ folgt $d\psi_0 = \mathrm{Id}$. Damit ist ψ ein lokaler Diffeomorphismus und man kann $y := \psi^{-1}$ als neue Koordinaten um die $0 \in \mathbb{R}^n$ einführen. In diesen Karten gilt dann: $X = \frac{\partial}{\partial y_1}$. Denn wie schon gezeigt ist

$$X_b(f) = d\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\psi^{-1}(b)}\right)(f) = \frac{\partial f \circ \psi}{\partial x_1}\Big|_{\psi^{-1}(b)} \ .$$

Nach Definition der partiellen Ableitung in einer Karte (U, x) gilt andererseits:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_b (f) = \left.\frac{\partial f \circ \psi}{\partial x_1}\right|_{\psi^{-1}(b)} \quad .$$

□

Im Folgenden soll $L_X X = 0$ gezeigt werden. Das folgt zwar direkt aus der Definition der Lie-Klammer, läßt sich aber auch mit Hilfe des lokalen Flußes φ_t von X zeigen. Tatsächlich gilt $(\varphi_{t*}X)_p = X_p$ für alle $p \in M$ und alle t, für die φ_t definiert ist: Der Vektor $X_{\varphi_{-t}(p)}$ ist der Tangentialvektor an die Kurve $s \mapsto \varphi_s(p)$ für $s = -t$ bzw. der Tangentialvektor an die Kurve $c(s) := \varphi_{s-t}(p)$ für $s = 0$. Daher folgt:

$$(\varphi_{t*}X)_p = d\varphi_t(X_{\varphi_{-t}(p)}) = d\phi_t \left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} c(s) \right) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \varphi_t \circ \varphi_{s-t}(p) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \varphi_s(p) = X_p$$

Aus der Definition der Lie-Ableitung als Ableitung $L_X X$ der Kurve $(\varphi_{t*}X)_p$ erhält man damit nochmal $L_X X = 0$.

Lemma 3.21 *Sei ψ ein Diffeomorphismus und X ein Vektorfeld auf M mit dem lokalem Fluß φ_t. Dann hat das Vektorfeld $\psi_* X$ den Fluß $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$.*

Beweis: Sei f ein beliebiger Funktionskeim um $q \in M$. Dann ergibt sich die Aussage des Lemmas aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} (\psi_* X)_q(f) &= d\psi(X_{\psi^{-1}(q)})(f) = X_{\psi^{-1}}(f \circ \psi) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} (f \circ \psi)(\varphi_t(\psi^{-1}(q))) \\ &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(q)) \ . \end{aligned}$$

Man sieht, dass das Vektorfeld $\psi_* X$ in einem Punkt q tangential an die Kurve $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(q))$. Die Menge dieser Kurven bilden damit den lokalen Fluß von $\psi_* X$. □

Folgerung 3.22 *Sei $\psi : M \to M$ ein Diffeomorphismus und X ein Vektorfeld auf M mit dem lokalen Fluß φ_t. Dann gilt:*

$$\psi_* X = X \qquad \textit{genau dann, wenn} \qquad \varphi_t \circ \psi = \psi \circ \varphi_t \ .$$

Beweis: Die Vektorfelder X und $\psi_* X$ stimmen genau dann überein, wenn ihre lokalen Flüsse gleich sind. Nach dem obigen Lemma bedeutet das: $\varphi_t = \psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$. □

Das folgende Lemma gibt eine naheliegende Charakterisierung der Bedingung $[X, Y] = 0$: zwei Vektorfelder kommutieren genau dann, wenn ihre Flüsse kommutieren.

Lemma 3.23 *Sei X ein Vektorfeld mit dem lokalem Fluß φ_t und sei Y ein Vektorfeld mit dem lokalem Fluß ψ_t. Dann gilt:*

$$[X, Y] = 0 \qquad \textit{genau dann, wenn} \qquad \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \ ,$$

wobei die rechte Gleichung für alle s und t erfüllt sein soll, für die die entsprechenden Flüsse definiert sind.

Beweis: Sei zunächst vorausgesetzt, dass die Flüsse kommutieren dann folgt nach Folgerung 3.22 $\varphi_{t*}Y = Y$ für alle t, für die der Fluß definiert ist. Nach Ableiten erhält man daraus $L_X Y = 0$.

Für den Beweis der umgekehrten Richtung hat man in allen Punkte $q \in M$ die Voraussetzung: $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(Y_q - (\varphi_{t*}Y)_q) = 0$ (∗). Man definiert nun eine Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pM$ durch $c(t) = (\varphi_{t*}Y)_p$. Die Berechnung des Tangentialvektors an c im Punkt $c(t)$ ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{c}(t) &= \lim_{s\to 0} \tfrac{1}{s}[c(t+s) - c(t)] \\ &= \lim_{s\to 0} \tfrac{1}{s}[\varphi_{(t+s)*}Y - \varphi_{t*}Y]_p \\ &= \lim_{s\to 0} \tfrac{1}{s}[d\varphi_t(\varphi_{s*}Y)_{\varphi_{-t}(p)} - d\varphi_t Y_{\varphi_{-t}(p)}] \quad . \\ &= d\varphi_t \left(\lim_{s\to 0} \tfrac{1}{s}[(\varphi_{s*}Y)_{\varphi_{-t}(p)} - Y_{\varphi_{-t}(p)}]\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichung nutzt man die Voraussetzung (*) im Punkte $\varphi_{-t}(p)$. Außerdem verwendet man die offensichtliche Beziehung $(f \circ g)_* X = f_*(g_* X)$. Damit ist $c(t)$ konstant also $c(t) = c(0)$, d.h. $\varphi_{t*}Y = Y$ und die Behauptung ergibt sich aus Folgerung 3.22. □

In Satz 3.20 wurde gezeigt, dass man für ein Vektorfeld X mit $X_p \neq 0$ Karten (U, y) um p finden kann, für die X ein Koordinatenvektorfeld auf U ist. Man betrachtet nun folgendes Problem: gegeben sind zwei Vektorfelder X und Y, die in einem Punkt $p \in M$, und damit in einer kleinen Umgebung von p, linear unabhängig sind. Ist es dann möglich Karten zu finden, in denen X, Y Koordinatenvektorfelder sind? Aus dem Satz von Schwarz folgt, dass der Kommutator von je zwei Koordinatenvektorfeldern verschwindet, d.h. $[X, Y] = 0$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass es die gesuchten Koordinaten gibt. Tatsächlich ist diese Bedingung auch hinreichend.

Satz 3.24 *Seien $X_1, \dots, X_k$ Vektorfelder auf einer Umgebung V von $p \in M$, die in jedem Punkt von V linear unabhängig sind und es gelte $[X_a, X_b] = 0$ für $1 \leq a, b \leq k$. Dann existiert eine Karte (U, x) um p mit:*

$$X_a = \frac{\partial}{\partial x_a} \qquad \textit{auf} \quad U \quad \textit{für} \quad a = 1, \dots, k \ .$$

Beweis: O.B.d.A. kann man wieder annehmen: $M = \mathbb{R}^n, p = 0$ und $X_a = \frac{\partial}{\partial x_a}\Big|_0$ für $a = 1, \dots, k$. Sei φ^a_t der lokale Fluß zum Vektorfeld X_a, dann definiert man

$$\psi(a_1, \dots, a_n) := \varphi^1_{a_1}(\varphi^2_{a_2}(\dots(\varphi^k_{a_k}(0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots, a_n))\dots)) \ ,$$

Wie im Beweis von Satz 3.20 berechnet man das Differential von ψ und erhält:

$$d\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0\right) = \begin{cases} X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 & i = 1, \dots, k \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0 & i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

Somit ist ψ wieder auf einer Umgebung der Null ein Diffeomorphismus und man kann eine neue Karte durch $y = \psi^{-1}$ definieren. Analog zum Beweis von Satz 3.20 findet man auf dieser Kartenumgebung

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} \ .$$

Aus Lemma 3.23 folgt nun, dass man die Reihenfolge der $\phi^i_{a_i}$'s in der Definition von ψ vertauschen kann. Schreibt man nun $\psi = \phi^i_{a_i}(\ldots)$, so folgt für $i = 1, \ldots, k$

$$X_i = \frac{\partial}{\partial y_i} \ .$$

□

4 Integral-Mannigfaltigkeiten

Ziel dieses Abschnitts ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Integralkurven, sowie eine geometrische Interpretation von gewissen Systemen partieller Differentialgleichungen. Die Darstellung folgt dem entsprechenden Abschnitt im Buch von M. Spivak.

Definition 4.1 *Eine k-dimensionale* Distribution *auf M ist eine Zuordnung $p \mapsto \Delta_p$ mit*

1. *$\Delta_p \subset T_pM$ ist ein k-dimensionaler Unterraum*
2. *Für alle $p \in M$ existiert eine Umgebung U von p und auf U definierte Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k$ mit:*

$$\Delta_q = \operatorname{span}\{X_1(q), \ldots, X_k(q)\} \qquad \text{für alle} \quad q \in U \ .$$

Sei X ein Vektorfeld auf M. Man sagt, dass X ein Vektorfeld in Δ ist, falls $X_p \in \Delta_p$ für alle $p \in M$ gilt.

Bemerkung: Äquivalent kann man Distributionen auch als Unterbündel $\Delta \subset TM$ definieren. Vektorfelder in Δ sind dann genau die Schnitte von Δ.

Sei $E \to M$ ein Vektorbündel über M. Eine Teilmenge $F \subset E$ heißt *Unterbündel* von E, falls $F \to M$ ein Vektorbündel ist und F_p für alle $p \in M$ ein Unterraum von E_p ist. Es folgt, dass F eine Untermannigfaltigkeit von E ist.

Definition 4.2 *Eine* Integral-Mannigfaltigkeit *einer Distribution Δ ist eine Untermannigfaltigkeit $i : N \hookrightarrow M$ mit:*

$$di(T_pN) \ = \ \Delta_p \qquad \text{für alle} \quad p \in N \ .$$

Bemerkung: Der Begriff der Untermannigfaltigkeit ist hier in dem schwächeren Sinne zu benutzen, d.h. $N \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit, falls N eine Mannigfaltigkeit ist und eine injektive Immersion $i : N \to M$ existiert. Im Allgemeinen existieren keine Integral-Mannigfaltigkeiten (noch nicht einmal lokal). Als Beispiel betrachtet man folgende 2-dimensionale Distribution auf $\mathbb{R}^3$.

Beispiel: In $p = (a, b, c)$ sei die Distribution Δ gegeben als:

$$\Delta_p := \operatorname{span}\{ \tfrac{\partial}{\partial x}\big|_p + b\, \tfrac{\partial}{\partial z}\big|_p ,\ \tfrac{\partial}{\partial y}\Big|_p \} = \{ r\, \tfrac{\partial}{\partial x}\big|_p + s\, \tfrac{\partial}{\partial y}\Big|_p + br\, \tfrac{\partial}{\partial z}\big|_p \mid r, s \in \mathbb{R}\} \ .$$

Es soll nun gezeigt werden, dass zu Δ keine Integral-Mannigfaltigkeit existiert. Der Beweis läßt sich direkt geometrisch erbringen oder auch, indem man die folgende allgemeinere Situation betrachtet.

Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Distribution definiert in $p = (a, b, c)$ durch

$$\begin{aligned} \Delta_p = &\ \{ r\, \tfrac{\partial}{\partial x}\big|_p + s\, \tfrac{\partial}{\partial y}\Big|_p + [rf(a,b) + sg(a,b)]\, \tfrac{\partial}{\partial z}\big|_p \} \\ = &\ \operatorname{span}\{ \tfrac{\partial}{\partial x}\big|_p + f(a,b)\, \tfrac{\partial}{\partial z}\big|_p ,\ \tfrac{\partial}{\partial y}\Big|_p + g(a,b)\, \tfrac{\partial}{\partial z}\big|_p \} \end{aligned}$$

In $p = (a, b, c)$ ist Δ_p die Ebene mit der Gleichung $z - c = f(a,b)(x-a) + g(a,b)(y-b)$. Da f und g nicht von c abhängen ist die Ebene $\Delta_{(a,b,c)}$ parallel zur Ebene $\Delta_{(a,b,0)}$.

Sei N lokal um p eine Integral-Mannigfaltigkeit von Δ. Da kein Vektor in Δ, also kein Tangentialvektor an N, senkrecht zur $x\,y-$Ebene ist, läßt sich N lokal als Graph einer Funktion schreiben. Denn als Kodimension-1 Untermannigfaltigkeit ist N lokal von der Form $h^{-1}(0)$ für eine Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Der Tangentialraum an N in einem Punkt p ist dann gegeben als das orthogonale Komplement von $(\operatorname{grad} h)_p$. Die Bedingung $e_3 \notin \Delta_p = T_pN$ liefert also

$$\langle e_3, \operatorname{grad} h\rangle = \tfrac{\partial h}{\partial z} \neq 0$$

und aus dem Satz über implizite Funktionen folgt die Existenz einer Funktion α mit $h(x, y, \alpha(x, y)) = 0$ in einer kleinen Umgebung von p. Somit läßt sich in dieser Umgebung die Integral-Mannigfaltigkeit als Graph der Funtion α schreiben:

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \alpha(x, y)\} \ .$$

Damit ist $\Phi(x, y) := (x, y, \alpha(x, y))$ eine Parametrisierung von N und der Tangentialraum an N im Punkt p wird aufgespannt von den Vektoren $D_1\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $D_2\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, also den beiden Spalten der Jacobi-Matrix von Φ. Es folgt in $p = (a, b, \alpha(a, b))$:

$$T_pN = \operatorname{span}\{ \tfrac{\partial}{\partial x}\big|_p + \tfrac{\partial \alpha}{\partial x}(a,b)\, \tfrac{\partial}{\partial z}\big|_p ,\ \tfrac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \tfrac{\partial \alpha}{\partial y}(a,b)\, \tfrac{\partial}{\partial z}\big|_p \} \ .$$

Somit gilt $T_pN = \Delta_p$ genau dann, wenn

$$f(a,b) = \tfrac{\partial \alpha}{\partial x}(a,b), \qquad g(a,b) = \tfrac{\partial \alpha}{\partial y}(a,b) \ . \tag{4.1}$$

Sei nun α eine Lösung von (4.1), dann folgt aus dem Satz von Schwartz:

$$\tfrac{\partial^2 \alpha}{\partial x\, \partial y} = \tfrac{\partial^2 \alpha}{\partial y\, \partial x} \qquad \text{und damit} \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{\partial g}{\partial x} \ .$$

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung:

Satz 4.3 *Eine Lösung von (4.1) existiert genau dann, wenn* $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ *erfüllt ist.*

Beweis: Sei $\omega := f dx + g dy$ definiert als 1-Form auf $\mathbb{R}^3$, dann erhält man für das Differential von ω die Gleichung $d\omega = (\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}) dx \wedge dy$. Weiter gilt $d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy$. Offensichtlich ist α eine Lösung von (4.1) genau dann, wenn $\omega = d\alpha$. Aus $\omega = d\alpha$ folgt $d\omega = d^2\alpha = 0$ und damit $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0$. Umgekehrt folgt aus dieser Gleichung $d\omega = 0$. Das Lemma von Poincare liefert nun die Existenz einer Funktion α mit $\omega = d\alpha$. (Genauere Erklärungen der benutzten Begriffe folgen später.) $\square$

In dem ersten Beispiel einer 2-dimensionalen Distribution Δ in $\mathbb{R}^3$ hatte man $f(a, b) = b$ und $g(a, b) = 0$, also $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ und $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$. Damit ist die Bedingung aus Satz 4.3 nicht erfüllt, das System (4.1) hat also keine Lösung und es existiert keine (lokale) Integral-Mannigfaltigkeit von Δ.

Das allgemeinste Beispiel einer 2-dimensionalen Distribution in $\mathbb{R}^3$ ergibt sich, wenn man f, g als Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^3$ betrachtet, also in $p \in \mathbb{R}^3$ definiert:

$$\Delta_p = \{r \, \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + s \, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + [r f(p) + s g(p)] \, \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p\} = \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + f(p) \, \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p , \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + g(p) \, \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p\} .$$

Falls eine Integral-Mannigfaltigkeit N von Δ existiert, kann man sie wieder lokal als Graph einer Funktion realisieren, d.h. $N = \{(x, y, z) \mid z = \alpha(x, y)\}$. Wie oben wird T_pN aufgespannt von $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \, \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$ und $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \, \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$. Daraus folgt, dass die Bedingung $T_pN = \Delta_p$ äquivalent ist zu folgendem System partieller Differentialgleichungen:

$$f(a, b, \alpha(a, b)) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(a, b), \qquad g(a, b, \alpha(a, b)) = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(a, b) \ . \tag{4.2}$$

Wieder liefert der Satz von Schwartz eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Systems (4.2)

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \ . \tag{4.3}$$

Diese Formeln folgen aus der Kettenregel: Sei wie oben $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, \alpha(x, y))$. Dann berechnet sich die Jacobi-Matrix der Verknüpfung $f \circ \Phi$ durch $D(f \circ \Phi) = Df \circ D\Phi = \operatorname{grad}(f) \cdot (D_1\Phi, D_2\Phi)$. Für die Ableitung von $f \circ \Phi$ nach der zweiten Variablen findet man dann

$$\frac{\partial f(x,y,\alpha(x,y))}{\partial y} = \langle \operatorname{grad} f, D_2\Phi \rangle = \langle (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}), (0, 1, \frac{\partial \alpha}{\partial y} \rangle = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} \ .$$

Mit Hilfe von Gleichung (4.2) kann man in (4.3) noch α eliminieren und erhält so die Bedingung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot f \ . \tag{4.4}$$

Wie schon im vorigen Beispiel stellt sich erneut heraus, dass diese notwendige Bedingung auch schon hinreichend ist für die Lösbarkeit von (4.2).

Die Bedingung (4.4) kann man nun noch geometrischer interpretieren. Seien dafür $X := \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial z}$ und $Y := \frac{\partial}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial z}$ die beiden Vektorfelder, die die Distribution Δ aufspannen. Unter der Voraussetzung, dass eine Integral-Mannigfaltigkeit von Δ existiert zeigt sich (siehe unten), dass auch der Kommutator $[X, Y]$ zu Δ gehören muß.

Die Vektorfelder X, Y sind definiert auf $\mathbb{R}^3$, aber tangential an N (siehe unten). Durch eine kurze Rechnung findet man

$$[X,Y] = (\tfrac{\partial g}{\partial x} + f\,\tfrac{\partial g}{\partial z} - \tfrac{\partial f}{\partial y} - g\,\tfrac{\partial f}{\partial z})\tfrac{\partial}{\partial z} \ .$$

Wie schon bemerkt, sind die Tangentialvektoren an N also die Vektoren in Δ niemals senkrecht zur xy-Ebene, d.h. $a\,\frac{\partial}{\partial z}\big|_p \in \Delta_p$ ist nur für $a = 0$ möglich. Es folgt also $[X,Y]_p \in \Delta_p$ genau dann, wenn die Bedingung (4.4) erfüllt ist.

4.1 Der Satz von Frobenius in der Analysis

Satz 4.4 *Sei $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen und $U \subset \mathbb{R}^m$ eine Umgebung der Null. Seien weiter $f_j : U \times V \to \mathbb{R}^n$ für $j = 1, \ldots, m$ glatte Funktionen. Dann existiert für jedes $x \in V$ höchstens eine Funktion $\alpha : W \to V$, definiert auf einer Umbebung $W \subset \mathbb{R}^m$ der Null mit:*

1. $\alpha(0) = x$
2. $\frac{\partial \alpha}{\partial t_j}(t) = f_j(t, \alpha(t))$ *für alle* $t \in W, j = 1, \ldots, m$.

Eine Lösung α existiert genau dann, wenn

$$\frac{\partial f_j}{\partial t_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \cdot f_i^k = \frac{\partial f_i}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \cdot f_j^k$$

auf einer Umgebung von $(0, x) \in U \times V$ für alle $1 \leq i, j \leq m$ erfüllt ist.

Notation:

1. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet Punkte im $\mathbb{R}^n$ und $t = (t_1, \ldots, t_m)$ bezeichnet Punkte in $\mathbb{R}^m$
2. $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ bezeichnet die $i$te Spalte der Jacobi-Matrix von f
3. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bezeichnet die $(m+i)$te Spalte der Jacobi-Matrix von f
4. $f_j = (f_j^1, \ldots, f_j^n)$

Im Beispiel war $m = 2, n = 1$ und $f_1 = f, f_2 = g$.

4.2 Integrable Distributionen

Sei $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und seien X, Y zwei Vektorfelder auf M. Durch Einschränkung auf N erhält man zwei Vektorfelder auf N. Es soll zunächst gezeigt werden, dass der Kommutator dieser eingeschränkten Vektorfelder gleich der Einschränkung von $[X, Y]$ auf N ist. Das ist nicht offensichtlich, da der Kommutator auf M mehr Ableitungen enthält.

Definition 4.5 *Sei $f : N \to M$ eine differenzierbare Abbildung. Zwei Vektorfelder $X \in \chi(N)$ und $Y \in \chi(M)$ nennt man* f-verknüpft*, falls*

$$Y_{f(p)} = df(X_p)$$

für alle $p \in M$ erfüllt ist.

Bemerkung: Zwei Vektorfelder $X \in \chi(N), Y \in \chi(M)$ sind genau dann f-verknüpft, wenn

$$Y(\phi) \circ f = X(\phi \circ f)$$

für alle Funktionen (bzw. Funktionskeime) ϕ auf M gilt.

Lemma 4.6 *Sei $f : N \to M$ eine Immersion und $Y \in \chi(M)$ ein Vektorfeld mit*

$$Y_{f(p)} \in \operatorname{Im}(df_p)\ .$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld X auf N, so dass X und Y f-verknüpft sind.

Beweis: Man definiert X_p durch die Gleichung $Y_{f(p)} = df(X_p)$. Der Vektor X_p definiert nach Voraussetzung und ist eindeutig bestimmt, da f eine Immersion, d.h. df injektiv ist.

Da f eine Immersion ist existieren Karten (U, x) bzw. (V, y) um p bzw. $f(p)$ mit

$$y \circ f \circ x^{-1}(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0)\ .$$

In diesen Karten gilt dann

$$df(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p) = \tfrac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(p)}\ .$$

Sei nun $Y = \sum a_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ mit glatten, auf V definierten, Funktionen a_i. Dann ist notwendigerweise $X = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, wobei $b_i = a_i \circ f$ wieder glatte Funktionen sind und X damit ein glattes Vektorfeld. □

Beispiel: Sei N eine Untermannigfaltigkeit von M und $i : N \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung, weiter sei $Y \in \chi(M)$ ein Vektorfeld mit $Y_p \in di(T_pN)$ für alle $p \in N$. Das wie oben beschriebene, eindeutig bestimmte Vektorfeld $X \in \chi(N)$ mit $di(X) = Y$, ist dann genau die Einschränkung von Y auf N.

Lemma 4.7 *Sei $f : N \to M$ eine differenzierbare Abbildung und seien $X_i \in \chi(N)$ bzw. $Y_i \in \chi(M), i = 1, 2$ zwei Paare von f-verknüpften Vektorfeldern. Dann sind auch die Kommutatoren $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ f-verknüpft.*

Beweis: Sei g eine Funktion (bzw. Funktionskeim) auf M. Dann gilt nach Voraussetzung für $i = 1, 2$:

$$Y_i(g) \circ f = X_i(g \circ f)$$

Damit berechnet man

$$\begin{aligned}
[Y_1, Y_2](g) \circ f &= Y_1(Y_2(g)) \circ f - Y_2(Y_1(g)) \circ f \\
&= X_1(Y_2(g) \circ f) - X_2(Y_1(g) \circ f) \\
&= X_1(X_2(g \circ f)) - X_2(X_1(g \circ f)) \\
&= [X_1, X_2](g \circ f)
\end{aligned}$$

□

Anwendung: Sei N eine Integral-Mannigfaltigkeit einer Distribution Δ und seien X, Y zwei Vektorfelder von Δ. Wie oben beschrieben existieren eindeutig bestimmte Vektorfelder $\bar{X}, \bar{Y} \in \chi(N)$ mit $X_p = di(\bar{X}_p), Y_p = di(\bar{Y}_p)$, d.h. $\bar{X} = X|_N, \bar{Y} = Y|_N$. Damit folgt $di([\bar{X}, \bar{Y}]_p) = [di(\bar{X}), di(\bar{Y})] = [X, Y]_p$, d.h.

$$[X|_N, Y|_N] = [X, Y]|_N \ .$$

Da $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ Vektorfelder auf N sind, gilt dies auch für ihren Kommutator $[\bar{X}, \bar{Y}]$. Nach Voraussetzung, da N eine Integral-Mannigfaltigkeit ist, folgt daraus $di([\bar{X}, \bar{Y}]) \in \Delta_p$. Also, wie oben gezeigt, auch $[X, Y]_p \in \Delta_p$. Damit ist gezeigt: existiert eine Integral-Mannigfaltigkeit für die Distribution Δ, dann liegt mit zwei Vektorfeldern X, Y in Δ auch deren Kommutator in Δ.

Definition 4.8 *Eine Distribution Δ heißt* integrabel *(oder auch involutiv), falls für je zwei Vektorfelder X, Y in Δ auch $[X, Y]$ ein Vektorfeld in Δ ist.*

Satz 4.9 *Seien $X_1, \ldots, X_k$ Vektorfelder definiert in einer Umgebung U von p mit $\Delta_q = \mathrm{span}\{X_1(q), \ldots, X_k(q)\}$ für alle $q \in U$. Dann ist Δ integrabel genau dann, wenn Funktionen $c_{ij}^r \in \mathcal{C}^\infty(U)$ existeren mit*

$$[X_i, X_j] = \sum_r c_{ij}^r X_r \ .$$

Beweis: Ist die Distribution integrabel, dann ist die obige Bedingung trivialerweise erfüllt. Sei nun die Bedingung erfüllt und X, Y zwei beliebige Vektorfelder in Δ, dann existieren lokal Funktionen a_i und b_i mit: $X = \sum a_i X_i$ und $Y = \sum b_i X_i$. Berechnet man nun den Kommutator, so folgt:

$$[X, Y] = \sum_{i,j} [a_i X_i, b_j X_j] = \sum_{ij} (a_i b_j [X_i, X_j] + a_i X_i(b_j) X_j - b_j X_j(a_i) X_i) \ .$$

Unter der Voraussetzung, dass sich der Kommutator $[X_i, X_j]$ für alle $1 \leq i, j \leq k$ als Linearkombination der Verktorfelder X_i schreiben läßt, folgt damit, dass dies auch für $[X, Y]$ gilt, d.h. der Kommutator $[X, Y]$ liegt wieder in der Distribution Δ. $\square$

Die Anwendung von Lemma 4.7 besagt also, dass aus der Existenz von Integralmannigaltigkeiten folgt, dass die Distribution integrabel ist. Der Satz von Frobenius besagt nun, dass auch die Umkehrung gilt.

4.3 Satz von Frobenius für Distributionen

Satz 4.10 *Sei Δ eine k-dimensionale integrable Distribution auf M. Für jeden Punkt $p \in M$ existieren Karten (U, x) mit*

$$x(p) = 0, \qquad x(U) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \ldots \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ ,$$

so dass für alle $a_{k+1}, \ldots, a_n$ mit $|a_i| < \varepsilon$ für $i = k+1, \ldots, n$ die Menge

$$N_a := \{q \in U \,|\, x_{k+1}(q) = a_{k+1}, \ldots, x_n(q) = a_n\}$$

eine Integral-Mannigfaltigkeit von Δ auf U ist und jede Integral-Mannigfaltigkeit auf U sich in dieser Form beschreiben läßt.

Beweis: Da es um eine lokale Aussage geht, kann man o.B.d.A. annehmen, dass $M = \mathbb{R}^n, p = 0$ und $\Delta_0 = \operatorname{span}\{ \frac{\partial}{\partial t_1}\Big|_0, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_k}\Big|_0 \} \subset T_0\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$. Sei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Projektion $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k)$. Dann ist nach Voraussetzung $d\pi : \Delta_0 \to T_0\mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus. Aus Stetigkeitsgründen ist dann auch $d\pi : \Delta_q \to T_q\mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus für alle q in einer Umgebung U der Null. Damit existieren eindeutig bestimmte Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k \in \chi(U)$ mit $X_1(q), \ldots, X_k(q) \in \Delta_q$ und

$$d\pi(X_i(q)) = \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{\pi(q)} \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k \ .$$

d.h. die Vektorfelder X_i und $\frac{\partial}{\partial t_i}$ für $i = 1, \ldots, k$ sind π-verknüpft auf der Umgebung U. Da $\frac{\partial}{\partial t_i}$ Koordinatenvektorfelder sind und mit Lemma 3.23 folgt

$$d\pi([X_i, X_j]_q) = [\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}] = 0 \ .$$

Da nun $d\pi$ ein Isomorphismus auf Δ_q ist (für alle $q \in U$) und da aufgrund der Integrabilitäat $[X_i, X_j]_q \in \Delta_q$ gilt folgt $[X_i, X_j] = 0$. Nach Satz 3.24 findet mal also ein Koordinatensystem (U, x) um Null mit

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k \ .$$

Man überzeugt sich nun, dass (U, x) das gesuchte Koordinatensystem ist. Sei dazu $\Phi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ die Abbildung $q \mapsto (x_{k+1}(q), \ldots, x_n(q))$. Als Teil einer Kartenabbildung ist Φ eine Submersion und jeder Punkt im Bild von Φ ist ein regulärer Wert. Nach dem

Satz vom regulären Wert ist also $N_a = \Phi^{-1}(a_{k+1}, \dots, a_n)$ eine Untermannigfaltigkeit mit

$$T_q N_a = \ker d\Phi_a = \operatorname{span}\{\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_k}\}_q = \operatorname{span}\{X_1(q), \dots, X_k(q)\} = \Delta_q \ ,$$

d.h. wie behauptet ist N_a eine Integral-Mannigfaltigkeit der Distribution Δ.

$\square$

Anwendung: Seien f^i_j für $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$, $k < n$ differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, so dass in jedem Punkt die Matrix (f^i_j) den Rang k hat. Man betrachtet folgendes System partieller Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}^n$

$$X_1(u) := \sum_i f^i_1 \tfrac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \dots \quad , X_k(u) := \sum_i f^i_k \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \tag{4.5}$$

Man sucht nun die maximale Lösungsmenge von (4.5), also Funktionen $u_1, \dots, u_{n-k}$ für die die Vektofelder $\operatorname{grad} u_1, \dots, \operatorname{grad} u_{n-k}$ punktweise linear unabhängig sind.

Aus dem Satz von Frobenius für Distributionen folgt, dass das System (4.5) genau dann eine Lösung hat, wenn Funktionen c^r_{ij} existieren mit

$$X_i(X_j(u)) - X_j(X_i(u)) = \sum_r c^r_{ij} X_r(u) \qquad \text{für alle} \quad 1 \le i, j \le k \ . \tag{4.6}$$

Gleichung (4.6) bedeutet genau, dass die von $X_1, \dots, X_k$ aufgespannte Distribution Δ integrabel ist. Nach dem Satz von Frobenius folgt die Existenz von Integral-Mannigfaltigkeiten und von speziellen Karten (U, x). In diesen Karten definiert man $u_i(q) := x_{k+i}(q)$ für $i = 1, \dots, n-k$ und erhält:

$$(X_i)_q(u_j) = \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} u_j(c_q(t)) = 0 \ ,$$

dabei ist c_q eine Kurve in der Integral-Mannigfaltigkeit durch q, d.h. die Funktion u_j ist konstant auf c_q.

Definiert man $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ durch $u(q) = (u_1(q), \dots, u_{n-k}(q))$ dann sind nach Voraussetzung die Vektorfelder $\operatorname{grad} u_1, \dots, \operatorname{grad} u_{n-k}$ linear unabhängig, d.h. u ist eine Submersion und $u^{-1}(a_{k+1}, \dots, a_n)$ eine Untermannigfaltigkeit mit

$$T_p u^{-1}(a_{k+1}, \dots, a_n) = \ker du = \operatorname{span}\{X_1, \dots, X_k\}$$

Somit sind die Niveauflächen der Lösungen genau die Integral-Mannigfaltigkeiten der Distribution. Die Lösungen der Gleichung 4.5 sind also Funktionen auf den Niveauflächen. Verschiedene Lösungen entsprechen verschiedenen Integral-Mannigfaltigkeiten. Dies enspricht dem Fixieren verschiedener Integrationskonstanten.

4.4 Blätterungen

Definition 4.11 *Eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit N einer Mannigfaltigkeit M heißt* Blätterung *von M, falls jeder Punkt von M in einer Zusammenhangskomponente von N liegt und es um jeden Punkt $p \in M$ Karten (U, x) gibt mit:*

1. $x(U) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \ldots \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

2. *Die Zusammenhangskomponenten von $N \cap U$ sind alles Mengen der Form*

$$\{q \in U \mid x_{k+1}(q) = a_{k+1}, \ldots, x_n(q) = a_n\}$$

   für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$ mit $|a_i| < \varepsilon$.

Im Allgemeinen ist die Blätterungs-Mannigfaltigkeit N nicht zusammenhängend. Die Zusammenhangskomponenten von N nennt man auch Blätter *der Blätterung. Man sagt M ist geblättert durch N.*

Bemerkung: Unterschiedliche Komponenten von $N \cap U$ können zum gleichen Blatt einer Blätterung gehören.

Satz 4.12 *Sei Δ eine k-dimensionale integrable Blätterung auf M. Dann ist M geblättert durch eine Integral-Mannigfaltigkeit von Δ. Jede Zusammenhangskomponente nennt man maximale Integralmannigfaltigkeit von Δ.*

Beweis: siehe Spivak □

Bemerkung: Aus diesem Satz folgt also, dass durch jeden Punkt $p \in M$ eine eindeutig bestimmte maximale Integral-Mannigfaltigkeit geht. Diese sei mit $N(p)$ bezeichnet und es gilt

$$N(p) = \{q \in M \mid \exists c : [0,1] \to M \text{ glatt}, c(0) = p, c(1) = q, \dot{c}(t) \in \Delta_{c(t)}\} .$$

Aus dieser Beschreibung folgt auch, dass eine Abildung $f : M \to M$ mit der Eigenschaft $df(\Delta_p) = \Delta_{f(p)}$ für alle $p \in M$, die maximalen Integral-Mannigfaltigkeiten permutiert, d.h. es gilt $f(N(p)) = N(f(p))$.

Satz 4.13 *Sei $N \subset M$ ein Blatt einer Blätterung auf M und sei $f : B \to M$ eine glatte Abbildung mit $f(B) \subset N$. Dann ist auch die Abbildung $f : B \to N$ glatt.*

Beweis: siehe Spivak □

5 Lie-Gruppen

Definition 5.1 *Ein Gruppe G heißt* Lie-Gruppe*, falls G eine Mannigfaltigkeit ist und die Abbildung $G \times G \to G, (g,h) \mapsto gh^{-1}$ differenzierbar ist.*

Bemerkung: Die zweite Bedingung ist dazu äquivalent, dass die Abbildung $g \mapsto g^{-1}$ und die Gruppenoperationen $(g,h) \mapsto gh$ differenzierbar sind.

Beispiele: Die klassischen Matrizengruppen sind Lie-Gruppen, z.B. $GL(n,\mathbb{R}), O(n)$ oder $U(n)$. Auch $\mathbb{R}^n$ mit der Vektoraddition ist eine Lie-Gruppe.

Definition 5.2 *Die* Links- *bzw.* Rechtstranslation *auf G sind für jedes fixiertes $g \in G$ definiert durch:*

$$l_g(h) = g \cdot h, \qquad r_g(h) = h \cdot g \ .$$

Bemerkung: Die Abbildungen $l_g, r_g : G \to G$ sind Diffeomorphismen. Tatsächlich gilt $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$ und analog für r_g.

Definition 5.3 *Ein Vektorfeld $X \in \chi(G)$ heißt* links-invariant*, falls für alle $g \in G$:*

$$l_{g*}X = X \ ,$$

d.h. X ist l_g-verknüpft zu sich selbst.

Bemerkung:

1. Ein Vektorfeld X ist links-invariant genau dann, wenn $dl_g(X_h) = X_{gh}$ für alle $g, h \in G$. Denn nach der Definition des push-forwards folgt

$$(l_{g*}X)_h = (dl_g)_{l_g^{-1}(h)} X_{l_g^{-1}(h)} = (dl_g)_{g^{-1}h} X_{g^{-1}h} \ .$$

2. Links-invariante Vektorfelder sind bestimmt durch den Wert in einem Punkt:

$$X_g = dl_g\left(X_e\right) \ .$$

   dabei ist e das Einselement der Gruppe G. Die Abbildung $X \in T_eG \mapsto \tilde{X} \in \chi(G)$ mit $\tilde{X}_g = dl_g(X)$ definierte eine Bijektion zwischen T_eG und dem Raum der links-invarianten Vektorfelder. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $\tilde{X} \mapsto \tilde{X}_e$.

3. Links-invariante Vektorfelder sind automatisch differenzierbar.

4. Lie-Gruppen G sind parallelisierbar, d.h. es existiert die maximal mögliche Anzahl von $\dim G$ punktweise linear unabhängigen Vektorfeldern: Man setzt eine Basis in T_eG fort zu links-invarianten Vektorfeldern auf G. Insbesondere sind Lie-Gruppen orientierbar.

5. Analog zu links-invarianten kann man auch rechts-invariante Vektorfelder definieren.

6. Sind G, H Lie-Gruppen, so auch $G \times H$.

Es war schon gezeigt worden, dass der Raum $\chi(M)$ der Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M eine Lie-Algebra ist. Neben dieser unendlich-dimensionalen Lie-Algebra gibt es auch endlich-dimensionale Beispiele, z.B. End (V) mit $[A, B] := A \circ B - B \circ A$ oder $\mathbb{R}^3$ mit $[v, w] := v \times w$, wobei $\times$ das Vektorkreuzprodukt bezeichnet. Es soll nun gezeigt werden, dass zu jeder Lie-Gruppe eine eindeutig bestimmte Lie-Algebra gehört. Die letzten beiden Beispiele sind Spezialfälle davon.

Satz 5.4 *Sei G eine Lie-Gruppe und bezeichne $\mathfrak{g}$ die Menge aller links-invarianten Vektorfelder auf G. Dann gilt:*

1. *Die Menge $\mathfrak{g}$ ist eine reeller Vektorraum, der isomorph zu T_eG ist. Insbesondere gilt* $\dim G = \dim \mathfrak{g}$.

2. *Der Kommutator zweier links-invarianter Vektorfelder ist links-invariant, d.h. $\mathfrak{g}$ ist eine Lie-Algebra. Für $X, Y \in T_eG$ gilt:*

$$[X, Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e = \widetilde{[X, Y]}_e \ .$$

Beweis: Die erste Aussage, also die Isomorphie zwischen dem Raum der links-invarianten Vektorfelder und T_eG wurde schon gezeigt. Zum Beweis der zweiten Aussage bemerkt man zuerst, dass sich jedes links-invariante Vektorfeld als $\tilde{X}$ für ein $X \in T_eG$ schreiben läßt. Wie schon bemerkt sind links-invariante Vektorfelder l_g-verknüpft zu sich selbst. Damit sind auch die entsprechenden Kommutatoren l_g-verknüpft und es folgt

$$dl_g([\tilde{X}, \tilde{Y}]_e) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_g = \widetilde{[X, Y]}_g \ .$$

Der Kommutator von $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ ist also wieder links-invariant und es gilt die behauptete Gleichung, denn nach Definition ist $dl_g(Z) = \tilde{Z}_g$ für ein $Z \in \mathfrak{g}$.

□

Definition 5.5 *Die* Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ *einer Lie-Gruppe G ist definiert als der Raum der links-invarianten Vektorfelder bzw. der Tangentialraum an G in e, mit dem Kommutator von Vektorfeldern als Lie-Klammer. Man schreibt auch* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.

Beispiel: Sei $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dann ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$. Die Lie-Klammer auf $\mathfrak{g}$ stimmt mit dem üblichen Kommutator von Matrizen überein: $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$.

5.1 Die Lie-Algebra - Lie-Gruppe Korrespondenz

Sei $H \subset G$ eine Lie-Untergruppe, d.h. eine Untergruppe von G, die auch eine Untermannigfaltigkeit von G ist. Sei $i : H \to G$ die Inklusionsabbildung. Dann identifiziert man T_eH mit dem Unterraum $di(T_eH)$ von T_eG. Jeder Vektor $X \in T_eH$ definiert ein links-invariantes Vektorfeld X_G auf G und ebenso ein links-invariantes Vektorfeld X_H auf H. Diese beiden Vektorfelder sind i-verknüpft und da $i \circ l_a^H = l_a^G \circ i$ folgt:

$$diX_H(a) = di \circ dl_a^H(X) = dl_a^G \circ di(X) = X_G(a) \ .$$

Sind nun $X, Y \in T_eH$, dann sind auch die Kommutatoren i-verknüpft, d.h. es gilt

$$[X_G, Y_G]_e = di[X_H, Y_H]_e \ .$$

Damit ist $T_eH \subset T_eG$ eine Lie-Unteralgebra, d.h. ein Untervektorraum, der abgeschlossen unter der Lie-Klammer ist. Außerdem ist T_eH mit der induzierten Lie-Klammer von G genau die Lie-Algebra von H. Insbesondere ist die Lie-Klammer auf der Lie-Algebra einer beliebigen Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ immer die Einschränkung des üblichen Kommutators von Matrizen.

Zu jeder Untergruppe $H \subset G$ gehört also eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Es zeigt sich nun, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz 5.6 *Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Dann existiert eine eindeutig bestimmte zusammenhängende Lie-Untergruppe $H \subset G$ mit Lie-Algebra* $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$. *D.h. man hat eine bijektive Beziehung zwischen zusammenhängenden Lie-Untergruppen von G und Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{g}$.*

Beweis: Man definiert durch $\Delta_a = \{\tilde{X}_a = dl_a(X) \,|\, X \in \mathfrak{h}\} \subset T_aG$ eine Distribution auf G. Die Schnitte in Δ sind also genau die links-invarianten Vektorfelder $\tilde{X}$ zu Vektoren $X \in \mathfrak{h}$. Nach Satz 5.4 gilt aber $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$. Da $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra ist, muß mit $X, Y \in \mathfrak{h}$ auch der Kommutator $[X, Y]$ in $\mathfrak{h}$ liegen und damit ist $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ wieder ein Schnitt in Δ. Die Distribution Δ ist also integrabel. Man definiert H als die eindeutig bestimmte maximale Integral-Mannigfaltigkeit von Δ durch e, die nach dem Satz von Frobenius bzw. Satz 4.12 existiert. Es bleibt nun zu zeigen, dass $H \subset G$ eine Untergruppe ist und dass die Gruppenoperationen glatt sind.

Sei $b \in G$ dann folgt $dl_b(\Delta_a) = \Delta_{ba}$ aus der Definition von Δ. Daher permutiert die Links-Translation l_b die verschiedenen maximalen Integral-Mannigfaltigkeiten von Δ. Ist zum Beispiel c eine Kurve durch a in der Integral-Mannigfaltigkeit durch a. Dann ist $\dot{c}(t) \in \Delta_{c(t)}$ und $l_b(c)$ ist eine Kurve durch ba mit Tangentialvektoren $dl_b(\dot{c}(t)) \in dl_b(\Delta_{c(t)}) = \Delta_{bc(t)}$. Damit muß die Kurve $bc(t)$ aber in der Integral-Mannigfaltigkeit durch ba liegen.

Sei $b \in H$ dann ist $l_{b^{-1}}(H)$ die maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch $l_{b^{-1}}(b) = e$, also $l_{b^{-1}}(H) = H$. Daraus folgt $b^{-1} \in H$, aber auch $a \cdot b \in H$, für $a, b \in H$. Somit ist $H \subset G$ eine Untergruppe.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ eine glatte Abbildung von $H \times H$ nach H ist. Das ergibt sich daraus, dass sie glatt als Abbildung nach G ist und dass H definiert ist als Blatt einer Blätterung auf G (siehe Spivak). $\square$

Bemerkung:

1. Nach dem Theorem von Ado ist jede Lie-Algebra isomorph zu einer Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Nach dem gerade gezeigtem ist also jede Lie-Algebra isomorph zur Lie-Algebra einer Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Für Lie-Algebren mit trivialem Zentrum folgt die Aussage trivialerweise aus der Existenz der adjungierten Darstellung (siehe unten).

2. Nach dem *Cartan-Kriterium* ist eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ automatisch eine Lie-Untergruppe von G, ist also eine Unter-Mannigfaltigkeit von G.

5.2 Homomorphismen

Lemma 5.7 *Sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen, dann ist $d\varphi$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus, d.h. es gilt*

$$d\varphi([X,Y]) = [d\varphi(X), d\varphi(Y)]$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g} = T_eG$.

Beweis: Nach Definition der Lie-Klammer auf den Lie-Algebren von G bzw. H hat man für beliebige $X, Y \in \mathfrak{g} = T_eG$ die folgende Gleichung zu zeigen

$$d\varphi([\tilde{X}, \tilde{Y}]_e) = [\widetilde{d\varphi(X)}, \widetilde{d\varphi(Y)}]_e \ ,$$

dabei bezeichnet $\tilde{X}$ das links-invariante Vektorfeld zum Vektor $X \in T_eG$, d.h. das Vektorfeld $\tilde{X}$ ist definiert durch $\tilde{X}_g = dl_g(X)$. Da φ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt $\varphi \circ l_g = l_{\varphi(g)} \circ \varphi$. Nach Übergang zum Differential folgt daraus

$$d\varphi \circ dl_g = dl_{\varphi(g)} \circ d\varphi \ .$$

Diese Gleichung wendet man auf $X \in T_eG$ an und erhält

$$d\varphi(\tilde{X}_g) = \widetilde{d\varphi(X)}_{\varphi(g)} \ ,$$

d.h. die links-invarianten Vektorfelder $\tilde{X}$ und $\widetilde{d\varphi(X)}$ sind φ-verknüpft. Seien X, Y beliebige Vektoren in T_eG dann sind auch die entsprechenden Kommutatoren φ-verknüpft und es folgt

$$d\varphi([\tilde{X}, \tilde{Y}]_e) = [\widetilde{d\varphi(X)}, \widetilde{d\varphi(Y)}]_e \ ,$$

Das war aber genau die Gleichung, die zu zeigen war und somit ist $d\varphi$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. □

Beispiel: Sei $G = H = \mathbb{R}$ dann existieren überabzählbar viele Homomorphismen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da $\mathbb{R}$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist und jede $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist ein Homomorphismus. Sei φ ein differenzierbarer Homomorphismus (tatsächlich ist stetig ausreichend) dann folgt $\varphi(t) = ct$ für ein geeignetes c. Denn leitet man $\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t)$ nach s in $s = 0$ ab, dann folgt $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(0)$, also $\varphi(t) = ct$ mit $c = \dot{\varphi}(0)$.

Homomorphismen $\phi : \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sind alle von der Form $\phi(t) = e^{ict}$.

Bemerkung: Es existiert kein nicht-trivialer Lie-Gruppen-Homomorphismus $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$. Denn $\varphi(S^1)$ wäre eine kompakte Untergruppe in $\mathbb{R}$, was nicht möglich ist: Sei $G \subset \mathbb{R}$

eine kompakte Untergruppe, dann ist G beschränkt, aber mit jedem $g \in G$ liegt auch $ng \in G$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was aber der Beschränktheit widerspricht.

Man sieht also, dass es Lie-Algebren-Homomorphismen $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ gibt, die sich nicht als Differential eines Lie-Gruppen-Homomorphismus $G \to H$ ergeben. Mit dem folgenden Satz hat man aber wenigstens ein lokales Resultat.

Satz 5.8 *Seien G, H Lie-Gruppen und sei $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein fixierter Lie-Algebren-Homomorphismus. Dann existiert eine Umgebung U von $e \in G$ und eine glatte Abbildung $\varphi : U \to H$ mit*

1. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \qquad$ *falls* $\quad a, b, a \cdot b \in U$
2. $d\varphi(X) = \Phi(X) \qquad$ *für alle* $\quad X \in \mathfrak{g} = T_e G$
3. *Sind $\varphi, \psi : G \to H$ zwei Lie-Gruppen-Homomorphismen mit $d\varphi = d\psi = \Phi$ und ist G zusammenhängend, dann folgt $\varphi = \psi$.*

Beweis: (nach Spivak) Die Idee des Beweises ist, dass man eine Abbildung durch ihren Graphen beschreiben kann. Dieser ist für Homomorphismen eine Untergruppe bzw. Unteralgebra.

Man definiert $\mathfrak{k} := \{(X, \Phi(X)) \,|\, X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(G \times H)$, d.h. $\mathfrak{k}$ ist der Graph von Φ und die Voraussetzung, dass Φ ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist, ist äquivalent dazu, dass $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ eine Unteralgebra ist:

$$[(X_1, \Phi(X_1)), (X_2, \Phi(X_2))] = ([X_1, X_2], [\Phi(X_1), \Phi(X_2)]) = ([X_1, X_2], \Phi([X_1, X_2])) \in \mathfrak{k} \; .$$

Nach Satz 5.6 existiert eine eindeutig bestimmte Lie-Untergruppe $K \subset G \times H$ mit $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$.

Sei $\pi_1 : G \times H \to G$ die Projektion auf den 1. Faktor. Dann ist $\omega := \pi_1|_K : K \to G$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus und

$$d\omega(X, \Phi(X)) = X \; .$$

Damit ist $d\omega : T_{e,e}K \to T_e G$ ein Isomorphismus. Es folgt, dass eine Umgebung V von (e, e) existiert, auf der ω ein Diffeomorphismus ist. Sei $U := \omega(V)$, dann ist U eine Umgebung von $e \in G$.

Sei $\pi_2 : G \times H \to H$ die Projektion auf den 2. Faktor. Dann definiert man auf U:

$$\varphi := \pi_2 \circ \omega^{-1} \; .$$

Die Bedingung 1 ist erfüllt, da π_2 und ω^{-1} Gruppen-Homomorphismen sind. Auch die Bedingung 2 ist erfüllt, da

$$d\varphi(X) = \pi_2(X, \Phi(X)) = \Phi(X) \; .$$

Bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien also $\varphi, \psi : G \to H$ zwei Homomorphismen mit $d\varphi = d\psi = \Phi$. Man definiert den injektiven Gruppen-Homomorphismus

$$\theta : G \to G \times H, \quad a \mapsto (a, \psi(a)) \ .$$

Sei $\hat{G} = \theta(G) \subset G \times H$ das Bild von θ, also der Graph von ψ. Dann ist $\hat{G}$ eine zusammenhängende Lie-Untergruppe von $G \times H$ mit Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(\hat{G}) = \mathfrak{k}$. Es gilt nämlich $d\theta(X) = (X, \Phi(X))$. Aus Satz 5.6 folgt nun $\hat{G} = K$. Die Untergruppe K ist eindeutig durch Φ bestimmt. Somit stimmen die Graphen von φ und ψ überein, d.h. $\varphi = \psi$. $\square$

Bemerkung: Der Gruppen-Homomorphismus aus Satz 5.7 ist auf ganz G definiert, falls G einfach-zusammenhängend ist. Unter dieser Voraussetzung hat man also ein bijektive Beziehung zwischen Lie-Gruppen-Homomorphismen $G \to H$ und Lie-Algebren-Homomorphismen $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

Folgerung 5.9 *Zwei Lie-Gruppen mit isomorphen Lie-Algebren sind lokal isomorph. Die Isomorphie ist global, falls beide Gruppen einfach-zusammenhängend sind.*

Folgerung 5.10 *Eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit abelscher Lie-Algebra ist abelsch. Dabei heißt eine Lie-Algebra abelsch, falls alle Lie-Klammern Null sind.*

Beweis: Eine abelsche Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$. Nach Folgerung 5.9 ist G dann lokal isomorph zu $\mathbb{R}^n$. Es gilt also $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b in einer hinreichend kleinen Umgebung von $e \in G$. Jede solcher Umgebungen erzeugt aber die ganze Gruppe, d.h. jedes Gruppenelement läßt sich als Produkt von Elementen aus dieser Umgebung schreiben. Damit ist die ganze Gruppe G abelsch. $\square$

Bemerkung:

1. Alle zusammenhängenden Lie-Gruppen mit der gleichen Lie-Algebra werden von der gleichen einfach-zusammenhängenden Lie-Gruppe überlagert.

2. Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G ist gleich der Lie-Algebra der Zusammenhangskomponente der Eins in G. Zum Beispiel ist $\mathrm{Lie}(O(n)) = \mathrm{Lie}(SO(n))$.

5.3 Die Exponential-Abbildung

Satz 5.11 *Links-invariante Vektorfelder sind vollständig, d.h. für ein links-invariantes Vektorfeld X auf einer Lie-Gruppe G ist der Fluß φ_t für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert. Weiter gilt $\varphi_t(g) = g \cdot \varphi_t(e)$ für alle $g \in G$ und $t \in \mathbb{R}$, d.h. die Kurve $a(t) := g \cdot \exp(tX)$ ist die maximale Integralkurve von X durch g.*

Beweis: Sei X ein links-invariantes Vektorfeld auf G, dann gilt $X = l_{g*}X$ und das bedeutet für die Flüsse $\varphi_t = l_g \circ \varphi_t \circ l_g^{-1}$. Angewandt auf ein beliebiges Gruppenelement g folgt die Gleichung $\varphi_t(g) = g \cdot \varphi_t(e)$. Damit genügt es zu zeigen, dass die Integralkurve von X durch e für alle Zeiten definiert ist.

Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $\varphi_t(e)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Es gilt

$$\varphi_{s+t}(e) \;=\; \varphi_s(\varphi_t(e)) \;=\; \varphi_t(e) \cdot \varphi_s(e) \tag{5.7}$$

für alle s, t klein genug. Man schreibt $s = k\frac{\varepsilon}{2} + t$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$ und definiert zum Beispiel im Fall $k > 0$:

$$c(s) \;:=\; (\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})^k \cdot \varphi(e)$$

Die Behauptung ist nun, dass c die Integralkurve von X durch e ist. Das ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=k\frac{\varepsilon}{2}+t_0} c(s) \;&=\; \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} c(k\tfrac{\varepsilon}{2} + t) \;=\; \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(e))^k \cdot \varphi_t(e) \\ &= dl_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(e))^k}(X_{\varphi_{t_0}(e)}) \;=\; X_{c(s)} \end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 5.12 *Sei $c_X : \mathbb{R} \to G$ die Integralkurve durch e eines links-invarianten Vektorfeldes X. Dann ist c_X ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, d.h.*

$$c_X(0) = e \qquad \textit{und} \qquad c_X(s+t) = c_X(s) \cdot c_X(t)$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt

$$c_{sX}(t) \;=\; c_X(st)\;.$$

Beweis: Es ist $c_X(t) = \varphi_t(e)$ und damit folgt die Homomorphismuseigenschaft von C_X aus Gleichung (5.7).

Es bleibt noch zu zeigen, dass $t \mapsto c(t) := c_X(st)$ die Integralkurve des links-invarianten Vektorfeldes sX ist. Dazu berechnet man:

$$\tfrac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} c(t) \;=\; \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} c_X(st) \;=\; s\,\dot{c}_X(st_0) \;=\; s\,X_{c_X(st_0)} \;=\; sX_{c(t_0)}\;.$$

$\square$

Definition 5.13 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Abbildung*

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \quad \exp(X) := c_X(1) \ ,$$

heißt Exponentialabbildung *der Lie-Gruppe G. Hierbei ist c_X wieder die maximale Integralkurve von X mit $c_X(0) = e$.*

Bemerkung:

1. Es gilt für alle t die Gleichung $\exp(tX) = c_{tX}(1) = c_X(t) = \varphi_t(e)$.

2. Homomorphismen $\mathbb{R} \to G$ nennt man auch *1-parametrige Untergruppen*.

3. Die Abbildung $\mathbb{R} \to G, t \mapsto \exp tX$ ist der eindeutig bestimmte glatte Gruppenhomomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \to G$ mit $\dot{\gamma}(0) = X$.

   Beweis: Der Homomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \to G$ definiert eine glatte Kurve in G mit $\gamma(0) = e$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Zu zeigen ist, dass γ die Integralkurve des linksinvarianten Vektorfelds $\tilde{X}$ ist. Auf Grund der Eindeutigkeit der Integralkurven folgt dann $\gamma(t) = \exp tX$. Man berechnet den Tangentialvektor an γ zu einer beliebigen Zeit s:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=s} \gamma(t) \ &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(s+t) \ = \ \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} l_{\gamma(s)}\, \gamma(t) \\ &= dl_{\gamma(s)}\, \dot{\gamma}(0) \ = \ dl_{\gamma(s)}\, X \ = \ \tilde{X}_{\gamma(s)} \ . \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel: *Die Exponential-Abbildung für $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.*
Man definiert für eine beliebige Matrix $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$:

$$\exp tA = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \ .$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Auf Grund der Beziehung

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$$

liegt das Bild der Abbildung $A \mapsto e^A$ wirklich in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ in der Menge der invertierbaren Matrizen und die Abbildung ist somit wohl-definiert. Dabei nutzt man, dass für die Endomorphismen-Norm auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Abschätzung $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ gilt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $A \mapsto e^A$ die Exponential-Abbildung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ beschreibt. Dafür sei $c(t) = e^{tA}$. Zu zeigen ist, dass c die Integralkurve durch e des links-invarianten Vektorfeldes $\tilde{A}$ ist. Man berechnet

$$\tfrac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} c(t) \ = \ A\, e^{t_0 A} \ = \ e^{t_0 A} A \ = \ l_{c(t_0)}\, A \ = \ dl_{c(t_0)}\, A \ = \ \tilde{A}_{c(t_0)} \ ,$$

wobei die für Matrixgruppen richtige Beziehung $dl_g X = g \cdot X$ benutzt wurde.

Für die Exponential-Abbildung für $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ kann man folgende Eigenschaften unmittelbar aus der Reihen-Definition ableiten:

1. Für alle $A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ gilt $A\,B = B\,A$, so auch $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

2. Für alle $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ gilt: $B\,e^A\,B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$

Aus der ersten Eigenschaft folgt auch noch mal, dass $t \mapsto e^{tA}$ ein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ist und damit wirklich die Exponential-Abbildung von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ beschreibt. Im folgenden Abschnitt werden beide Aussagen auf beliebige Lie-Gruppen verallgemeinert.

Satz 5.14 *Die Exponential-Abbildung* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *ist beliebig oft differenzierbar und ein lokaler Diffeomorphismus um* $0 \in \mathfrak{g}$. *Weiter gilt:*

1. $\exp(0) = e$

2. $\exp((t+s)X) = \exp(sX)\exp(tX)$

3. $\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$ *für alle* $X \in \mathfrak{g}$

Beweis: Die Glattheit der Abbildung $X \mapsto \exp(X)$ folgt aus den Standardsätzen über die glatte Abhängigkeit der Lösungen linearer DGLs von den Anfangswerten.

Die Aussagen 1. und 2. folgen direkt aus der Homomorphismus-Eigenschaft der Exponential-Abbildung. Zusammen ergeben sie Aussage 3., wenn man in 2. s durch $-t$ ersetzt.

Noch zu zeigen bleibt, dass die Exponential-Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathfrak{g}$ ist. Dazu zeigt man $d\exp_0 = \mathrm{Id}_{T_eG}$. Sei $X \in \mathfrak{g}$ ein links-invariantes Vektorfeld, dann folgt

$$d\exp_0(X) = \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(tX) = X\ .$$

□

Bemerkung: Mit Hilfe der Exponential-Abbildung lassen sich spezielle Koordinaten definieren. Sei $V(0) \subset \mathfrak{g}$ eine bzgl. 0 sternförmige Umgebung, auf der exp ein Diffeomorphismus ist. Dann definiert man

$$W(e) := \exp(V(0)), \quad W(g) := l_g(W(e)), \quad x_g := \exp^{-1}\circ l_{g^{-1}} : W(g) \to V(0) \subset \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$$

Offensichtlich ist dann $(W(g), x_g)$ eine Karte um g. Man nennt $W(g)$ eine *Normaleumgebung* von g und x_g die *Normalkoordinaten* um g.

Bemerkung: Im Allgemeinen ist die Exponential-Abbildung nicht surjektiv.

Sei $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ die Menge der Matrizen mit Determinante Eins. Die Lie-Algebra ist die Menge der spurfreien 2×2-Matrizen. Für diese Gruppe ist die Exponential-Abbildung nicht surjektiv. Zum Beispiel liegt $B = \mathrm{diag}\,(-\frac{1}{2}, -2)$ nicht im Bild der Exponential-Abbildung. Denn wäre $B = \exp X$, so würde folgen

$$B = \exp X = \exp(\tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}X) = \exp\tfrac{1}{2}X \cdot \exp\tfrac{1}{2}X = (\exp\tfrac{1}{2}X)^2\ .$$

Es existiert aber keine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ mit $B = A^2$: aus dem Satz von Cayley-Hamilton

$$A^2 - \mathrm{tr}A \cdot A + E = 0\ .$$

Nimmt man die Spur von dieser Gleichung erhält man $\mathrm{tr}A^2 \geq -2$. Die Spur von B ist aber kleiner als -2.

Später wird gezeigt, dass die Exponential-Abbildung auf kompakten zusammenhängenden Lie-Gruppen surjektiv ist.

Satz 5.15 *Sei $\varphi : G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann gilt*

$$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X))$$

für alle $X \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, d.h. man hat das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Beweis: Sei $c(t) = \varphi(\exp tX)$. Dann ist $c(0) = \varphi(e_G) = e_H$ und

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= d\varphi(X_{\exp tX}) = d\varphi \circ dl_{\exp tX}(X_{e_G}) \\ &= dl_{\varphi(\exp tX)} \circ d\varphi(X_{e_G}) \\ &= \widetilde{d\varphi(X_{e_G})}_{c(t)} \ , \end{aligned}$$

d.h. $c(t)$ ist eine Integralkurve von $\widetilde{d\varphi(X_{e_G})}$ durch e_H und somit folgt

$$c(1) = \varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X)) \ .$$

□

Folgerung 5.16 *Jeder injektive glatte Homomorphismus $\varphi : G \to H$ ist eine Immersion und $\varphi(G) \subset H$ ist damit eine Lie-Untergruppe von G.*

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g} = T_eG$ und sei $\tilde{X}$ das dazugehörige Vektorfeld, d.h. $\tilde{X}_g = dl_g(X)$. Ist nun für ein g das Differential von φ nicht injektiv, also z.B. $d\varphi(\tilde{X}_g) = 0$, dann folgt

$$0 = d\varphi \circ dl_g(X) = dl_{\varphi(g)}\, d\varphi(X)$$

und da dl_g ein Isomorphismus ist erhält man $d\varphi(X) = 0$. Wendet man darauf die Exponential-Abbildung an, so ergibt sich

$$e = \exp d\varphi(tX) = \varphi(\exp tX) \ ,$$

was aber im Widerspruch steht zur Annahme, dass φ injektiv ist. Damit muss also $d\varphi$ auch injektiv sein, d.h. φ ist eine Immersion. □

Lemma 5.17 *Sei $i : H \to G$ eine Lie-Untergruppe und sei $X \in \mathfrak{g}$. Dann gilt*

1. *$X \in di(\mathfrak{h})$ dann folgt $\exp tX \in i(H) \subset G$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

2. *Gilt $\exp tX \in i(H)$ für alle t in einem Intervall I, dann folgt $X \in di(\mathfrak{h})$.*

Beweis: Sei zunächst $X \in di(\mathfrak{h})$, es existiere also ein $X_0 \in \mathfrak{h}$ mit $X = di(X_0)$. Dann folgt $\exp tX = \exp di(tX_0) = i(\exp tX_0)$ und somit $\exp tX \in i(H)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Für den Beweis der umgekehrten Richtung betrachtet man die glatte Abbildung $I \subset \mathbb{R} \to G, t \mapsto \exp tX$. Nach Voraussetzung liegt das Bild dieser Abbildung in $i(H)$. Daher existiert eine glatte Abbildung $\alpha : I \to H$ mit $\exp tX = i(\alpha(t))$. (Diese Aussage bleibt noch zu zeigen.) Sei nun $\tilde{X}$ das links-invariante Vektorfeld auf H zu $\dot{\alpha}(0)$. Dann gilt $di(\tilde{X}) = X$ und somit $X \in di(\mathfrak{h})$. $\square$

Satz 5.18 *Sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Dann ist $\ker \varphi$ eine abgeschlossene Untergruppe von G und es gilt:*

$$\mathrm{Lie}(\ker \varphi) = \ker(d\varphi) \ .$$

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g}$ dann ist, nach dem vorherigem Lemma, $X \in \mathrm{Lie}(\ker \varphi)$ genau dann, wenn $\exp tX \in \ker \varphi$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. $\varphi(\exp tX) = e$ bzw. $\exp d\varphi(tX) = e$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da exp aber in einer Umgebung der Null ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist das nur möglich, wenn $d\varphi(X) = 0$, also $X \in \ker(d\varphi)$, was zu zeigen war. $\square$

Der verbleibende Teil dieses Abschnittes enthält noch weitere Anwendungen der Exponential-Abbildung auf die Struktur topologischer Gruppen. Details finden sich in Spivak.

Folgerung 5.19 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und sei $\varphi : \mathbb{R} \to G$ ein stetiger Gruppen-Homomorphismus. Dann existiert ein $X \in \mathfrak{g}$ mit $\varphi(t) = \exp(tX)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist jeder stetige Gruppen-Homomorphismus $\mathbb{R} \to G$ schon glatt.*

Beweis: Sei $W = \exp V(0)$ eine Normalenumgebung um $e \in G$. Da $\varphi : \mathbb{R} \to G$ stetig ist, mit $\varphi(0) = e$, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(t) \in W$ für alle t mit $|t| \leq 2\varepsilon$. Sei nun $Y \in V(0)$ der Vektor mit $\exp(Y) = \varphi(\varepsilon)$. Man definiert $X := \frac{1}{\varepsilon}Y$. Man möchte nun zeigen

$$\varphi(t) = \exp(tX) =: f(t) \qquad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

Sei $K \subset \mathbb{R}$ definiert durch $K := \{t \in \mathbb{R} \,|\, f(t) = \varphi(t)\}$. Nach Definition gilt $0, \varepsilon \in K$. Da f und φ stetige Gruppen-Homomorphismen sind, ist K eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$. Für nicht-triviale abgeschlossene Untergruppen $K \subset \mathbb{R}$ gibt es zwei Möglichkeiten: $K = \mathbb{R}$ oder $K = K_d = \{n \cdot d \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$, wobei d die kleinste positive Zahl in K ist. Es soll nun $K = \mathbb{R}$ gezeigt werden. Annahme es gilt $K = K_d$. Da $\varepsilon \in K$ und $\varepsilon > 0$ folgt $2\varepsilon > d$, d.h. $\frac{d}{2} < \varepsilon$. Da φ und f Homomorphismen sind erhält man

$$(f(\tfrac{d}{2}))^2 = \exp(\tfrac{d}{2}X)^2 = \exp(dX) = f(d) = \varphi(d) = (\varphi(\tfrac{d}{2}))^2 \ .$$

Wendet man auf diese Gleichung $\exp^{-1}$ an, so ergibt sich

$$2\exp^{-1} f(\tfrac{d}{2}) = \exp^{-1} f(\tfrac{d}{2})^2 = \exp^{-1} \varphi(\tfrac{d}{2})^2 = 2\exp^{-1} \varphi(\tfrac{d}{2})$$

und damit $f(\frac{d}{2}) = \varphi(\frac{d}{2})$. D.h. d war nicht das kleinste Element in K, im Widerspruch zur Annahme, also muss $K = \mathbb{R}$ gelten, was zu zeigen war. $\square$

Satz 5.20 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \to G, \quad v_1 + \ldots + v_r \mapsto \exp(v_1) \cdot \ldots \cdot \exp(v_r)$$

ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathfrak{g}$.

Beweis: Man zeigt wieder, dass $d\Phi_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$ gilt, womit Φ nach dem Umkehrsatz ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathfrak{g}$ ist. Für $i = 1, \ldots, r$ sei $X_i \in V_i$, dann gilt

$$d\Phi_0(X_i) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi(tX_i) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(0) \ldots \exp(tX_i) \ldots \exp(0) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(tX_i) = X_i\,.$$

$\square$

Folgerung 5.21 *Jeder stetige Homomorphismus $\psi : G \to H$ ist schon glatt.*

Beweis: Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Basis in T_eG. Für $i = 1, \ldots, n$ definiert man stetige Gruppen-Homomorphismen

$$\psi_i : \mathbb{R} \to H, \quad t \mapsto \psi(\exp tX_i)\,.$$

Nach Folgerung 5.19 existieren $Y_i \in T_eH$ mit $\psi(\exp tX_i) = \exp tY_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Es folgt

$$\psi(\exp t_1X_1 \cdot \ldots \cdot \exp t_nX_n) = \exp t_1Y_1 \cdot \ldots \cdot \exp t_nY_n\,. \tag{5.8}$$

Nach Satz 5.20 ist die Abbildung $\Phi : \mathfrak{g} \to G$ definiert durch

$$\Phi(t_1X_1 + \ldots + t_nX_n) = \exp t_1X_1 \cdot \ldots \cdot \exp t_nX_n$$

auf einer Umgebung U von $0 \in \mathfrak{g}$ ein Diffeomorphismus. Sei $V = \Phi(U)$ die entsprechende Umgebung von $e \in G$. Auf V schreibt man ψ als

$$\psi = (\psi \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}\,.$$

Mit Gleichung (5.8) schreibt sich $\psi \circ \Phi$ als

$$\psi \circ \Phi : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \exp t_1Y_1 \cdot \ldots \cdot \exp t_nY_n\,,$$

d.h. $\psi \circ \Phi$ ist glatt auf U und ψ ist damit glatt auf V. Der Homomorphismus ψ ist also glatt auf einer Normalenumgebung $W(e) \subset G$ von $e \in G$, doch damit ist ψ glatt auf ganz G. Denn auf $W(g) = l_g(W(e))$ schreibt man

$$\psi|_{W(g)} = l_{\psi(g)} \circ \psi|_{W(e)} \circ l_{g^{-1}}\,.$$

$\square$

Folgerung 5.22 *Eine lokal-euklidische topologische Gruppe mit abzählbarer Topologie besitzt höchstens eine differenzierbare Struktur bzgl. der sie eine Lie-Gruppe wird.*

Beweis: Man betrachtet die Identität, diese ist stetig und damit auch differenzierbar und würde dann einen Diffeomorphismus zwischen zwei fixierten differenzierbaren Strukturen definieren. □

Bemerkung: Das 5. der Hilbert-Probleme war die Frage, ob jede lokal-euklidische Gruppe eine Lie-Gruppe ist. Die positive Antwort wurde 1952 von Montgomery und Zippen erbracht

5.4 Die adjungierte Darstellung

Definition 5.23 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Eine* Darstellung von G *auf einem Vektorraum V ist ein Gruppen-Homomorphismus*

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}(V)$$

d.h. es gilt $\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$.

Eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ *auf V ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus*

$$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}\,(V)$$

d.h. es gilt $\varphi([X, Y]) = \varphi(X) \circ \varphi(Y) - \varphi(Y) \circ \varphi(X)$.

Eine Darstellung heißt treu, *falls ρ bzw. φ injektive Abbildungen sind.*

Bemerkungen:

1. Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G, dann ist $\varphi = d\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$.

2. Eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ heißt *orthogonal* bzw. *unitär*, falls $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum ist und

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle = \langle v, w\rangle$$

für alle $g \in G$ und $v, w \in V$, d.h. das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V ist G-invariant und damit $\rho(G) \subset \mathrm{O}(n)$ bzw. $\rho(G) \subset \mathrm{U}(n)$, falls $n = \dim V$.

3. Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe G. Dann existiert auf V ein G-invariantes Skalarprodukt. Man definiert

$$(v, w) := \int_G \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle \omega_g \ .$$

Dann ist $(\cdot,\cdot)$ ein G-invariantes Skalarprodukt, falls ω_g eine rechts-invariante Volumenform und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt ist.

Satz 5.24 *Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung einer Lie-Gruppe G und sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein G-invariantes Skalarprodukt auf V, dh.*

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle = \langle v, w\rangle \tag{5.9}$$

für alle $g \in G$ und $v, w \in V$. Dann gilt

$$\langle d\rho(X)v, w\rangle + \langle v, d\rho(X)w\rangle = 0 \tag{5.10}$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $v, w \in V$. Ist G zusammenhängend, dann sind (5.9) und (5.10) äquivalent.

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g}$ und $v, w \in V$, dann folgt aus Gleichung 5.9

$$\langle v, w \rangle = \langle \rho(\exp tX)v, \rho(\exp tX)w \rangle = \langle e^{td\rho(X)}v, e^{td\rho(X)}w \rangle \ .$$

Die Ableitung nach t in $t = 0$ liefert dann Gleichung 5.10.

Sei G zusammenhängend, dann wird G erzeugt von einer Normalenumgebung von e. Die Gleichung 5.9 folgt also aus

$$\langle \rho(\exp tX)v, \rho(\exp tX)w \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $v, w \in V$. Man definiert eine Funktion F durch

$$F(t) := \langle \rho(\exp tX)v, \rho(\exp tX)w \rangle = \langle e^{td\rho(X)}v, e^{td\rho(X)}w \rangle \ .$$

Die Ableitung von F nach t berechnet sich als

$$\dot{F}(t) = \langle d\rho(X)e^{td\rho(X)}v, e^{td\rho(X)}w \rangle + \langle e^{td\rho(X)}v, d\rho(X)e^{td\rho(X)}w \rangle \ .$$

Nach Gleichung 5.10 ist also $\dot{F}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. F ist konstant und somit $F(t) = F(0) = \langle v, w \rangle$, was genau die zu beweisende Gleichung 5.9 ist. □

Sei $g \in G$, als *Konjugation* mit $g \in G$ bezeichnet man den Gruppen-Homomorphismus $\alpha_g : G \to G, h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}$, d.h. $\alpha_g = l_g \circ r_{g^{-1}}$. Tatsächlich gilt

$$\alpha_{gh}(a) = gh \cdot a \cdot (gh)^{-1} = gh \cdot a \cdot h^{-1}g^{-1} = \alpha_g \circ \alpha_h(a) \ .$$

Die Konjugation ist ein *Automorphismus* von G, d.h. ein Gruppen-Isomorphismus auf G. Man sagt α_g ist ein *innerer* Automorphismus. Das Differential $\mathrm{Ad}(g) = d\alpha_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ist dann ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$, d.h. ein Lie-Algebren-Isomorphismus auf $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Ad}(g)[X, Y] = [\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y], \qquad \mathrm{Ad}(g)^{-1} = \mathrm{Ad}(g^{-1})$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ und alle $g \in G$. Aus der Definition folgt auch direkt:

$$\mathrm{Ad}(gh) = d\alpha_{gh} = d(\alpha_g \circ \alpha_h) = d\alpha_g \circ d\alpha_h = \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h) \ ,$$

d.h. $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ ist ein Homomorphismus. Sei $X \in \mathfrak{g}$ und t hinreichend klein, dann gilt

$$\mathrm{Ad}(g)X = \tfrac{1}{t} \exp^{-1}(\alpha_g(\exp tX)) = \tfrac{1}{t} \exp^{-1}(g \cdot \exp tX \cdot g^{-1}) \ .$$

Das folgt aus der Gleichung $\varphi(\exp tX) = \exp(d\varphi tX)$ für den Homomorphismus $\varphi = \alpha_g$. Man erhält, dass die Abbildung Ad ein stetiger und damit auch differenzierbarer Lie-Gruppen Homomorphismus ist. Damit hat man den folgenden Satz bewiesen:

Satz 5.25 *Die Abbildung* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), g \mapsto \mathrm{Ad}(g) = d\alpha_g$ *ist eine Darstellung von* G*, d.h. ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Man nennt* Ad *die* adjungierte Darstellung *von* G*.*

Satz 5.26 *Für das Differential* $\mathrm{ad} = d\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *gilt :* $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$ *für alle* $X, Y \in \mathfrak{g}$*. Man nennt* ad *die* adjungierte Darstellung *von* $\mathfrak{g}$.

Beweis: Sei X ein links-invariantes Vektorfeld, dann sind seine Integralkurven durch $g \in G$ gegeben als $c_g(t) = g \cdot \exp tX$. Somit schreibt sich der lokale Fluß von X als $\varphi_t(g) = r_{\exp tX}(g)$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(X)Y &= d\mathrm{Ad}(X)Y \;=\; \left(\tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp tX)\right) Y \\
&= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} (dr_{\exp -tX}\, dl_{\exp tX}\, Y) \\
&= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(dr_{\exp -tX} \tilde{Y}_{\exp tX}\right) \\
&= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(d\varphi_{-t} \tilde{Y}_{\varphi_t(e)}\right) \\
&= [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e = [X, Y]
\end{aligned}$$

□

Bemerkungen:

1. Für Matrizengruppen $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gilt:

$$\mathrm{Ad}(g)A = g\, A\, g^{-1} \qquad \text{für alle} \quad g \in G, A \in \mathfrak{g}$$

2. Es gilt $g \exp X g^{-1} = \exp \mathrm{Ad}(g)X$, d.h. man hat das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g) = d\alpha_g} & \mathfrak{g} \\
{\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\
G & \xrightarrow{\alpha_g} & G
\end{array}$$

Speziell für Matrizengruppen erhält man die schon erwähnte Gleichung:

$$Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}} \; .$$

3. Es gilt $\mathrm{Ad}(\exp X) = e^{\mathrm{ad}(X)}$, d.h. man hat das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{ad} = d\mathrm{Ad}} & \mathrm{End}\,(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \\
{\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\
G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})
\end{array}$$

4. Die Jacobi-Identität übersetzt sich in folgende Gleichung

$$\mathrm{ad}(Z)[X, Y] = [\mathrm{ad}(Z)X, Y] + [X, \mathrm{ad}(Z)Y] \; .$$

Man sagt $\mathrm{ad}(Z)$ ist eine *Derivation* von $\mathfrak{g}$, d.h.

$$\mathrm{ad}(Z) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \{\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \text{ linear und } \; \psi([X, Y]) = [\psi(X), Y] + [X, \psi(Y)]\}$$

5. $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$

6. Man hat das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}\,(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Das *Zentrum* $Z(G) \subset G$ von G bzw. $Z(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ ist definiert als

$$Z(G) = \{g \in G \,|\, gh = hg \text{ für alle } h \in G\} \quad Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, [X, Y] = 0 \text{ für alle } Y \in \mathfrak{g}\}$$

Beispiel: $Z(O(n)) = \mathbb{Z}_2, \quad Z(SU(n)) = \mathbb{Z}_n, \quad Z(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) = \{cE \,|\, c \neq 0\}$

Satz 5.27 *Das Zentrum $Z(G) \subset G$ ist eine abgeschlossene Lie-Untergruppe und es gilt $Z(G) \subset \ker \mathrm{Ad}$. Für zusammenhängende Gruppen G gilt $Z(G) = \ker \mathrm{Ad}$ und außerdem $\mathrm{Lie}\, Z(G) = Z(\mathfrak{g})$.*

Beweis: Offensichtlich gilt $g \in Z(G)$ genau dann, wenn $\alpha_g = \mathrm{Id}_G$. Somit folgt unmittelbar $Z(G) \subset \ker \mathrm{Ad}$, denn $\mathrm{Ad}(g) = d\alpha_g$ und $d\mathrm{Id}_G = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$.

Sei nun G zusammenhängend und $g \in \ker \mathrm{Ad}$. Da die Gruppe G von einer Normalenumgebung der Eins erzeugt wird, genügt es, die folgende Aussage zu beweisen

$$\alpha_g(\exp tX) = \exp tX \qquad \text{für alle} \quad X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R} \;.$$

Betrachtet man nun den Homomorphismus $\mathbb{R} \to G,\ t \mapsto \alpha_g(\exp tX)$, dann existiert nach Folgerung 5.19 ein $Y \in \mathfrak{g}$ mit $\exp tY = \alpha_g(\exp tX)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Bildet man die Ableitung in $t = 0$ und nutzt $g \in \ker \mathrm{Ad}$, also $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$, so findet man

$$Y_e = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \alpha_g(\exp tX) = d\alpha_g(X_e) = \mathrm{Ad}(g)(X_e) = X_e \;.$$

Also $X = Y$ und $\alpha_g = \mathrm{Id}$, d.h. $g \in Z(G)$.

Die Lie-Algebra des Zentrums $Z(G)$ berechnet man mit Hilfe von Satz 5.18:

$$\mathrm{Lie}(Z(G)) = \mathrm{Lie}(\ker \mathrm{Ad}) = \ker(d\mathrm{Ad}) = \ker(\mathrm{ad}) = Z(\mathfrak{g}) \;.$$

□

Folgerung 5.28 *Eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist genau dann abelsch, wenn ihre Lie-Algebra abelsch ist.*

Folgerung 5.29 *Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$ mit $[X, Y] = 0$, dann gilt*

$$\exp(X + Y) = \exp X \cdot \exp Y \;.$$

Beweis: Sei $\mathfrak{a} := \mathrm{span}\{X, Y\} \subset \mathfrak{g}$, dann ist $\mathfrak{a}$ eine abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Sei $A \subset G$ die zusammenhängende Untergruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{a}$. Dann ist nach der letzten Folgerung A eine abelsche Lie-Gruppe. Man definiert eine Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to G$ durch $\alpha(t) := \exp tX \cdot \exp tY$, dann ist, da A abelsch ist, $\alpha : \mathbb{R} \to A \subset G$ ein glatter Homomorphismus. Nach Folgerung 5.19 existiert ein $Z \in \mathfrak{g}$ mit $\alpha(t) = \exp tZ$, wobei $Z = \dot{\alpha}(0)$. Berechnet man die Ableitung von $\alpha(t) = \exp tX \cdot \exp tY$ in $t = 0$, so erhält man andererseits $\dot{\alpha}(0) = X + Y$. Insgesamt folgt

$$\exp tX \cdot \exp tY = \alpha(t) = \exp t(X + Y) \ .$$

□

Bemerkung: Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra mit $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, dann besitzt $\mathfrak{g}$ eine treue Darstellung

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,(\mathfrak{g}) \ ,$$

d.h. $\mathfrak{g}$ ist isomorph zu einer Lie-Algebra einer Lie-Gruppe. Das beweist das Theorem von Ado im Spezialfall von Lie-Algebren mit trivialem Zentrum.

Eine weitere Anwendung der adjungierten Darstellung betrifft das Verhältnis von Normalteilern und Idealen in Lie-Gruppen bzw. Lie-Algebren.

Satz 5.30 *Sei $H \subset G$ eine zusammenhängende Lie-Untergruppe einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G. Dann ist die Gruppe H genau dann ein Normalteiler in G, wenn $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ ein Ideal in $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ ist.*

Beweis: Sei zuerst $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$, d.h. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Sei $Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}$ und $g = \exp X$. Dann gilt nach den oben angegebenen Vertauschungsregeln

$$\begin{aligned} g \cdot \exp Y \cdot g^{-1} &= \exp \mathrm{Ad}(g)Y \\ &= \exp e^{\mathrm{ad}X}Y \\ &= \exp(Y + [X, Y] + \tfrac{1}{2}(\mathrm{ad}X)^2Y + \ldots) \\ &= \exp Z \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung alle Kommutatoren in $\mathfrak{h}$ liegen, konvergiert die Reihe gegen einen Vektor $Z \in \mathfrak{h}$. Damit folgt $g \cdot \exp Y \cdot g^{-1} \in H$. Aber H und G werden von einer Normalenumgebung erzeugt und es folgt, dass $H \subset G$ ein Normalteiler ist.

Für die umgekehrte Richtung sei $H \subset G$ ein Normalteiler und wieder $Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}$ und $g = \exp tX$. Wie oben folgt

$$g \cdot \exp sY \cdot g^{-1} = \exp \mathrm{Ad}(g)sY = \exp se^{t\mathrm{ad}X}Y \ .$$

Da H ein Normalteiler ist, gilt für alle $s \in \mathbb{R}$ die Inklusion $g \cdot \exp sY \cdot g^{-1} \subset H$. Das bedeutet wiederum $e^{t\mathrm{ad}X}Y \in \mathfrak{h}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist $t \mapsto e^{t\mathrm{ad}X}Y = Y + t[X, Y] + \ldots$ eine glatte Kurve in $\mathfrak{h}$ mit Tangentialvektor $[X, Y]$ in $t = 0$, also $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, womit gezeigt ist, dass $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal ist. □

5.5 Die Killing-Form

Definition 5.31 *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Die Bilinearform*

$$B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$$

heißt Killing-Form *von $\mathfrak{g}$. Falls $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G ist, dann nennt man $B_{\mathfrak{g}}$ auch Killing-Form von G.*

Satz 5.32 *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und Killing-Form $B_{\mathfrak{g}}$. Sei $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein Lie-Algebren Isomorphismus. Dann gilt*

$$B_{\mathfrak{g}}(\sigma(X), \sigma(Y)) = B_{\mathfrak{g}}(X, Y)$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$. Insbesondere gilt für die adjungierten Darstellungen

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) &= B_{\mathfrak{g}}(X, Y) \\ B_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(X)Y, Z) + B_{\mathfrak{g}}(Y, \mathrm{ad}(X)Z) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $g \in G$ und alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Beweis: Sei σ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$, d.h. $\sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)]$, oder anders geschrieben: $\sigma \circ \mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(\sigma(X)) \circ \sigma$, also

$$\mathrm{ad}(\sigma X) = \sigma \circ \mathrm{ad}(X) \circ \sigma^{-1} \ .$$

Diese Beziehung setzt man nun in die Definition der Killing-Form ein und erhält

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}}(\sigma X, \sigma Y) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\sigma X) \circ \mathrm{ad}(\sigma Y)) = \mathrm{Tr}(\sigma \circ \mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y) \circ \sigma^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)) \\ &= B_{\mathfrak{g}}(X, Y) \ . \end{aligned}$$

Die Killing-Form ist also invariant unter Automorphismen von $\mathfrak{g}$ und die beiden restlichen Aussagen ergeben sich aus dem Spezialfall $\sigma = \mathrm{Ad}$ bzw. Satz 5.24. □

Beispiele:

1. Ist $\mathfrak{g}$ abelsch, dann gilt $B_{\mathfrak{g}} \equiv 0$.
2. Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ist $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 2n\mathrm{Tr}(X \cdot Y) - 2\mathrm{Tr}(X)\,\mathrm{Tr}(Y)$.
3. Ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal, d.h. gilt $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ dann ist die Killing-Form von $\mathfrak{h}$ gleich der Einschränkung der Killing-Form von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$:

$$B_h = B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}} \ .$$

4. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{Tr}(X) = 0\}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Es folgt für die Killing-Form von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$:

$$B_{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})}(X,Y) = 2n\,\mathrm{Tr}(X\,Y)\ .$$

5. Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \,|\, X + X^T = 0\}$ ist kein Ideal in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Für die Killing-Form von $\mathfrak{so}(n)$ findet man:

$$B_{\mathfrak{so}(n)}(X,Y) = (n-2)\,\mathrm{Tr}(X\,Y)\ .$$

Bemerkung: Lie-Algebren mit nicht-ausgearteter Killing-Form, z.B. $\mathfrak{sl}(n,R)$ oder $\mathfrak{so}(n)$ nennt man *halb-einfach*. Äquivalent dazu ist, dass halb-einfache Algebren direkte Summe von einfachen Lie-Algebren sind, also Algebren, die nur triviale Ideale besitzen. Halbeinfache Lie-Algebren sind vollständig klassifiziert.

Satz 5.33 *Sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Dann ist ihre Killing-Form negativ semidefinit.*

Beweis: Da G eine kompakte Lie-Gruppe ist, existiert, wie schon bemerkt, auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ ein Ad-invariantes Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und nach Satz 5.24 folgt

$$\langle \mathrm{ad}(X)Y, Z\rangle + \langle Y, \mathrm{ad}(X)Z\rangle = 0\ ,$$

d.h. $\mathrm{ad}(X)$ ist schiefsymmetrisch bzgl. dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei $e_1,\dots,e_n$ eine Orthonormal-Basis bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $\mathfrak{g}$, dann gilt:

$$B_{\mathfrak{g}}(X,X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(X)) = \sum\langle \mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(X)e_i, e_i\rangle = -\sum\|\mathrm{ad}(X)e_i\|^2 \leq 0\ .$$

$\square$

6 Transformationsgruppen und homogene Mannigfaltigkeiten

Definition 6.1 *Eine Lie-Gruppe G* wirkt*, oder auch* operiert*, von links auf einer Mannigfaltigkeit M, falls eine glatte Abbildung*

$$\Phi : G \times M \to M, \qquad (g, p) \mapsto g \cdot p := \Phi(g, p)$$

existiert, die die folgenden Eigenschaften hat:

1. *Für alle $p \in M$ und $g, h \in G$ gilt:* $\qquad (g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$
2. *Für alle $p \in M$ gilt:* $\qquad e \cdot p = p$

Bemerkung:

1. Es folgt sofort, dass die Links-Translation $l_g : M \to M, p \mapsto g \cdot p$ ein Diffeomorphismus ist: $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$. Manchmal ist dies auch Teil der Definition einer Gruppenwirkung von G auf M.
2. Äquivalent kann man eine Gruppenwirkung auf M definieren, als eine Darstellung $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(M),\ g \mapsto l_g$, wobei $\mathrm{Diff}(M)$ die Gruppe der Diffeomorphismen von M bezeichnet.
3. Jede Darstellung einer Gruppe G auf einem Vektorraum V definiert eine Wirkung von G auf V.

Definition 6.2 *Sei G eine Lie-Gruppe, die von links auf einer Mannigfaltigkeit M wirkt. Dann definiert man:*

1. *Die* Bahn *(auch* Orbit*) von G durch $p \in M$:* $\qquad \mathcal{O}_p := G \cdot p = \{g \cdot p \,|\, g \in G\}$.
2. *Die* Standgruppe *(auch Isotropiegruppe oder Stabilisator genannt) von $p \in M$: $G_p := \{g \in G \,|\, g \cdot p = p\}$.*
3. *G wirkt* transitiv *auf M, wenn für alle Punkte $p, q \in M$ ein Gruppenelement $g \in G$ existiert mit $q = g \cdot p$. Äquivalent dazu ist, dass M aus einer Bahn besteht: $M = \mathcal{O}_p$ für ein und damit für alle $p \in M$.*
4. *G wirkt* frei *auf M, wenn für alle $g \in G, g \neq e$ die Links-Translation l_g fixpunktfrei ist.*
5. *G wirkt* effektiv *auf M, wenn $l_g = \mathrm{Id}_M$ nur für $g = e$ erfüllt ist, d.h. die Darstellung $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ ist treu.*

Definition 6.3 *Eine Mannigfaltigkeit M, auf der eine Lie-Gruppe G transitiv wirkt nennt man* homogen*. Man sagt auch M ist ein homogener Raum.*

Beispiele:

1. Eine Lie-Gruppe G wirkt durch Gruppen-Multiplikation auf sich. Diese Wirkung ist transitiv. Damit sind Lie-Gruppen eine spezielle Klasse von homogenen Räumen.

2. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ wirkt auf $\mathbb{R}^n$: $(A,v) \mapsto A \cdot v$. Diese Wirkung ist transitiv auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

3. $\mathrm{O}(n)$ wirkt transitiv auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ mit der Standgruppe $\mathrm{O}(n)_{e_1} \cong \mathrm{O}(n-1)$, dabei ist e_1 der erste Vektor der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$. Damit sind Sphären homogene Mannigfaltigkeiten.

Im Weiteren soll gezeigt werden, dass der Raum der Nebenklassen G/H eine homogene Mannigfaltigkeit ist und das jeder homogene Raum sich so darstellen läßt. Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Auf G definiert man die Äquivalenzrelation: $g_1 \sim g_2 \leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$. Die Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ sind die Nebenklassen

$$[g] = \{gh \,|\, h \in H\} = gH \subset G \ .$$

Der *Faktorraum* G/H ist dann der Raum der Nebenklassen: $G/H = \cup_{g\in G}[g] = G/_\sim$. Die Topologie auf G/H wird so definiert, dass genau die Mengen offen sind, deren Urbild unter π offen in G ist. Die natürliche Projektion

$$\pi : G \to G/H, \quad g \mapsto gH$$

wird damit eine stetige Abbildung wird. Darüber hinaus ist die Projektion π eine offen Abbildung, d.h. das Bild offener Mengen ist wieder offen. Denn ist $W \subset G$ eine offene Menge, dann ist auch

$$\pi^{-1}(\pi(W)) \ = \ \bigcup_{h\in H} W \cdot h$$

als Vereinigung von offenen Mengen wieder offen. Die so definierte Topologie auf G/H ist hausdorff, d.h. man kann je zwei Punkte durch offene Mengen trennen. Um dies einzusehen, betrachtet man die durch die Relation $\sim$ definierte Menge

$$R \ := \ \{(\sigma,\tau) \in G \times G \,|\, \exists h \in H \ : \ \sigma = \tau \cdot h\} \ = \ \alpha^{-1}(H) \ \subset \ G \times G \ ,$$

wobei $\alpha : G \times G \to G$ definiert ist durch $\alpha(\sigma,\tau) = \tau^{-1} \cdot \sigma$. Da α stetig und $H \subset G$ abgeschlossen ist, folgt, dass R abgeschlossen und $G \times G \setminus R$ somit offen ist. Seien σH und τH zwei verschieden Punkte in G/H. Dann sind die Gruppenelemente σ und τ nicht äquivalent, d.h. $(\sigma,\tau) \in (G \times G) \setminus R$. Also existiert eine offene Umgebung V von σ und W von τ mit

$$V \cap W = \emptyset \qquad \text{und} \qquad V \times W \subset (G \times G) \setminus R \ .$$

Es folgt, dass $\pi(V)$ und $\pi(W)$ die gesuchten disjunkten, offenen Umgebungen von σH und τH sind. Angenommen $gH \in \pi(V) \cap \pi(W)$, dann exisiert ein $v \in V$ und ein $w \in W$ mit $gH = vH = wH$ und somit $(v,w) \in (V \times W) \cap R$, was aber ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Mit Hilfe der kanonischen Projektion $\pi : G \to G/H$ projiziert sich eine abzählbare Basis der Topologie von G zu einer abzählbaren Basis der Topologie von G/H. Damit ist G/H eine topologische Mannigfaltigkeit. Es bleibt noch zu zeigen, dass sich auf G/H eine differenzierbare Struktur einführen läßt.

Satz 6.4 *Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe G. Dann existiert auf dem Faktorraum G/H eine eindeutig bestimmte Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit*

1. *Die natürliche Projektion $\pi : G \to G/H$ ist eine glatte Submersion.*
2. *Der Faktorraum G/H ist ein homogener Raum bzgl. der G-Wirkung*
$$G \times G/H \to G/H, \quad (g, [a]) \mapsto [ga] \ .$$
3. *Zu jeder Äquivalenzklasse $[a] \in G/H$ existiert eine Umgebung $W([a]) \subset G/H$ und eine glatte Abbildung $s_{[a]} : W([a]) \to G$ mit*
$$\pi \circ s_{[a]} = \mathrm{Id}_{W([a])} \ .$$
Man sagt die Abbildungen $s_{[a]}$ sind lokale Schnitte der Faserung $\pi : G \to G/H$.

zum Beweis: Hier sollen nur einige Anmerkungen zum Beweis gemacht werden. Einen vollständigen Beweis findet man bei H. Baum oder F. Warner.

Wie schon gezeigt, ist G/H mit der Faktorraum-Topologie ein Hausdorff-Raum mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Es soll nun erklärt werden, wie man Karten um jeden Punkt $[g] \in G/H$ konstruiert. Dazu sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ ein Vektorraum-Komplement von $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ ist. Sei Φ definiert durch

$$\Phi : \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \to G, \quad X + Y \mapsto \exp X \cdot \exp Y \ .$$

Wie schon gezeigt, ist Φ ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung $W = W_{\mathfrak{m}} \times W_{\mathfrak{h}}$ von $0 \in \mathfrak{g}$, dabei ist $W_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ und $W_h \subset \mathfrak{h}$ jeweils eine Umgebung der Null in $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{h}$. Man kann nun zeigen, dass man nach geeigneter Verkleinerung von W folgende Bedingungen erfüllen kann:

$$\exp(W_{\mathfrak{m}} \setminus \{0\}) \cap H = \emptyset, \qquad \exp W \cdot (\exp W)^{-1} \subset \Phi(W) \ .$$

Damit zeigt man, dass die Abbildung

$$\varphi_{[g]} := \pi \circ l_g \circ \exp : W_{\mathfrak{m}} \to G \to G \to G/H$$

ein Homöomorphismus auf das Bild ist. Als Karte um $[g] \in G/H$ wählt man nun $(\varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}}), \varphi_{[g]}^{-1})$. Die Kartenwechsel sind glatt, denn man kann leicht überprüfen, dass

$$\varphi_{[a]}^{-1} \circ \varphi_{[b]}(X) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \Phi^{-1} \circ l_{a^{-1}b} \circ \exp X$$

für alle $X \in W_{\mathfrak{m}}$ gilt. In der Tat muß man dafür folgende Gleichung zeigen:

$$[b \cdot \exp X] = [a \cdot \exp(\mathrm{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \Phi^{-1} \circ l_{a^{-1}b} \circ \exp X)] \ .$$

Man schreibt zunächst $l_{a^{-1}b} \circ \exp X = \exp X_{\mathfrak{h}} \cdot \exp X_{\mathfrak{m}}$ für gewisse $X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$ und $X_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$. Es folgt $\exp(\mathrm{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \Phi^{-1} \circ l_{a^{-1}b} \circ \exp X) = \exp X_{\mathfrak{m}}$ und damit

$$
\begin{aligned}
[a \cdot \exp(\mathrm{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \Phi^{-1} \circ l_{a^{-1}b} \circ \exp X)] &= [a \cdot \exp X_{\mathfrak{m}}] \\
&= [a \cdot \exp X_{\mathfrak{m}} \cdot X_{\mathfrak{h}}] \\
&= [a \cdot l_{a^{-1}b} \circ \exp X] \\
&= [b \cdot \exp X]
\end{aligned}
$$

Um die Glattheit der kanonischen Projektion $\pi : G \to G/H$ zu zeigen, betrachtet man Karten $(l_g\Phi(W), (l_g \circ \Phi)^{-1})$ um $g \in G$ und $(\varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}}), \varphi_{[g]}^{-1})$ um $[g] \in G/H$. Damit schreibt sich π in lokalen Koordinaten als

$$
\varphi_{[g]}^{-1} \circ \pi \circ l_g \circ \Phi(X) = \varphi_{[g]}^{-1}([g \cdot \exp(X_{\mathfrak{m}}) \cdot \exp(X_{\mathfrak{h}})]) = \varphi_{[g]}^{-1}([g \cdot \exp(X_{\mathfrak{m}})]) = X_{\mathfrak{m}} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{m}}(X) ,
$$

für alle $X \in l_g\, \Phi(W)$. In lokalen Koordinaten ist π also genau die Projektion $\mathrm{pr}_{\mathfrak{m}}$ von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{m}$ und damit glatt. Insbesondere sieht man auch, dass π eine Submersion ist. Analog zeigt man auch, dass die G-Wirkung auf G/H glatt ist. Offensichtlich ist die G-Wirkung transitiv.

Zum Schluß müssen noch die lokalen Schnitte $s_{[g]}$ auf $W([g]) = \varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}})$ definiert werden. Man setzt

$$
s_{[g]} := l_g \circ \exp \circ \varphi_{[g]}^{-1} .
$$

In lokalen Koordinaten ist $s_{[g]}$ gegeben als $X \mapsto (X, 0)$ bzgl. der Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, d.h. die Abbildung $s_{[g]}$ ist glatt. Nun bleibt noch zu zeigen, dass $s_{[g]}$ ein lokaler Schnitt ist, also die Beziehung $\pi \circ s_{[g]} = \mathrm{Id}$ erfüllt ist. Dazu sei $[a] \in W([g])$, dann existiert ein eindeutig bestimmtes $X_{\mathfrak{m}} \in W_{\mathfrak{m}}$ mit

$$
[a] = \varphi_{[g]}(X_{\mathfrak{m}}) = \pi\, l_g\, \exp(X_{\mathfrak{m}}) = \pi\, l_g\, \exp\, \varphi_{[g]}^{-1}[a] = \pi \circ s_{[g]}([a]) .
$$

□

Bemerkungen:

1. $\dim G/H = \dim G - \dim H$
2. $\ker d\pi = \mathfrak{h}$ und $T_{[e]}G/H = d\varphi_{[e]}(\mathfrak{m}) \cong \mathfrak{m}$
3. Eine Abbildung $f : G/H \to N$ ist genau dann differenzierbar, wenn $f \circ \pi : G \to N$ differenzierbar ist. Zur Begründung bemerkt man, dass sich f eingeschränkt auf die Umgebung $W([g])$ schreibt als
$$
f|_{W([g])} = f \circ \pi \circ s_{[g]} .
$$
4. Sei $\tau_g : G/H \to G/H$ die G-Wirkung $\tau_g([a]) = g[a] = [ga]$. Dann gilt $\pi \circ l_g = \tau_g \circ \pi$, d.h. man hat das folgende kommutative Diagramm
$$
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{l_g} & G \\
{\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\
G/H & \xrightarrow{\tau_g} & G/H
\end{array}
$$

Es gilt nun auch die Umkehrung von Satz 6.4, d.h. jede homogene Mannigfaltigkeit ist von der Form G/H für geeignete Lie-Gruppen G und H.

Satz 6.5 *Sei G eine Lie-Gruppe, die transitiv von links auf einer Mannigfaltigkeit M wirkt. Für jedes $p \in M$ ist die Abbildung*

$$\Psi : G/G_p \to M, \quad [a] \mapsto a \cdot p$$

ein G-äquivarianter Diffeomorphismus, d.h. es gilt für alle $g \in G$ und $[a] \in G/G_p$ die Gleichung

$$\Psi(g \cdot [a]) = g \cdot \Psi([a]) \ .$$

Insbesondere ist die Bahn $\mathcal{O}_p$ diffeomorph zu G/G_p und jeder G-homogene Raum M schreibt sich als $M = G/H$ für eine abgeschlossene Lie-Untergruppe $H \subset G$.

Beweis: Zunächst zeigt man, dass Ψ wohldefiniert ist. Denn aus $[a] = [b]$ folgt $a^{-1}b \in G_p$ und somit $a \cdot p = b \cdot p$. Die Äquivarianz folgt direkt aus der Definition von Ψ bzw. der G-Wirkung auf G/G_p.

Sei $\beta := \Psi \circ \pi$, d.h. $\beta : G \to M, \beta(g) = g \cdot p$. Die Abbildung β ist offensichtlich glatt, als Teil der G-Wirkung auf M und nach Bemerkung 4 ist damit auch Φ glatt.

Es bleibt zu zeigen, dass $d\Psi : T_{[a]}G/G_p \to T_{\Psi([a])}M$ ein Isomorphismus ist. Dafür genügt es, $d\Psi$ in $[e]$ zu berechnen, denn $d\Psi \circ dl_a = dl_a \circ d\Psi$. Der Tangentialraum an G/G_p in $[e]$ ist gegeben als

$$T_{[e]}G/G_p = d\varphi_{[e]}(\mathfrak{m}) \ .$$

Sei $X \in \mathfrak{m}$ dann berechnet man

$$d\Psi(d\varphi_{[e]}(X)) = d(\Psi \circ \pi \circ \exp)(X) = d(\beta \circ \exp)X = d\beta X$$

Der Tangentialvektor $d\varphi_{[e]}(X)$ liegt also genau dann im Kern von $d\Psi$, wenn $X \in \ker d\beta$ also, wie man leicht sieht, wenn $X \in \mathrm{Lie}(G_p) = \mathfrak{h}$. Damit liegt aber X im Durchschnitt $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}$ und muß damit verschwinden. Man hat also gezeigt, dass $d\Psi$ injektiv ist. Da aber $\dim G/G_p = \dim \mathfrak{m}$ gilt, ist $d\Psi$ auch surjektiv und somit ein Isomorphismus. $\square$

6.1 Beispiele homogener Mannigfaltigkeiten

1. Jede Lie-Gruppe G ist ein homogener Raum: $G = G \times G/G = G/\{e\}$.

2. Die Gruppe $\mathrm{SO}(n+1)$ wirkt durch Matrizenmultiplikation transitiv auf der Einheitssphäre $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die Standgruppe von e_1 (und von jedem anderen Punkt auf der Sphäre) ist isomorph zu $\mathrm{SO}(n)$. Damit hat man folgende Darstellung von S^n als homogenen Raum:

$$S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n) \ .$$

3. Auf der Einheitssphäre $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ wirkt $\mathrm{SU}(n+1)$ transitiv. Die Standgruppe von e_1 (und von jedem anderen Punkt) ist isomorph zu $\mathrm{SU}(n)$. Damit hat die Sphäre S^{2n+1} eine weitere Möglichkeit als homogener Raum geschrieben zu werden:
$$S^{2n+1} = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(n) \ .$$

4. Auf der Einheitssphäre $S^{4n+3} \subset \mathbb{H}^{n+1}$ wirkt $\mathrm{Sp}(n+1)$ transitiv. Die Standgruppe von e_1 (und von jedem anderen Punkt) ist isomorph zu $\mathrm{Sp}(n)$. Damit hat die Sphäre S^{4n+3} eine weitere Möglichkeit als homogener Raum geschrieben zu werden:
$$S^{4n+3} = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n) \ .$$

5. Die (effektiven) transitiven Wirkungen von Lie-Gruppen auf den Sphären wurden von Montgomery/Samelson bzw. Borel klassifiziert. Es sind die oben genannten Beispiele und
$$S^6 = \mathbf{G}_2/\mathrm{SU}(3), \qquad S^7 = \mathrm{Spin}(7)/\mathbf{G}_2, \qquad S^{15} = \mathrm{Spin}(9)/\mathrm{Spin}(7) \ .$$
Dabei ist $\mathbf{G}_2$ die 14-dimensionale exzeptionelle einfache Lie-Gruppe und $\mathrm{Spin}(n)$ bezeichnet die Spin-Gruppe, eine zweifache Überlagerung der speziellen orthogonalen Gruppe.

6. Die einzigen Sphären mit der Struktur einer Lie-Gruppe sind
$$S^1 = \mathrm{SO}(2) = \mathrm{U}(1), \qquad S^3 = \mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2) = \mathrm{Spin}(3) \ .$$

7. Auf dem komplex projektiven Raum $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim$, wobei $\sim$ definiert ist durch $z \sim \lambda z, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{C}^{n+1}$ wirkt die Gruppe $\mathrm{SU}(n+1)$ transitiv, durch $A[z] = [Az]$. Die Standgruppe von $[1 : 0 : \ldots : 0]$ ist isomorph zu der Gruppe $S(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)) = \{(\lambda, A) \,|\, \lambda \in \mathrm{U}(1), A \in \mathrm{U}(n), \lambda \det A = 1\}$. Der komplex projektive Raum hat daher folgende Darstellung als homogener Raum
$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \mathrm{SU}(n+1)/S(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)) = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n) \ .$$
Die Gruppe $\mathrm{SU}(n+1)$ wirkt nicht effektiv. Der Nichteffektivitätskern, also die Menge der Gruppenelemente, die als Identität wirken, berechnet sich als
$$\mathbb{Z}_{n+1} = Z(\mathrm{SU}(n+1)) = \{\mathrm{diag}\,(\lambda, \ldots, \lambda) \,|\, \lambda^{n+1} = 1\} \ .$$
Damit wirkt die projektive unitäre Gruppe $\mathrm{PSU}(n+1) = \mathrm{SU}(n+1)/\mathbb{Z}_{n+1}$ effektiv auf dem komplex projektiven Raum.

8. Folgende S^1- bzw. S^3-Faserungen werden als Hopf-Faserungen bezeichnet:
$$\begin{aligned} S^{2n+1} &= \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(n) &&\longrightarrow &&\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n) \ , \\ S^{4n+3} &= \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n) &&\longrightarrow &&\mathbb{H}\mathrm{P}^n = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \ . \end{aligned}$$

9. Allgemeiner seien H und K abgeschlossene Untergruppen in G mit $H \subset K \subset G$. Dann erhält man eine Faserung $\pi : G/H \to G/K$ mit Faser K/H, d.h. das Urbild unter π von Punkten in der Basis G/K ist diffeomorph zu K/H.

10. Sei $G = \mathrm{U}(n)$ die Gruppe der unitären Matrizen mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A + \bar{A}^T = 0\} \cong \mathbb{R}^{n^2} .$$

Die Gruppe G wirkt durch die adjungierte Darstellung auf ihrer Lie-Algebra, d.h. für Matrizen-Gruppen durch

$$G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (g, A) \mapsto \mathrm{Ad}(g)A = g\,A\,g^{-1} .$$

Matrizen in $\mathfrak{u}(n)$ sind schief-hermitesch und insbesondere normal, lassen sich also diagonalisieren. Sei $A \in \mathfrak{u}(n)$, dann existiert ein $g \in \mathrm{U}(n)$ mit $g\,A\,g^{-1} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, d.h. der Orbit $\mathcal{O}_A$ durch A enthält die Matrix $D := \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und besteht aus der Menge aller schief-hermiteschen Matrizen mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Sei G_D die Standgruppe der Diagonalmatrix D, dann findet man

$$G_D = \mathrm{U}(r_1) \times \ldots \times \mathrm{U}(r_k)$$

mit $r_1 + \ldots + r_k = n$. Damit hat man bewiesen

Satz 6.6 *Sei $A \in \mathfrak{u}(n)$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit den geometrischen Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_k$. Dann gilt für den Orbit durch A:*

$$\mathcal{O}_A = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(r_1) \times \ldots \times \mathrm{U}(r_k) .$$

7 Differentialformen

Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und sei $V^* = \mathrm{Hom}\,(V,\mathbb{R})$ der Dualraum von V, d.h. der Raum der linearen Abbildungen $V \to \mathbb{R}$. Später wird V ersetzt durch T_pM.

Definition 7.1 *Eine k-*Form *auf V ist eine multilineare, alternierende Abbildung*

$$\omega : V \times \cdots_{k\ mal} \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}\ .$$

Die Zahl k nennt man die Grad der k-Form ω.

Dabei ist ω *alternierend* genau dann, wenn eine der folgenden vier äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \omega(X_1, \dots, X_k) \qquad \forall\, \sigma \in S_k$
2. $\omega(\dots, X_i, \dots, X_j, \dots) = -\,\omega(\dots, X_j, \dots, X_i, \dots)$
3. $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$ falls es i, j gibt mit $i \neq j$ und $X_i = X_j$
4. $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$ falls $X_1, \dots, X_k$ linear abhängig sind.

Bemerkung: Die Menge der k-Formen auf V bildet einen reellen Vektorraum, der bezeichnet wird mit

$$\Lambda^k V^*\ .$$

Man setzt $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ und für $k > n$ gilt offensichtlich $\Lambda^k V^* = \{0\}$, falls V ein n-dimensionalen Vektorraum ist. Denn in V sind dann k Vektoren für $k > n$ immer linear abhängig. Addition und skalare Multiplikation sind definiert durch

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2)(X_1, \dots, X_k) &= \omega_1(X_1, \dots, X_k) + \omega_2(X_1, \dots, X_k)\ , \\ (\lambda\omega)(X_1, \dots, X_k) &= \lambda \cdot \omega(X_1, \dots, X_k)\ . \end{aligned}$$

Beispiele:

1. *1-Formen:* $\Lambda^1 V^* = V^* = \mathrm{Hom}\,(V,\mathbb{R})$. Insbesondere gilt $\dim \Lambda^1 V^* = n$, falls V ein n-dimensionaler Vektorraum ist.
2. *2-Formen:* $\Lambda^2 V^* =$ Menge der schief-symmetrischen bilinearen Abbildungen $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$, d.h. es gilt $\omega(X,Y) = -\omega(Y,X)$ für alle Vektoren $X, Y \in V$.

   Lemma 7.2 $\qquad \Lambda^2 V^* \cong \mathfrak{so}(V) \cong \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$

   Beweis: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Man definiert die Identifikation durch $\Lambda^2 V^* \to \mathrm{End}\,(V), \omega \mapsto \hat{\omega}$ mit $\langle \hat{\omega}(X), Y \rangle = \omega(X,Y)$. $\square$

Folgerung 7.3 $\dim \Lambda^2 V^* = \binom{n}{2}$

3. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und sei ω eine n-Form auf V. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine fixierte Basis in V, bzgl. der man Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ als Spaltenvektoren betrachtet. Dann gilt:

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n)\, \omega(e_1, \ldots, e_n)$$

Damit folgt $\Lambda^n V^* = \mathbb{R} \cdot \det \cong \mathbb{R}$.

Definition 7.4 *Die* äußere Algebra *von V ist definiert als* $\Lambda(V^*) := \oplus_{k=0}^n \Lambda^k V^*$, *d.h. als die Menge der Formen von beliebigem Grad auf V. Die Vektorraumstruktur kommt von den einzelnen Summanden $\Lambda^k V^*$, die Produktstruktur ist definiert durch das* Dachprodukt*:*

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \longrightarrow \Lambda^{k+l} V^*, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

dabei ist $\wedge$ definiert durch

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!\, l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \cdot \beta(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)})$$

Bemerkung: Der Raum der $(0,k)$-Tensoren auf V ist definiert als der Vektorraum der k-fach multilinearen Abbildungen:

$$T^{(0,k)} V^* := \{\lambda : V \times \cdots {}_{\text{k mal}} \cdots \times V \to \mathbb{R} \quad \text{multilinear}\} \ .$$

Das *Tensorprodukt* auf der Tensoralgebra $T(V^*) = \oplus_k T^{(0,k)}(V^*)$ ist definiert durch

$$(\lambda \otimes \mu)(X_1, \ldots, X_{k+l}) = \lambda(X_1, \ldots, X_k) \cdot \mu(X_{k+1}, \ldots, X_{k+l}) \ .$$

Das Dach-Produkt ergibt sich als Projektion des Tensorproduktes auf den Unterraum $\Lambda^k V^* \subset T^{(0,k)} V^*$. Man definiert die Abbildung $\operatorname{Alt} : T^{(0,k)} V^* \to \Lambda^k V^*$ durch

$$\operatorname{Alt}(\lambda)(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \lambda(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \ .$$

Für eine Bilinearform $\lambda \in T^{(0,2)} V^*$ gilt also: $\operatorname{Alt}(\lambda)(X, Y) = \lambda(X, Y) - \lambda(Y, X)$. In dieser Notation kann man für das Dachprodukt von $\alpha \in \Lambda^k V^*$ und $\beta \in \Lambda^l V^*$ auch schreiben:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k!\, l!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta) \ .$$

Beispiele:

1. Seien α und β zwei 1-Formen auf V dann gilt:

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X)\, \beta(Y) - \alpha(Y)\, \beta(X)$$

2. Sei α eine 1-Form und β eine 2-Form auf V, dann gilt:

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta)(X, Y, Z) &= \alpha(X)\,\beta(Y, Z) - \alpha(Y)\,\beta(X, Z) + \alpha(Z)\,\beta(X, Y) \\ &= \alpha(X)\,\beta(Y, Z) + \alpha(Y)\,\beta(Z, X) + \alpha(Z)\,\beta(X, Y)\ .\end{aligned}$$

Allgemeiner sei α eine 1-Form und β eine k-Form, dann gilt

$$(\alpha \wedge \beta)(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i\, \alpha(X_i)\, \beta(X_0, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_k)\ .$$

Dabei bedeutet $\widehat{X}_i$, dass der entsprechende Eintrag weggelassen wird.

Lemma 7.5 *Das Dachprodukt von Formen hat folgende Eigenschaften:*

1. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha$ *für alle* $\alpha \in \Lambda^k V^*, \beta \in \Lambda^l V^*$,

2. $\omega \wedge \omega = 0$ *für alle Formen* ω *von ungeradem Grad,*

3. $(\lambda\alpha + \mu\beta) \wedge \gamma = \lambda\alpha \wedge \gamma + \mu\beta \wedge \gamma$ *für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(V^*)$,

4. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ *für alle* $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(V^*)$

7.1 Das Verhalten unter Abbildungen

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W. Man definiert

$$f^* = \Lambda^k(f) : \Lambda^k W^* \longrightarrow \Lambda^k V^*, \quad (f^*\omega)(v_1, \ldots, v_k) := \omega(f v_1, \ldots, f v_k)\ .$$

für Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ und $\omega \in \Lambda^k W^*$. Man nennt die von f induzierte Abbildung f^* das *Zurückziehen* von Formen. Die Zuordnung $V \mapsto \Lambda^k V^*, f \mapsto f^*$ definiert also einen kontravarianten Funktor auf der Kategorie der Vektorräume.

Lemma 7.6 *Das Zurückziehen hat folgende Eigenschaften:*

1. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

2. $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$

3. $\det(f) = f^* : \Lambda^n V^* \longrightarrow \Lambda^n V^*,$ *falls* $\dim V = n$

7.2 Eine Basis im Raum der Formen

Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis in V und sei $e^1, \ldots, e^n$ die dazugehörige duale Basis in V^*, d.h. es gilt $e^i(e_j) = \delta_{ij}$, bzw. $e^i(v) = v_i$ falls $v = \sum v_i e_i$. Dann ist

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_k} \qquad\qquad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$$

eine Basis in $\Lambda^k V^*$, d.h. zu jeder k-Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ existieren reelle Zahlen $\omega_{i_1,\ldots,i_k}$ mit

$$\omega = \sum \omega_{i_1,\ldots,i_k}\, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_k} \ .$$

Insbesondere gilt $\quad \dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$ und $\quad \Lambda^k V^* \cong \Lambda^{n-k} V^*$.

Lemma 7.7 *Seien $\omega_1, \ldots, \omega_k \in V^*$ und $v_1, \ldots, v_k \in V$, dann gilt*

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \ldots & \omega_k(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(v_k) & \ldots & \omega_k(v_k) \end{pmatrix} \ .$$

Insbesondere gilt $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k = 0$ falls die Linearformen $\omega_1, \ldots, \omega_k$ in V^* linear abhängig sind.

Beispiel: Seien ω_1, ω_2 zwei 1-Formen auf V und $X, Y \in V$. Dann gilt

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X, Y) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(X) & \omega_2(X) \\ \omega_1(Y) & \omega_2(Y) \end{pmatrix} = \omega_1(X)\, \omega_2(Y) - \omega_1(Y)\, \omega_2(X) \ .$$

7.3 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Man überträgt nun die lineare Algebra der k-Formen punktweise auf Mannigfaltigkeiten.

Definition 7.8 *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Das Bündel der k-Formen auf M ist definiert als*

$$\Lambda^k(T^*M) \;=\; \bigcup_{p\in M} \Lambda^k T_p^* M$$

wobei $T_p^*M = (T_pM)^*$. Die kanonische Projektion ist definiert als

$$\pi : \Lambda^k(T^*M) \to M, \quad \pi(\omega) = p \qquad \textit{falls} \quad \omega \in \Lambda^k T_p^* M \ ,$$

d.h. die Faser über $p \in M$ ist der Raum der k-Formen auf T_pM, also $\pi^{-1}(p) = \Lambda^k T_p^* M$.

Bemerkungen: Die Menge $\Lambda^k(T^*M)$ trägt die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit (analog zu TM): Sei (U, x) eine Karte um $p \in M$. Dann definiert man

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to x(U) \times \Lambda^k\mathbb{R}^n, \quad \omega \mapsto (x(\pi(\omega)), (dx^{-1})^*\omega).$$

Mit den Karten $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ wird $\Lambda^k(T^*M)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n + \binom{n}{k}$. Mit der kanonischen Projektion $\pi : \Lambda^k T^*M \to M$ erhält man ein reelles Vektorbündel vom Rang $\binom{n}{k}$ über M.

Definition 7.9 *Eine Differentialform vom Grad k auf M ist eine differenzierbare Abbildung*

$$\omega : M \longrightarrow \Lambda^k T^*M \qquad \textit{mit} \quad \pi \circ \omega = \mathrm{Id}_M \ ,$$

d.h. ω ist ein Schnitt im Vektorbündel $\Lambda^k T^*M$. Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der k-Formen auf M bezeichnet man mit $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^*M)$. Insbesondere gilt für den Raum der 0-Formen: $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.

Beispiel: Jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ definiert eine 1-Form $df \in \Omega^1(M)$.

Der Raum $\Omega^*(M)$ aller Differentialformen auf M ist eine reelle Algebra. Man definiert für Differentialformen $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^*(M)$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ punktweise in $p \in M$:

$$(\omega_1 + \omega_2)(p) := \omega_1(p) + \omega_2(p), \quad (\lambda\omega)(p) := \lambda\omega(p), \quad (\omega_1 \wedge \omega_2)(p) := \omega_1(p) \wedge \omega_2(p)$$

Offensichtlich ist aber der Raum $\Omega^*(M)$ auch ein Modul über dem Ring der Funktionen $\mathcal{C}^\infty(M)$, d.h. für eine glatte Funktion f und eine Differentialform ω definiert man das Produkt $f \cdot \omega := f \wedge \omega$, also

$$(f \cdot \omega)(p) := f(p) \cdot \omega(p) \ .$$

Jede Differentialform $\hat{\omega} \in \Omega^k(M)$ induziert eine $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilineare, alternierende Abbildung

$$\omega : \chi(M) \times \ldots \times \chi(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

man definiert für Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k$ auf M die entsprechende Funktion in $p \in M$ durch $\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) := \hat{\omega}(p)(X_1(p), \ldots, X_k(p))$. Es stellt sich heraus, dass auch die Umkehrung gilt und man eine äquivalente Definition von Differentialformen erhält:

Lemma 7.10 *Jede $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilineare, alternierende Abbildung*

$$\omega : \chi(M) \times \cdots_{k\text{-}mal} \cdots \times \chi(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

definiert eine k-Form $\hat{\omega}$ auf M.

Beweis: Seien $X_1, \ldots, X_k \in T_pM$ mit Fortsetzungen $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_k$ zu lokal um p definierten Vektorfeldern. Dann definiert man die k-Form $\hat{\omega}$ durch

$$\hat{\omega}(p)(X_1, \ldots, X_k) := \omega(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_k)(p) \ .$$

Zu zeigen bleibt jetzt, dass $\omega(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_k)(p)$ nur von dem Wert der Vektorfelder $\tilde{X}_i$ im Punkt p, also den Tangentialvektoren X_i abhängt. Es reicht den Beweis für $k = 1$ zu führen. Hier bleibt zu zeigen, dass $\omega(X)(p) = 0$ gilt, falls X ein Vektorfeld ist mit $X(p) = 0$.

Sei (U, x) eine Karte um p, dann schreibt sich das Vektorfeld X auf U als $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ für gewisse glatte Funktionen $a_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ mit $a_i(p) = 0, i = 1, \ldots, n$. Man wählt nun eine Abschneidefunktion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$ und $\varphi \equiv 1$ auf einer kleinen Umgebung von p. Dann folgt

$$\varphi^2 X \ = \ \sum \varphi a_i \cdot \varphi \tfrac{\partial}{\partial x_i}$$

dabei sind $\varphi a_i, i = 1, \ldots, n$ global definierte Funktionen und $\varphi \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \ldots, n$ global definierte Vektorfelder auf M. Das Vektorfeld X schreibt sich also als

$$X \ = \ X - \varphi^2 X + \sum \varphi a_i \cdot \varphi \tfrac{\partial}{\partial x_i} \ = \ (1 - \varphi^2)X + \sum \varphi a_i \cdot \varphi \tfrac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Wendet man hierauf die $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineare Abbildung ω an und benutzt die Voraussetzungen $\varphi(p) = 1$ und $a_i(p) = 0$, so ergibt sich

$$\omega(X)(p) \ = \ (1 - \varphi^2)(p)\omega(X)(p) + \sum \varphi a_i \cdot \omega(\varphi \tfrac{\partial}{\partial x_i}) \ = \ 0 \ .$$

$\square$

7.4 Differentialformen in lokalen Koordinaten

Sei (U, x) eine Karte um $p \in M$. Dann sind für jeden Punkt $p \in M$ die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$, $i = 1, \ldots, n$ eine Basis in T_pM. Die dazu duale Basis in T_p^*M bezeichnet man mit $dx_i(p)$. Über U hat man also

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(U), \qquad dx_i \in \Omega^1(U) \qquad \text{mit} \quad dx_i(\tfrac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij} \ .$$

Damit schreibt sich jede Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ lokal über U als:

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \ldots i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \ ,$$

wobei $\omega_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ glatte Funktionen sind, die sich berechnen lassen durch

$$\omega_{i_1,\ldots,i_k} = \omega(\tfrac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_{i_k}}) \ .$$

7.5 Das Zurückziehen von Differentialformen

Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und sei $\omega \in \Omega^k(N)$. Dann erhält man mittels Zurückziehen eine k-Form $f^*\omega$ auf M, die definiert ist durch

$$(f^*\omega)_p(X_1, \ldots, X_k) = \omega_{f(p)}(df(X_1), \ldots . df(X_k))$$

für Tangentialvektoren $X_i \in T_pM$, d.h. $(f^*\omega)_p = ((df)^*\omega)_p$. Es übertragen sich nun die Eigenschaften, die für das Zurückziehen mittels linearer Abbildungen von Formen auf Vektorräumen gelten. Insbesondere:

Lemma 7.11 *Seien α, β Differentialformen auf M und seien $f : M \to N, g : N \to P$ differenzierbare Abbildungen, dann gilt*

1. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
2. $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$

7.6 Das Differential

Jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, also jede 0-Form auf M, definiert eine 1-Form df, die sich in lokalen Koordinaten schreibt als

$$df = \sum \tfrac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i \ .$$

Es soll nun gezeigt werden, dass sich das Differential fortsetzt zu einer Folge linearer Abbildungen

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \ldots$$

Satz 7.12 *Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M existiert genau eine Abbildung, das* Differential $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *d ist $\mathbb{R}$-linear*
2. *Für $f \in \Omega^0(M)$ und $X \in \chi(M)$ gilt $df(X) := X(f)$.*

3. $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

4. $d^2 = 0$

5. Die Abbildung d *ist eine Anti-Derivation, d.h.*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$$

für $\alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^*(M)$

Beweis: Man zeigt zunächst die Eindeutigkeit und dann die Existenz durch eine lokale Formel. Als erstes soll gezeigt werden, dass das Differential durch die Eigenschaften 1. - 5. auf 1-Formen eindeutig festgelegt ist. Genauer gilt für eine 1-Form ω und beliebige Vektorfelder X, Y die wichtige Formel

$$d\omega(X,Y) = L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \ . \tag{7.11}$$

Dabei bezeichnet L_X die Lie-Ableitung einer Funktion in Richtung eines Vektorfeldes X, d.h. $L_X(f) = df(X) = X(f)$. Die Funktion f ist hier $\omega(Y)$. Mit dieser Formel ist dann d eindeutig auf 0- und 1-Formen eindeutig festgelegt.

Nun zum Beweis von Gleichung (7.11). Zunächst gilt die Gleichung für 1-Formen $\omega = df$. Linke Seite: $d\omega = d(df) = 0$. Rechte Seite:

$$L_X(df(Y)) - L_Y(df(X)) - df([X,Y]) = L_X(L_Y(f)) - L_Y(L_X(f)) - L_{[X,Y]}(f) = 0 \ ,$$

nach Definition des Kommutators $[X,Y]$. Die Gleichung (7.11) gilt auch für alle 1-Formen $\omega = g\alpha$, wobei g eine beliebige Funktion und α eine 1-Form ist, für die die Gleichung erfüllt ist. Linke Seite:

$$\begin{aligned} d(g\alpha)(X,Y) &= (dg \wedge \alpha + g \wedge d\alpha)(X,Y) = dg(X)\alpha(Y) - dg(Y)\alpha(X) + gd\alpha(X,Y) \\ &= L_X(g)\alpha(Y) - L_Y(g)\alpha(X) + gd\alpha(X,Y) \ . \end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} L_X(g\alpha(Y)) & - L_Y(g\alpha(X)) - g\alpha([X,Y]) = L_X(g)\alpha(Y) + gL_X(\alpha(Y)) - L_Y(g)\alpha(X) \\ & \qquad - gL_Y(\alpha(X)) - g\alpha([X,Y]) \\ &= g(L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y])) + L_X(g)\alpha(Y) - L_Y(g)\alpha(X) \\ &= gd\alpha(X,Y) + L_X(g)\alpha(Y) - L_Y(g)\alpha(X) \ . \end{aligned}$$

Damit gilt Gleichung (7.11) für alle 1-Formen. Denn lokal schreibt sich jede 1-Form ω als $\omega = \sum \omega_i dx_i$ und für die einzelnen Summanden wurde die Gleichung gerade bewiesen.

Sei $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ eine lineare Abbildung, definiert auf 0- bzw. 1-Formen durch $df(X) = X(f)$ für $f \in \Omega^0(M)$ und $d\omega$ wie in Gleichung (7.11) für $\omega \in \Omega^1(M)$. Dann erfüllt d die Eigenschaften 1. - 5. auf 0-bzw. 1-Formen.

Die Eigenschaften 1. - 3. sind nach Voraussetzung erfüllt. Für die Eigenschaft 5. hat man zwei Fälle zu beweisen. Zunächst seien $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dann berechnet man

$$d(f\cdot g)(X) = L_X(f\cdot g) = L_X(f)\cdot g + f\cdot L_X(g) = df(X)\cdot g + f\cdot dg(X) = (df\wedge g + f\wedge dg)(X)\,,$$

wobei natürlich normalerweise $f \wedge dg$ kurz als $f \cdot dg$ geschrieben wird.

Als nächstes sei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $\omega \in \Omega^1(M)$ dann gilt

$$\begin{aligned} d(f\wedge\omega)(X,Y) &= d(f\cdot\omega)(X,Y) = L_X(f\cdot\omega(Y)) - L_Y(f\cdot\omega(X)) - f\,\omega([X,Y]) \\ &= L_X(f)\cdot\omega(Y) + f\cdot L_X(\omega(Y)) - (L_Y(f))\cdot\omega(X) - f\cdot L_Y(\omega(X)) \\ &\qquad - f\,\omega([X,Y]) \\ &= df(X)\cdot\omega(Y) - df(Y)\cdot\omega(X) + f\,d\omega(X,Y) \\ &= (df\wedge\omega + f\wedge d\omega)(X,Y) \end{aligned}$$

Schließlich bleibt noch die Eigenschaft 4., also $d^2 = 0$ auf Funktionen zu überprüfen. Man rechnet hier

$$d(df)(X,Y) = L_X(df(Y)) - L_Y(df(X)) - df([X,Y]) = L_XL_Y(f) - L_YL_X(f) - L_{[X,Y]}(f) = 0$$

nach der Definition des Kommutators $[X,Y]$ zweier Vektorfelder X, Y.

Sei (U,x) eine beliebige Karte auf M und $\omega \in \Omega^k(M)$. Dann schreibt sich ω lokal auf U als

$$\omega = \sum \omega_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$$

für gewisse glatte Funktionen $\omega_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Aus den Eigenschaften 1. - 5. folgt nun, dass $d\omega$ notwendigerweise auf U gegeben ist durch

$$d\omega = \sum d\omega_{i_1,\ldots,i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\,. \tag{7.12}$$

Umgekehrt kann man diese Gleichung auch für die Definition des Differentials d benutzen. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit des Differentials gezeigt. Es bleibt noch zu zeigen: (i) $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$, d.h. man kann das Differential wirklich lokal definieren. (ii) Definiert man das Differential d durch Gleichung (7.12) dann ist d unabhängig von der Wahl der Koordinaten und erfüllt die Eigenschaften 1. - 5.

Zum Beweis der Koordinatenunabhängigkeit im Fall von 1-Formen. Der Fall bliebigen Grades geht analog. Seien (U,x) und (V,y) zwei Karten um $p \in M$. Eine 1-Form ω schreibe sich lokal als $\omega = \sum f_i dx_i = \sum h_j dy_j$. Dann gilt $dy_j = \sum \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i$ und daraus folgt $f_i = \sum \frac{\partial y_j}{\partial x_i} h_j$. Setzt man dies in die Definition von $d\omega$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum df_i\wedge dx_i &= \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k\wedge dx_i = \sum \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i\,\partial x_k}\, h_j\, dx_k\wedge dx_i + \sum \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\,\frac{\partial h_j}{\partial x_k}\, dx_k\wedge dx_i \\ &= \sum dh_j\wedge dy_j\,. \end{aligned}$$

Hierbei verschwindet der Summand mit den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, da $\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i\,\partial x_k}$ nach dem Satz von Schwarz symmetrisch in i und k ist, während $dx_k\wedge dx_i$ schiefsymmetrisch ist. □

7.7 Symplektische Mannigfaltigkeiten

Eine symplektische Mannigfaltigkeit ist eine gerade-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer geschlossenen, nicht ausgearteten 2-Form. Wir betrachten zunächst nicht ausgeartete 2-Formen auf Vektorräumen.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und ω eine 2-Form auf V. Für ω gibt es eine (nicht eindeutige) ausgezeichnete Basis von V: Wir definieren einen Unterraum $U \subset V$ durch

$$U = \{u \in V \mid \omega(u, v) = 0 \text{ für alle } v \in V\}.$$

Sei W ein komplementärer Unterraum zu U, so dass $V = U \oplus W$.

Lemma 7.13 *Der Unterraum W ist gerade-dimensional und hat eine Basis aus Vektoren $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$, so dass*

$$\begin{aligned} \omega(e_i, e_j) &= 0 = \omega(f_i, f_j) \\ \omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

für alle i, j.

Beweis: Sei $e_1 \in W$ ungleich Null. Dann gibt es ein $f_1 \in V$, so dass $\omega(e_1, f_1) = 1$. OBdA können wir annehmen, dass f_1 keine U-Komponente hat und deshalb in W liegt. Sei W_1 der Spann von e_1 und f_1 und

$$W_1^\omega = \{u \in W \mid \omega(u, v) = 0 \text{ für alle } v \in W_1\}.$$

Es gilt $W = W_1 \oplus W_1^\omega$: Die Zerlegung eines beliebigen Elements $u \in W$ in die Komponenten ist gegeben durch

$$u = \omega(e_1, u)f_1 + \omega(u, f_1)e_1 + (u - \omega(e_1, u)f_1 - \omega(u, f_1)e_1).$$

Wir wenden jetzt das gleiche Argument auf W_1^ω an. Induktiv bekommen wir so die Basis e_i, f_j. □

Definition 7.14 *Sei V ein reeller Vektorraum. Eine 2-Form ω auf V heißt* nicht ausgeartet*, falls der oben definierte Unterraum $U \subset V$ nur aus der Null besteht.*

Insbesondere ist dann $V = W$. Damit können nicht-ausgeartete 2-Formen nur auf gerade-dimensionalen Vektorräumen existieren.

Lemma 7.15 *Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $2n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Eine 2-Form ω ist nicht ausgeartet.*
2. *Für jeden Vektor $u \neq 0$ in V gibt es einen Vektor v, so dass $\omega(u, v) \neq 0$.*
3. *ω ist von der Form*
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \wedge \beta_i$$
für eine geeignete Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ von V^*.

4. $\omega^n := \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ *ist eine nicht-verschwindende* $2n$*-Form.*

5. ω *definiert einen Isomorphismus* $I\colon V \to V^*$*, durch* $I(v) = \omega(v, \cdot)$*.*

Definition 7.16 *Sei* M *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Differentialform* $\eta \in \Omega^k(M)$ *heißt* geschlossen*, falls* $d\eta = 0$*. Eine 2-Form* $\omega \in \Omega^2(M)$ *heißt* nicht ausgeartet*, falls* $\omega_p \in \Lambda^2 T_p^* M$ *für alle* $p \in M$ *nicht ausgeartet ist.*

Bemerkung: Eine Differentialform η heißt *exakt*, falls $\eta = d\theta$ für eine Differentialform θ. Jede exakte Form ist geschlossen wegen $d^2 = 0$, die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Definition 7.17 *Eine* symplektische Form *auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* M *ist eine 2-Form* $\omega \in \Omega^2(M)$*, die geschlossen und nicht ausgeartet ist.*

Bemerkung: Existiert auf M eine nicht ausgeartete oder symplektische 2-Form, dann muß die Dimension von M gerade sein.

Definition 7.18 *Zwei symplektische Mannigfaltigkeiten* (M, ω_M) *und* (N, ω_N) *heißen* symplektomorph*, falls es einen Diffeomorphismus* $f\colon M \to N$ *gibt mit* $f^*\omega_N = \omega_M$*.*

Beispiel: Auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ betrachtet man die Koordinaten $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$. Die kanonische symplektische Form auf $\mathbb{R}^{2n}$ ist definiert durch

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

Die 2-Form ω_0 ist offensichtlich geschlossen und nicht ausgeartet. Wegen $\omega_0 = d\theta$ mit $\theta = \sum q_i dp_i$ ist ω_0 exakt.

Der Satz von Darboux besagt, dass jede symplektische Mannigfaltigkeit lokal symplektomorph zu $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ist:

Theorem 7.19 (Darboux) *Sei* (M, ω) *eine symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension* $2n$*. Dann gibt es um jeden Punkt eine Karte* (U, x) *mit den Koordinaten gegeben durch* $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$*, so dass*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

Diese Koordinaten heißen Darboux-Koordinaten.

Beispiel: Sei X eine beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann ist T^*X eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Auf T^*X existiert eine kanonische symplektische Form ω. Diese Form ist exakt, d.h. $\omega = d\theta$ für eine gewisse 1-Form θ.

Bemerkung: Auf geschlossenen, d.h. kompakten Mannigfaltigkeiten ohne Rand, sind symplektische Formen nie exakt.

Beispiel: Das Produkt $M \times N$ von symplektischen Mannigfaltigkeiten (M, ω_M) und (N, ω_N) ist symplektisch: Mit den kanonischen Projektionen π_M und π_N auf die Faktoren definiert man

$$\omega = \pi_M^* \omega_M + \pi_N^* \omega_N.$$

Dann ist ω eine symplektische Form auf $M \times N$.

Beispiel: Sei Σ_g eine orientierbare Fläche vom Geschlecht g. Wir werden später sehen, dass Σ_g eine Volumenform ω hat, d.h. eine 2-Form, die in jedem Punkt ungleich Null ist. Da $d\omega = 0$ aus Gradgründen, ist ω eine symplektische Form. Also sind alle orientierbare Flächen und beliebige Produkte von ihnen symplektisch. Das gilt insbesondere für $S^2 \times \ldots \times S^2$ und $T^{2n} = T^2 \times \ldots \times T^2$.

Beispiel: Die komplex projektiven Räume $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ sind für alle $n \geq 1$ symplektisch. Allgemeiner sind alle glatten algebraischen Varietäten in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ symplektisch.

Man kann die klassische Hamiltonmechanik durch symplektische Geometrie beschreiben. Der Phasenraum eines klassischen Systems ist eine symplektische Mannigfaltigkeit und die (q, p)-Koordinaten sind die Orts- und Impulskoordinaten.

Definition 7.20 *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Wir definieren das* Hamilton-Vektorfeld X_H *zu einer Funktion $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ durch die Gleichung*

$$\omega(X_H, \cdot) = dH.$$

Unter dem Isomorphismus $I \colon TM \to T^*M$ gilt $I(X_H) = dH$. D.h. für beliebige Vektorfelder $Y \in \mathfrak{X}(M)$ soll gelten

$$\omega(X_H, Y) = dH(Y) = L_Y H.$$

Die Funktion H heißt Hamilton-Funktion.

Die Zeitentwicklung des Zustands eines klassischen Systems ist gegeben durch die Integralkurven des Hamilton-Vektorfeldes.

Satz 7.21 *Sei (M^{2n}, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und sei $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann gilt in Darboux-Koordinaten (U, x) mit $x = (q, p)$ für das Hamilton-Vektorfeld:*

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

Sei $\gamma\colon I \to M$ eine glatte Kurve mit

$$x(\gamma(t)) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)).$$

Dann ist γ genau dann eine Integralkurve von X_H, wenn

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \text{für} \qquad i = 1, \dots, n \qquad \text{erfüllt ist .}$$

Beweis: In den Darboux-Koordinaten (U, x) mit $x = (q, p)$ gilt $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$ und damit

$$\omega(\tfrac{\partial}{\partial q_i}, \tfrac{\partial}{\partial p_j}) = -\omega(\tfrac{\partial}{\partial p_j}, \tfrac{\partial}{\partial q_i}) = \delta_{ij}.$$

Auf U existieren glatte Funktionen a_i und $b_i, i = 1, \dots, n$ mit

$$X_H = \sum a_i \tfrac{\partial}{\partial q_i} + b_j \tfrac{\partial}{\partial p_j}.$$

Aus der Definition des Hamilton-Vektorfeldes X_H folgt

$$\tfrac{\partial H}{\partial q_i} = \omega(X_H, \tfrac{\partial}{\partial q_i}) = -b_i, \qquad \tfrac{\partial H}{\partial p_i} = \omega(X_H, \tfrac{\partial}{\partial p_i}) = a_i.$$

Daraus folgt die Formel für X_H. In den Darboux-Koordinaten (U, x) gilt außerdem $\dot{\gamma}(t) = \sum \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i}$. Vergleicht man das mit der gerade bewiesenen Formel für X_H, dann sieht man, dass $\dot{\gamma}(t) = X_H$ genau dann gilt, wenn die beiden angegebenen Differentialgleichungen erfüllt sind.

□

Bemerkung: Die kanonischen Bewegungsgleichungen der Hamiltonschen Mechanik sind genau die Gleichungen der Integralkurven des Hamilton-Vektorfeldes X_H (Satz von Hamilton).

Bemerkung: Etwas später wird die Lie-Ableitung einer Differentialform $\alpha \in \Omega^k(M)$ nach einem Vektorfeld X definiert. Man hat $L_X\alpha = \frac{d}{dt}\varphi_t^*\,\alpha$, wobei φ_t der Fluß von X ist und es gilt die fundamentale Cartan Formel

$$L_X\alpha = d\,(\alpha(X, \cdot)) \;+\; (d\alpha)(X, \cdot).$$

Im ersten Summanden steht das Differential der $(k-1)$-Form $\alpha(X, \cdot)$ und im zweiten Summanden steht die k-Form, die man erhält, wenn man X in die $(k+1)$-Form $d\alpha$ einsetzt.

Die Diffeomorphismen von M, die durch den Fluß von X_H gegeben sind, sind Symplektomorphismen:

Satz 7.22 (Satz von Liouville) *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und die Funktion $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ habe ein vollständiges Hamilton-Vektorfeld X_H, d.h. der Fluß φ_t von X_H sei für alle Zeiten t definiert. Dann gilt*

$$\varphi_t^*\,\omega = \omega,$$

d.h. φ_t ist für alle t ein Symplektomorphismus. Das Tripel (M, ω, H) nennt man Hamilton-System.

Beweis: Nach der Cartan Formel gilt

$$L_{X_H}\omega = d\left(\omega(X_H,\cdot)\right) \; + \; (d\omega)(X_H,\cdot).$$

Die Gleichung $\varphi_t^*\omega = \omega$ gilt nun für alle t genau dann, wenn $L_{X_H}\omega = 0$, also nach der angegebenen Formel und da ω geschlossen ist, genau dann, wenn $d(\omega(X_H,\cdot)) = 0$, bzw. nach der Definition von X_H, genau dann, wenn $d(dH) = 0$, was aber wegen $d^2 = 0$ immer erfüllt ist. $\square$

Bemerkung: Die kanonische Volumenform einer symplektischen Mannigfaltigkeit ist gegeben durch $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$. Aus dem Satz von Liouville folgt, dass der Fluß des Hamilton-Vektorfeldes das Volumen im Phasenraum erhält.

Auf symplektischen Mannigfaltigkeiten besitzt der Raum der glatten Funktionen die Struktur einer Lie-Algebra. Diese soll im Folgenden beschrieben werden.

Definition 7.23 *Für Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M,ω) definiert man die* Poisson-Klammer $\{f, g\}$ *durch*

$$\{f,g\} = -\omega(X_f, X_g).$$

Satz 7.24 *Die Poisson-Klammer hat folgende Eigenschaften:*

1. $\{f,g\} = -\{g,f\}$
2. $\{\cdot,\cdot\}$ *ist* $\mathbb{R}$*-bilinear*
3. $\{f,\{g,h\}\} \; + \; \{g,\{h,f\}\} \; + \; \{h,\{f,g\}\} \; = \; 0$
4. $\{f, g\cdot h\} \; = \; g\cdot\{f,h\} \; + \; h\cdot\{f,g\}$
5. *Die Abbildung $H \mapsto X_H$ ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren, d.h. es gilt*

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$$

6. *In Darboux-Koordinaten gilt:*

$$\{f,g\} \; = \; \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \; - \; \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

Definition 7.25 *Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ heißt* Erhaltungsgröße *des Hamiltonsystems (M,ω,H), falls f konstant ist auf den Integralkurven von X_H. Erhaltungsgrössen nennt man auch* erste Integrale. *Der Raum der Erhaltungsgrößen eines Hamiltonsystems (M,ω,H) wird mit $\mathcal{E}(H)$ bezeichnet.*

Satz 7.26 *Sei (M, ω, H) ein Hamiltonsystem. Dann gilt für den Raum der Erhaltungsgrößen:*

1. *Der Raum der Erhaltungsgrößen $\mathcal{E}(H)$ ist ein reeller Vektorraum.*
2. *$f \in \mathcal{E}(H)$ genau dann, wenn $\{f, H\} = 0$ gilt.*
3. *Sind $f, g \in \mathcal{E}(H)$ dann gilt auch $\{f, g\} \in \mathcal{E}(H)$ d.h. der Raum der Erhaltungsgrößen ist eine Lie-Algebra, genauer eine Unteralgebra von $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$*

Beweis: Die erste Aussage ist offensichtlich. Sei $c_p(t) = \varphi_t(p)$ die Integralkurve von X_H durch p. Dann gilt $f \in \mathcal{E}(H)$ genau dann, wenn $f(c_p(t)) = f(p)$ für alle p und alle t gilt. Bildet man die Ableitung, so findet man, dass diese Gleichung genau dann gilt, wenn $L_{X_H} f = 0$ gilt und damit genau dann, wenn $\{f, H\} = 0$ erfüllt ist. Denn nach Definition hat man $L_{X_H} f = df(X_H) = \omega(X_f, X_H) = \{H, f\}$. Das beweist die zweite Aussage.
Nun zur dritten Aussage. Seien $f, g \in \mathcal{E}(H)$, d.h. wie gerade gezeigt $\{f, H\} = 0 = \{g, H\}$. Dann folgt aus Gleichung (3) in Satz 7.24

$$\{f, g\} \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow \{\{f, g\}, H\} = 0 \Leftrightarrow \{\{g, H\}, f\} + \{\{H, f\}, g\} = 0 \ ,$$

was aber nach Voraussetzung erfüllt ist. □

Der Satz von Noether besagt, dass zu jeder Symmetrie eines Hamiltonsystems eine Erhaltungsgröße gehört. Genauer gesagt gilt

Satz 7.27 (Satz von Noether) *Sei (M, ω, H) ein Hamiltonsystem mit $\omega = d\theta$, für eine geeignete 1-Form θ und sei $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ein vollständiges Vektorfeld, dessen Fluß φ_t das Hamiltonsystem erhält, d.h. es gelte $\varphi_t^* \theta = \theta$ und $\varphi_t^* H = H$. Dann gilt*

$$\theta(Y) \in \mathcal{E}(H).$$

Beweis: Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt zunächst $L_Y \theta = 0$ und $L_Y H = 0$. Setzt man das in die Formel für die Lie-Ableitung $L_Y \theta$ ein, so folgt mit $f = \theta(Y)$

$$\begin{aligned} 0 &= (L_Y \theta)(X_H) \\ &= (d\theta)(Y, X_H) + d(\theta(Y))(X_H) \\ &= \omega(Y, X_H) + df(X_H) \\ &= -L_Y H + \omega(X_f, X_H) \\ &= \{H, f\}, \end{aligned}$$

d.h. $f = \theta(Y) \in \mathcal{E}(H)$. □

7.8 Lie-Ableitung von Differentialformen

Sei X ein Vektorfeld mit lokalem Flus φ_t, d.h. $\varphi_t : U \subset M \to M$ definiert durch

$$\varphi_t(p) = c_p(t), \qquad \varphi_0(p) = p, \qquad \dot{\varphi}_t(p) = X_{\varphi_t(p)}.$$

Die Lie-Ableitung einer Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist gegeben durch

$$L_X(f)_p = \mathrm{d}f(X_p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \varphi_t^* f(p),$$

wobei $\varphi_t^* f(p) = f \circ \varphi_t(p)$.

Die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes $Y \in \chi(M)$ ist gegeben durch

$$L_X Y_p = [X, Y]_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (\varphi_t^* Y)_p,$$

wobei $\varphi_t^* Y_p = \mathrm{d}\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(p)})$.

Definition 7.28 *Die* Lie-Ableitung *einer Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ nach einem Vektorfeld $X \in \chi(M)$ ist definiert durch*

$$L_X \omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \varphi_t^* \omega,$$

wobei $\varphi_t^* \omega(X_1, \ldots, X_k) = \omega_{\varphi_t(\cdot)}(\mathrm{d}\varphi_t X_1, \ldots, \mathrm{d}\varphi_t X_k)$.

Lemma 7.29 *1. Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ und $X, Y \in \chi(M)$, dann gilt*

$$(L_X \omega) Y = L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y).$$

2. Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $X, X_1, \ldots, X_k \in \chi(M)$, dann gilt

$$(L_X \omega)(X_1, \ldots, X_k) = L_X(\omega(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_i \omega(\ldots, L_X X_i, \ldots)$$

3. $L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X \beta)$.

4. $L_X(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}L_X \omega$.

Beweis: Zu 1.

$$\begin{aligned}
L_X \omega(Y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \varphi_t^*(\omega(Y)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \omega(Y) \circ \varphi_t \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \omega(\mathrm{d}\varphi_t \circ \mathrm{d}\varphi_{-t} Y) \circ \varphi_t \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \omega(\mathrm{d}\varphi_t(\varphi_t^* Y)) \circ \varphi_t \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (\varphi_t^* \omega)(\varphi_t^* Y) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \varphi_t^* \omega(Y) + \omega\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \varphi_t^* Y\right) \\
&= (L_X \omega) Y + \omega(L_X Y).
\end{aligned}$$

Zu 3.

$$\begin{aligned}
L_X(\alpha\wedge\beta) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_t^*(\alpha\wedge\beta) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_t^*(\alpha)\wedge\varphi_t^*(\beta)\\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_t^*(\alpha)\right)\wedge\beta+\alpha\wedge\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_t^*(\beta)\right)\\
&= (L_X\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(L_X\beta).
\end{aligned}$$

Zu 4.

$$L_X\mathrm{d}\omega = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_t^*\mathrm{d}\omega = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{d}(\varphi_t^*\omega) = \mathrm{d}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\varphi_t^*\omega\right) = \mathrm{d}L_X\omega.$$

□

Definition 7.30 *Sei $\omega\in\Omega^k(M)$, $X\in\chi(M)$, dann ist die* Kontraktion *(oder* inneres Produkt*) von ω mit X folgendermaßen definiert*

$$(i_X\omega)(X_1,\ldots,X_{k-1}) = \omega(X,X_1,\ldots,X_{k-1}).$$

Man schreibt auch $i_X\omega = X\lrcorner\,\omega$,

$$i_X:\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M).$$

Bemerkung: Sei V ein Vektorraum und $v\in V$, dann ist

$$i_v:\Lambda^kV^*\to\Lambda^{k-1}V^*$$

die zu $u\mapsto v\wedge u$ duale Abbildung, d.h.

$$\langle i_v\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha,v^*\wedge\beta\rangle, \qquad v^*(u)=\langle v,u\rangle.$$

Das Skalarprodukt auf Λ^kV^* ist dadurch festgelegt, dass

$$e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$$

eine ONB für Λ^kV^* ist für eine ONB $\{e_i\}$ von V.

Lemma 7.31 *1. $i_X(f\omega)=fi_X\omega$.*

2. $i_X(\alpha\wedge\beta)=(i_X\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge i_X\beta$ für $\alpha\in\Omega^k(M)$ und $\beta\in\Omega^*(M)$.

3. $i_X(\mathrm{d}f)=\mathrm{d}f(X)$, falls $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$.

4. $i_X^2=0$.

Satz 7.32 *Sei $\omega\in\Omega^*(M)$ und $X\in\chi(M)$. Dann gilt*

$$L_X\omega = i_X\mathrm{d}\omega+\mathrm{d}i_X\omega. \tag{*}$$

Beweis: *(*) gilt auf 0-Formen*: Sei also $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann ist $L_X f = \mathrm{d}f(X)$ und $i_X f = 0$. Somit gilt

$$i_X \mathrm{d}f + \mathrm{d}i_X f = i_X \mathrm{d}f = \mathrm{d}f(X) = L_X f.$$

(*) gilt auf 1-Formen: Sei also $\omega \in \Omega^1(M)$, dann ist

$$\begin{aligned}(i_X \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega)(Y) &= \mathrm{d}\omega(X,Y) + (\mathrm{d}\omega(X))(Y) \\ &= L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) + L_Y(\omega(X)) \\ &= L_X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]) = (L_X\omega)(Y).\end{aligned}$$

Sei nun $P_X = i_X \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega$. Wir zeigen, dass P_X eine Derivation ist, d.h.

$$P_X(\alpha \wedge \beta) = P_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge P_X(\beta).$$

Da $P_X = L_X$ auf 0- und 1-Formen, folgt somit die Behauptung.
Sei also $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^*(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}P_X(\alpha \wedge \beta) &= i_X \mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) + \mathrm{d}i_X(\alpha \wedge \beta) \\ &= i_X((\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\mathrm{d}\beta)) + \mathrm{d}((i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X\beta) \\ &= (i_X \mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1}\mathrm{d}\alpha \wedge i_X\beta + (-1)^k i_X\alpha \wedge \mathrm{d}\beta + (-1)^{2k}\alpha \wedge i_X\mathrm{d}\beta \\ &+ (\mathrm{d}i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1}(i_X\alpha) \wedge \mathrm{d}\beta + (-1)^k \mathrm{d}\alpha \wedge i_X\beta + (-1)^{2k}\alpha \wedge \mathrm{d}i_X\beta \\ &= ((i_X\mathrm{d}\alpha) + (\mathrm{d}i_X\alpha)) \wedge \beta + \alpha \wedge (i_X\mathrm{d}\beta + \mathrm{d}i_X\beta) \\ &= P_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge P_X(\beta).\end{aligned}$$

□

Für eine k-Form ω haben wir somit nach obigem Satz

$$\mathrm{d}\omega(X, X_1, \ldots, X_k) = (L_X\omega)(X_1, \ldots, X_k) - \mathrm{d}(i_X\omega)(X_1, \ldots, X_k).$$

Iteration dieses Arguments liefert die

Folgerung 7.33 *Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $X_0, \ldots, X_k \in \chi(M)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X_0, \ldots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i L_{X_i}(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k),\end{aligned}$$

wobei $\hat{X}_i$ bedeutet, dass der entsprechende Eintrag ausgelassen wird.

Bemerkung: Diese Formel hätte auch zur Definition von d benutzt werden können. Sie gibt einen koordinatenfreien Ausdruck für das Differential, ist allerdings sehr umständlich für Beweise.

Beispiele:

1. Sei $\omega \in \Omega^1(M)$, so ist

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

2. Sei $\omega \in \Omega^2(M)$, so ist

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X,Y,Z) &= L_X(\omega(X,Y)) - L_Y(\omega(X,Z)) + L_Z(\omega(Y,Z)) \\ &\quad - \omega([X,Y],Z) + \omega([X,Z],Y) - \omega([Y,Z],X).\end{aligned}$$

7.9 Die de Rahm - Kohomologie

Bemerkung: $\mathrm{d}^2 = 0$ entspricht der Aussage, dass die gemischten partiellen Ableitungen gleich sind (Satz von Schwarz); eine andere Interpretation führt auf die de Rham Kohomologie.

Definition 7.34 *1. $\alpha \in \Omega^*(M)$ heißt* geschlossen*, falls $\mathrm{d}\alpha = 0$.*

2. $\alpha \in \Omega^*(M)$ heißt exakt*, falls $\alpha = \mathrm{d}\beta$ für ein $\beta \in \Omega^*(M)$.*

Bemerkung: Es gilt $\operatorname{im}(\mathrm{d} : \Omega^{k-1} \to \Omega^k) \subset \ker(\mathrm{d} : \Omega^k \to \Omega^{k+1})$ und somit ist jede exakte Form geschlossen. D.h. $\mathrm{d}\omega = 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung

$$\omega = \mathrm{d}\eta, \qquad \eta \in \Omega^*(M).$$

Beispiel: Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\omega = \sum_i \omega_i \mathrm{d}x_i$ mit $\omega_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Gesucht ist nun eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\omega = \mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i.$$

Nun ist $\omega = \mathrm{d}f$ äquivalent zu

$$\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{*}$$

Eine notwendige Bedingung dafür ist $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}^2 f = 0$,

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \tag{**}$$

Bemerkung: Aus dem Satz von Frobenius aus der Analysis folgt, (*) $\Leftrightarrow$ (**), d.h. auf $\mathbb{R}^n$ ist jede geschlossene 1-Form bereits exakt.

Beispiele:

1. Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ mit $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ geschlossen. Es gilt also

   $$\mathrm{d}\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

   Gesucht ist nun $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\omega = \mathrm{d}\alpha$. Setzen wir

   $$\alpha(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x, t)\mathrm{d}t,$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\mathrm{d}y = \left(f(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_x g(x,t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \left(f(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_y f(x,t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y \\
&= f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y = \omega,
\end{aligned}$$

nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

2. Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

dann ist ω geschlossen. Um dies einzusehen führen wir Polarkoordinaten ein

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \mathrm{d}(r\cos\varphi) = \cos\varphi \mathrm{d}r - r\sin\varphi \mathrm{d}\varphi, \\
\mathrm{d}y &= \mathrm{d}(r\sin\varphi) = \sin\varphi \mathrm{d}r + r\cos\varphi \mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}$$

Dann ist $\omega = \mathrm{d}\varphi$ und offensichtlich geschlossen. ω ist jedoch nicht exakt, denn

$$\int_\gamma \omega = 2\pi, \qquad \text{für } \gamma \text{ die Kreislinie.}$$

Und das Integral über exakte Formen entlang geschlossener Kurven verschwindet.

Definition 7.35 *Die* de Rahm-Kohomologie *ist definiert durch*

$$\begin{aligned}
H^k_{dR}(M) &= \ker(\mathrm{d}: \Omega^k \to \Omega^{k+1}) / \mathrm{im}\,(\mathrm{d}: \Omega^{k-1} \to \Omega^k) \\
&= \textit{Menge der Äquivalenzklassen geschlossener Formen.}
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Alle $H^k_{dR}(M)$ sind Vektorräume.
2. $H^k_{dR}(M) = \{0\}$, falls $k > \dim M$.
3. $H^k_{dR}(M)$ sind topologische Invarianten.
4. $H^k_{dR}(M) = \{0\}$ genau dann, wenn jede geschlossene k-Form auch exakt ist.
5. $H^0_{dR}(M) = \{f \mid \mathrm{d}f = 0\} = \{f \mid f \text{ lokal konstant}\} = \mathbb{R}^r$, falls r die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M ist.

6. $\{H^k_{dR}(M)\}$ ist ein Spezialfall folgender Situation: Man hat eine Folge von Vektorräumen (V_k) mit linearen Abbildungen

$$d_k : V_k \to V_{k+1}, \qquad d_k \circ d_{k-1} = 0.$$
$$\ldots \longrightarrow V_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} V_k \xrightarrow{d_k} V_{k+1} \longrightarrow \ldots \qquad (V)$$

   Man definiert nun die Kohomologie des Komplexes (V) als

$$H^k(V) = \ker d_k / \operatorname{im} d_{k-1}.$$

7. Ist M kompakt, zusammenhängend und orientierbar, so ist $H^n_{dR}(M) = \mathbb{R}$.
8. $H^k_{dR}(S^n) = \{0\}$ für $0 < k < n$.
9. $H^1_{dR}(T^2) = \mathbb{R}^2$, $H^1_{dR}(S^1) = \{0\}$ und folglich ist $T^2 \neq S^2$.

Definition 7.36 *Eine Mannigfaltigkeit M heißt* kontrahierbar *auf $p_0 \in M$, falls eine differenzierbare Abbildung*

$$H : M \times I \to M, \qquad I = [0, 1]$$

existiert mit

1. $H(p, 1) = p, \qquad \forall p \in M,$

2. $H(p, 0) = p_0, \qquad \forall p \in M.$

D.h. es gibt eine differenzierbare Homotopie zwischen der Identität auf M und der konstanten Abbildung $p \mapsto p_0$.

Lemma 7.37 (Lemma von Poincare) *Sei M eine kontrahierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

$$H^k_{dR}(M) = \{0\}, \qquad k > 0.$$

Beispiele:

1. Sternförmige Mengen sind kontrahierbar.
2. $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar.

7.10 Bemerkungen zu rot, grad und div

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Definition 7.38 *Das* Gradientenvektorfeld *von f ist definiert als*

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Bemerkungen:

1. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Dieses überträgt sich auf $T_p\mathbb{R}^n$ und es ist
$$\langle \operatorname{grad} f, X \rangle = \mathrm{d}f(X).$$
Man definiert nun mit Hilfe des Skalarproduktes (später werden wir dieses durch die Metrik ersetzen) folgende Abbildung
$$^* : \chi(\mathbb{R}^n) \to \Omega^1(\mathbb{R}^n), \qquad X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto X^* := \sum a_i \mathrm{d}x_i,$$
wobei $X^*(Y) = \langle X, Y \rangle$. Insbesondere ist dann $(\operatorname{grad} f)^* = \mathrm{d}f$.

2. Sei nun $n = 3$, dann definiert man den *Hodge-Operator*
$$* : \Omega^k(\mathbb{R}^3) \to \Omega^{3-k}(\mathbb{R}^3).$$
Für $k = 0$ ist $*$ gegeben als
$$\begin{aligned} * : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) &\to \Omega^3(\mathbb{R}^3), \\ f \quad &\mapsto *f = f \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3. \end{aligned}$$
Für $k = 1$ ist $*$ gegeben als
$$\begin{aligned} * : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \quad &\to \Omega^2(\mathbb{R}^3), \\ \omega = \sum a_i \mathrm{d}x_i \; &\mapsto *\omega = a_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + a_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

3. $*^2 = \mathrm{id}$.

Für alles Weitere beschränken wir uns auf den $\mathbb{R}^3$.

Lemma 7.39 *1.* $(\operatorname{grad} f)^* = \mathrm{d}f$.

2. $\mathrm{d}X^* = *((\mathrm{rot} X)^*)$.

3. $\mathrm{d}(*(X^*)) = *(\mathrm{div} X)$.

Beweis: 1. folgt direkt aus der Definition von $\operatorname{grad} f$ und der Charakterisierung von $(\operatorname{grad} f)^*$.

Zu 2.: Sei $X = \sum a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ mit $a_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X^* &= \mathrm{d}\left(\sum a_j \mathrm{d}x_j\right) = \sum \mathrm{d}a_j \wedge \mathrm{d}x_j = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\
&= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Zu 3.: Man rechnet direkt nach

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(*(X^*)) &= \mathrm{d}(a_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + a_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) \\
&= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
&= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = *(\mathrm{div} X).
\end{aligned}$$

□

Folgerung 7.40 *Für alle Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $X \in \chi(\mathbb{R}^3)$ gilt*

1. $\mathrm{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$,

2. $\mathrm{div}(\mathrm{rot} X) = 0$.

Beweis: 1: Es genügt zu zeigen, dass $*((\mathrm{rot}(\operatorname{grad} f))^*) = 0$, aber

$$*((\mathrm{rot}(\operatorname{grad} f))^*) = \mathrm{d}(\operatorname{grad} f)^* = \mathrm{d}^2 f = 0.$$

2: Es genügt zu zeigen, dass $*(\mathrm{div}(\mathrm{rot} X)) = 0$, aber

$$*(\mathrm{div}(\mathrm{rot} X)) = \mathrm{d}(*((\mathrm{rot} X)^*)) = \mathrm{d}^2 X^* = 0.$$

□

Bemerkung: $\mathrm{div}(\operatorname{grad} f)) = \Delta f$ ist der *Laplace-Operator.*

Folgerung 7.41 *Sei X ein Vektorfeld auf einer kontrahierbaren offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$. Dann gelten*

1. Ist $\mathrm{rot} X = 0$*, so existiert eine glatte Funktion $f : U \to R$ mit $X = \operatorname{grad} f$.*

2. Ist $\mathrm{div} X = 0$*, so existiert ein Vektorfeld $Y \in \chi(U)$ mit $X = \mathrm{rot} Y$.*

Beweis: 1: Ist $\mathrm{rot} X = 0$, so folgt $\mathrm{d}X^* = 0$. Nach dem Lemma von Poincare existiert nun eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, so dass $X^* = \mathrm{d}f$ und folglich $X = \operatorname{grad} f$.

2: Ist $\mathrm{div} X = 0$, so ist $\mathrm{d}(*(X^*)) = 0$ und folglich existiert eine Form $\eta \in \Omega^1$

$$\eta = Y_1 \mathrm{d}x_1 + Y_2 \mathrm{d}x_2 + Y_3 \mathrm{d}x_3,$$

so dass $*(X^*) = \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}Y^* = *(\mathrm{rot} Y)^*$. Somit ist $X = \mathrm{rot} Y$. □

7.11 Beispiel: Die Maxwell Gleichungen

Sei F eine 2-Form auf $\mathbb{R}^4$, d.h. $F = \sum_{i<j} F_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$, wobei $0 \leq i, j \leq 3$. Die 2-Form F beschreibt das elektro-magnetische Feld. Ausgehend von F erhält man zwei Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$: das elektrische Feld $E = (E_1, E_2, E_3)$ mit $E_i := -F_{0\,a},\ a = 1, 2, 3$ und das magnetische Feld $H = (H_1, H_2, H_3)$ mit $H_1 = F_{2\,3}, H_2 = -F_{1\,3}, H_3 = F_{1\,2}$. Es gilt also

$$F \;=\; -\sum_a E_a\, dx_0 \wedge dx_a \;+\; H_1\, dx_2 \wedge dx_3 \;-\; H_2\, dx_1 \wedge dx_3 \;+\; H_3\, dx_1 \wedge dx_2\ .$$

Die Gleichung $dF = 0$ entspricht nun einem System partieller Differentialgleichungen. Man berechnet

$$\begin{aligned}
dF \;&=\; \textstyle\sum_{i<j} dF_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j \;=\; \sum_{i<j,\,k} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \\
&= \left(\tfrac{\partial F_{1\,2}}{\partial x_3} - \tfrac{\partial F_{1\,3}}{\partial x_2} + \tfrac{\partial F_{2\,3}}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \;+\; \textstyle\sum_{i<j} \left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k}\right) dx_0 \wedge dx_i \wedge dx_j \\
&= \left(\tfrac{\partial H_3}{\partial x_3} + \tfrac{\partial H_2}{\partial x_2} + \tfrac{\partial H_1}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\qquad\qquad + \quad \left(\tfrac{\partial F_{1\,2}}{\partial x_0} + \tfrac{\partial F_{0\,1}}{\partial x_2} - \tfrac{\partial F_{0\,2}}{\partial x_1}\right) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&\qquad\qquad + \quad \left(\tfrac{\partial F_{1\,3}}{\partial x_0} - \tfrac{\partial F_{0\,3}}{\partial x_1} + \tfrac{\partial F_{0\,1}}{\partial x_3}\right) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\qquad\qquad + \quad \left(\tfrac{\partial F_{2\,3}}{\partial x_0} + \tfrac{\partial F_{0\,2}}{\partial x_3} - \tfrac{\partial F_{0\,3}}{\partial x_2}\right) dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&= \left(\tfrac{\partial H_3}{\partial x_3} + \tfrac{\partial H_2}{\partial x_2} + \tfrac{\partial H_1}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\qquad\qquad + \quad \left(\tfrac{\partial H_3}{\partial x_0} + \tfrac{\partial E_1}{\partial x_2} - \tfrac{\partial E_2}{\partial x_1}\right) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&\qquad\qquad - \quad \left(\tfrac{\partial H_2}{\partial x_0} + \tfrac{\partial E_3}{\partial x_1} - \tfrac{\partial E_1}{\partial x_3}\right) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\qquad\qquad + \quad \left(\tfrac{\partial H_1}{\partial x_0} + \tfrac{\partial E_2}{\partial x_3} - \tfrac{\partial E_3}{\partial x_2}\right) dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

Substituiert man hier die Definition der Divergenz eines Vektorfeldes H als

$$\operatorname{div}(H) = \tfrac{\partial H_3}{\partial x_3} + \tfrac{\partial H_2}{\partial x_2} + \tfrac{\partial H_1}{\partial x_1}$$

und der Definition der Rotation eines Vektorfeldes E als

$$\operatorname{rot}(E) = \left(\tfrac{\partial E_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial E_2}{\partial x_3}\right) \tfrac{\partial}{\partial x_1} \;+\; \left(\tfrac{\partial E_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial E_3}{\partial x_1}\right) \tfrac{\partial}{\partial x_2} \;+\; \left(\tfrac{\partial E_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial E_1}{\partial x_2}\right) \tfrac{\partial}{\partial x_3}$$

folgt, dass die Gleichung $dF = 0$ äquivalent ist zum 1. Teil der Maxwell-Gleichungen:

$$(i) \quad \operatorname{div}(H) = 0, \qquad \text{und} \qquad (ii) \quad \operatorname{rot}(E) = -\tfrac{\partial H}{\partial x_0}\ .$$

7.12 Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Definition 7.42 1. *Das* Bündel der (r,s)-Tensoren *auf einer Mannigfaltigkeit M ist definiert als disjunkte Vereinigung:*

$$T^{(r,s)}(TM) := \bigcup_{p \in M} T^{(r,s)}(T_pM),$$

wobei

$$\begin{aligned} T^{(r,s)}(T_pM) &:= \underbrace{T_pM \otimes \ldots \otimes T_pM}_{r-mal} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \ldots \otimes T_p^*M}_{s-mal} \\ &= \textit{Raum der multi-linearen Abbildungen} \\ &\quad \underbrace{T_p^*M \times \ldots \times T_p^*M}_{r\text{-}mal} \times \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{s\text{-}mal} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Tensoren vom Typ (r,s) *sind Schnitte im Bündel $T^{(r,s)}(TM)$, d.h. differenzierbare Abbildungen $R : M \to T^{(r,s)}(TM)$,*

$$\pi \circ R = \mathrm{Id}_M,$$

Äquivalent sind (r,s)-Tensoren $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilineare Abbildungen,

$$\underbrace{\Omega^1(M) \times \ldots \times \Omega^1(M)}_{r\text{-}mal} \times \underbrace{\chi(M) \times \ldots \times \chi(M)}_{s\text{-}mal} \to \mathcal{C}^\infty(M).$$

Bemerkungen:

1. Als *tensorielles Verhalten* bezeichnet man folgende Eigenschaft: Der Wert eines (r,s)-Tensors auf den r 1-Formen und den s Vektorfeldern in $p \in M$ hängt nur von deren Wert in p ab.

2. Lokal auf einer Umgebung U von p schreiben sich (r,s)-Tensoren als

$$R = \sum_{i,j} R^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes \mathrm{d}x_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x_{j_s},$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{d}x_j) = \mathrm{d}x_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \delta_{ij}$ und $R^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

3. Sind zum Beispiel λ und μ zwei 1-Formen auf U dann ist $\lambda \otimes \mu$ der $(0,2)$-Tensor definiert auf Vektorfeldern X, Y durch

$$\lambda \otimes \mu\,(X,Y) = \lambda(X)\mu(Y)\ .$$

4. Endomorphismen des Tangentialbündels sind $(1,1)$-Tensoren, denn für Vektorräume V und W gilt $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}\,(V,W)$. Der Raum der k-Formen ist ein Unterraum im Raum der $(0,k)$-Tensoren.

8 Orientierungen

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass eine Orientierung auf einem reellen Vektorraum die Auswahl einer Äquivalenzklasse von Basen ist. Dabei sind zwei Basen äquivalent, falls die Übergangsmatrix positive Determinante hat. Alternativ kann man sagen, dass zwei Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\{w_1, \ldots, w_n\}$ gleichorientiert sind, falls

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \;=\; \lambda\, w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$$

für eine positive reelle Zahl λ gilt.

Die Menge aller Basen auf einem reellen Vektorraum V zerfällt dann in zwei disjunkte Teilmengen, man hat also genau zwei Äquivalenzklassen. Diese Zerlegung entspricht der Tatsache, dass die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ zwei Zusammenhangskomponenten hat, die Mengen der Matrizen mit positiver bzw. negativer Determinante.

Die Standardorientierung auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch die Äquivalenzklasse der kanonischen Basis.

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei orientierten Vektorräumen V und W heißt *orientierungserhaltend* falls f Basen der fixierten Orientierung auf V in die der fixierten Orientierung auf W überträgt, was äquivalent ist zu $\det(f) > 0$.

Definition 8.1 *Eine* Orientierung *auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Familie $\{or_p\}_{p\in M}$ Orientierungen auf den Tangentialräumen T_pM, so dass ein Atlas $\mathcal{A}$ existiert mit*

$$dx_p : (T_pM, or_p) \to (\mathbb{R}^n, or_{stand})$$

orientierungserhaltend für alle $p \in U$ und alle Karten $(U, x) \in \mathcal{A}$. Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar*, falls eine Orientierung existiert und* orientiert*, falls eine Orientierung fixiert ist.*

Definition 8.2 *Eine differenzierbare Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei orientierten Mannigfaltigkeiten heißt* orientierungs-erhaltend*, falls*

$$df_p : (T_pM, or_p) \to (T_{f(p)}N, or_{f(p)})$$

für alle $p \in M$ orientierungs-erhaltend ist.

Für die Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit gibt es nun verschiedene äquivalente Kriterien, die im Folgenden vorgestellt werden sollen.

Satz 8.3 *Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn ein Atlas existiert, so das die Jacobi-Matrix aller Kartenwechsel eine positive Determinante hat.*

Beweis: Sei zunächst M orientierbar und $(U, x), (V, y)$ zwei orientierungs-erhaltende Karten, d.h. die linearen Abbildungen dx_p und dy_p sind orientierungs-erhaltend. Daher ist $dy \circ dx^{-1} = J(y \circ x^{-1})$ eine orientierungs-erhaltende Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Standard-Orientierung. Es folgt, dass die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels positive Determinante hat.

□

Beispiele: Als einfache Anwendung dieses ersten Kriteriums erhält man die folgenden drei Beispiele orientierter Mannigfaltigkeiten.

1. Die Sphäre S^n ist orientierbar.
2. Der Totalraum TM einer Mannigfaltigkeit M ist orientierbar.
3. Sind zwei Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 orientierbar, so auch $M_1 \times M_2$.
4. Komplexe Mannigfaltigkeiten sind orientierbar.

Komplexe Mannigfaltigkeiten sind dabei topologische Mannigfaltigkeiten, die Karten in $\mathbb{C}^n$ haben, für die die Kartenwechsel biholomorphe Abbildungen sind. Die komplex projektiven Räume sind Beispiele kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten.

Ein weiteres, besonders praktisches, Kriterium für Orientierbarkeit läßt sich mit Hilfe von n-Formen formulieren.

Definition 8.4 *Eine Volumenform auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine n-Form $\omega \in \Omega^n(M)$ ohne Nullstellen, d.h. $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$.*

Nun ist eine Geradenbündel genau dann trivial, wenn ein Schnitt ohne Nullstellen existiert. Die Existenz einer Volumenform, lässt sich also äquivalent auch folgendermassen formulieren.

Lemma 8.5 *Auf M^n existiert genau dann eine Volumenform, wenn das Geradenbündel $\Lambda^n T^*M$ trivial ist, d.h. isomorph ist zum trivialen Geradenbündel $M \times \mathbb{R}$.*

Beweis:

□

Satz 8.6 *Eine Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn auf M eine Volumenform existiert.*

Beweis:

□

Beispiele: Als Anwendung des zweiten Kriteriums zeigt man zum Beispiel die Orientierbarkeit folgender Mannigfaltigkeiten.

1. Jede Lie Gruppe ist orientierbar. Man wählt eine Basis $\{\mu_i, \ldots \mu_n\}$ in $\mathfrak{g}^* = T_e^*G$ und definiert dann in $g \in G$ eine n-Form durch

   $$\omega_g := r_g^*(\mu_1 \wedge \ldots \wedge \mu_n) \ .$$

   Offensichtlich ist ω eine global definierte Form ohne Nullstellen, also eine Volumenform, die eine Orientierung auf G definiert.

2. Parallelisierbare Mannigfaltigkeiten, also Mannigfaltigkeiten mit trivialem Tangentialbündel sind orientierbar. Ist das Tangentialbündel trivial so ist es offensichtich auch jedes k-Formenbündel und damit existiert wieder eine Volumenform.

3. Auf der Sphäre läßt sich leicht explizit eine Volumenform hinschreiben. Ist $p \in S^n$ und $v_1, \ldots, v_n \in T_pS^n = p^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Dann definiert man

$$\Omega_p(v_1, \ldots, v_n) := \det(p, v_1, \ldots, v_n) \ .$$

Wählt man die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Ergänzung von p zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n+1}$, dann ist der Wert von Ω_p auf diesen Vektoren gleich ± 1 und Ω ist damit eine Volumenform auf S^n.

Bemerkung: Seien M, N orientierte Mannigfaltigkeiten mit Volumenformen vol_M und vol_N. Eine Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann orientierungs-erhaltend wenn

$$f^* vol_N = \lambda \, vol_M$$

für eine positive Funktion $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Es soll nun geklärt werden, welche reell-projektiven Räume orientierbar sind. Dafür betrachtet man folgende etwas allgemeinere Situation. Sei $\tau : N \to N$ eine fixpunktfreie Involution, d.h. es gilt $\tau(p) \neq p$ für alle $p \in N$ und $\tau^2 = \mathrm{Id}_N$. Dann ist der Quotientenraum $M = N/_\tau$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Die differenzierbare Struktur ist eindeutig durch die Bedingung bestimmt, dass die kanonische Projektion $\pi : N \to M$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Der Beweis ist analog zur entsprechenden Aussage für den reell projektiven Raum, der ein Spezialfall dieser Situation ist. Hier ist $N = S^n$ und die Involution τ ist die antipodale Abbildung $\tau : S^n \to S^n, x \mapsto -x$, mit $\mathbb{R}P^n = S^n/_\tau$.

Satz 8.7 *Sei N eine orientierbare Mannigfaltigkeit und sei $\tau : N \to N$ eine fixpunktfreie Involution. Dann ist $M = N/_\tau$ genau dann orientierbar, wenn τ orientierungserhaltend ist.*

Beweis:

□

Folgerung 8.8 *Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.*

Beweis:

□

Zum Schluss soll noch ein drittes Kriterium für Orientierbarkeit bewiesen werden, welches auf eine topologische Bedingung führt.

Satz 8.9 *Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn die Menge $\Lambda^n T^* M \setminus$*Nullschnitt *zwei Zusammenhangskomponenten besitzt. Der Nullschnitt eine Vektorbündels ist dabei die Menge aller Nullvektoren der einzelnen Fasern als Teilmenge im Totalraum des Bündels.*

Beweis:

□

Auf der Menge $\Lambda^n T^*M \setminus$ Nullschnitt führt man eine Äquivalenzrelation ein. Man sagt, zwei n-Formen α und β sind äquivalent falls eine positive reelle Zahl λ existiert mit $\alpha = \lambda\beta$. Man definiert dann $\tilde{M}$ als den Quotientenraum

$$\tilde{M} = (\Lambda^n T^*M \setminus \text{Nullschnitt})/_{\sim} \ .$$

Satz 8.10 *Die Menge $\tilde{M}$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Weiter gilt:*

1. *Die Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ ist orientierbar.*

2. *Die kanonische Projektion $\tilde{M} \to M$ ist eine 2-fache Überlagerung (die Orientierungsüberlagerung von M).*

3. *Die Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn die Orientierungsüberlagerung trivial, also $\tilde{M}$ diffeomorph zu $M \times \mathbb{Z}_2$ ist.*

Folgerung 8.11 *Einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten sind orientierbar.*

Beweis: Überlagerungen von einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten sind trivial. □

9 Riemannsche Metriken

Man definiert zunächst das Vektorbündel der symmetrischen Bilinearformen auf TM:

$$\mathrm{Sym}^2 TM \;:=\; \bigcup_{p\in M} \mathrm{Sym}^2 T_pM \;\subset\; T^{0,2}(TM)$$

wobei: $\quad \mathrm{Sym}^2 T_pM := \{b : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \,|\, b \text{ symmetrische Bilinearform}\}$.

Definition 9.1 *Eine* Riemannsche Metrik auf M ist ein glatter Schnitt $g \in \Gamma(\mathrm{Sym}^2 TM)$, für den g_p für alle $p \in M$ positiv definit ist. Das Paar (M, g) nennt man *Riemannsche Mannigfaltigkeit*.

Bemerkungen:

1. Eine Metrik ist ein symmetrischer $(0,2)$-Tensor, d.h. eine symmetrische $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilineare Abbildung:
$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to \mathcal{C}^\infty(M) \ ,$$
die punktweise positiv-definit ist.

2. Pseudo-Riemannsche Metriken sind nicht-entartete, symmetrische Bilinearformen mit beliebiger Signatur. Lorentz-Metriken sind Metriken der Signatur $(n, 1)$.

3. Lokal, also in einer Karte (U, x), schreibt sich eine Metrik als
$$g = \sum g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j \ ,$$
wobei sich die Funktionen $g_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ bestimmen durch: $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$.

Metriken sind $(0,2)$-Tensoren, haben also folgendes Transformationsverhalten: Seien $(U, x), (V, y)$ zwei Karten um $p \in M$. Dann schreibt sich eine Metrik g auf $U \cap V$ als:

$$g = \sum g^x_{ij}\, dx_i \otimes dx_j = \sum g^y_{ij}\, dy_i \otimes dy_j \ .$$

Setzt man $\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ in die definierende Gleichung für g^y_{ij} ein, erhält man das Transformationsverhalten

$$g^y_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \sum_{k,l} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial y_j}\, g^x_{kl} \ .$$

Eine Riemannsche Metrik läßt sich auch beschreiben, als eine Familie von lokalen Funktionen $\{g_{ij}\}$, die dieses Transformationsverhalten bei Kartenwechsel haben und punktweise Skalarprodukte definieren.

Satz 9.2 *Auf jeder zusammenhängenden Mannigfaltigkeit existiert eine Riemannsche Metrik g.*

Beweis: Sei (U_k, f_k) ein Atlas von M und $\{\varphi_k\}$ eine Zerlegung der Eins zu $\{U_k\}$. Dann ist $\{U_k\}$ lokal endlich, d.h. jeder Punkt von M hat eine Umgebung, die nur endlich viele offene Mengen U_k schneidet. Weiterhin sei q ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, dann lässt sich dieses lokal auf M zurückziehen. Man definiert nun global

$$g = \sum_k \varphi_k \cdot f_k^* q,$$

wobei die Zurückziehung $f_k^* q$ der Bilinearform q definiert ist durch

$$f_k^* q(X, Y) = q(df_k(X), df_k(Y)) \ .$$

Aufgrund der Eigenschaften der Zerlegung der Eins ist g wohldefiniert und glatt. Außerdem ist für jedes $p \in M$ die Bilinearform g_p symmetrisch. Es verbleibt zu zeigen, dass g tatsächlich positiv definit ist. Sei $p \in M$, dann existiert ein k_0, so das $\varphi_{k_0}(p) \neq 0$ und folglich, gilt für $0 \neq X \in T_p M$

$$\begin{aligned} g_p(X, X) &= \sum_k \varphi_k(p) q(\mathrm{d}f_k(X), \mathrm{d}f_k(X)) \\ &\geq \varphi_{k_0}(p) q(\mathrm{d}f_{k_0}(X), \mathrm{d}f_{k_0}(X)) > 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Auf S^2 existiert keine Lorentz-Metrik. Aus deren Existenz würde auch die Existenz eines nullstellenfreien Vektorfeldes auf S^2 folgen. Ob eine Lorentz-Metrik existiert, hängt also von der Topologie auf M ab, während eine Riemannsche-Metrik immer existiert.

Definition 9.3 *Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten und sei $f \colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Man nennt f eine* Isometrie*, falls f ein Diffeomorphismus ist mit*

$$g = f^* h, \qquad \text{d.h.} \qquad g_p(X, Y) = h_{f(p)}(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y)),$$

d.h. $\mathrm{d}f_p$ ist eine Isometrie der euklidischen Vektorräume $(T_p M, g_p)$ und $(T_{f(p)} N, h_{f(p)})$.

Bemerkungen:

1. Id_M ist eine Isometrie.
2. Sind f_1 und f_2 Isometrien, dann auch $f_1 \cdot f_2$ und f_1^{-1}. Die Menge der Isometrien bildet also eine Gruppe – sogar eine Lie-Gruppe, die Isometriegruppe $\mathrm{Iso}(M, g)$ von (M, g).
3. Vektorfelder, deren lokaler Fluß aus lokalen Isometrien besteht, d.h.

$$\varphi_t^* g = g, \qquad \text{für alle } t, \text{ für die } \varphi_t \text{ definiert ist,}$$

nennt man *Killing Vektorfelder*. Ein Vektorfeld X ist genau dann ein Killing Vektorfeld, wenn $L_X g = 0$ gilt. Wie für jeden Tensor, ist die Lie-Ableitung von g definiert durch

$$L_X g := \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \varphi_t^* g \ .$$

Eine Standard-Rechnung ergibt folgende Formel für die Lie-Ableitung eines $(0, 2)$-Tensors:

$$(L_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])$$

Beispiele:

1. Auf $\mathbb{R}^n$ induziert das Standard-Skalarprodukt eine Riemannsche Metrik

   $$g = \sum \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i = \sum \mathrm{d}x_i^2.$$

   Im Spezialfall $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinaten (x, y) ist also $g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$. Führen wir Polarkoordinaten ein durch die Transformation

   $$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi,$$

   dann gilt

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \cos\varphi \mathrm{d}r - r \sin\varphi \mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi \mathrm{d}r + r \cos\varphi \mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

   und folglich ist $g = \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\varphi^2$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus L$, mit $L = \{(x, 0) | x < 0\}$.

2. Sei (M, g_M) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und durch $i : N \to M$ eine Untermannigfaltigkeit gegeben. Dann induziert g_M eine Metrik auf N durch

   $$g_N = i^* g_M,$$

   d.h. $g_N = g_M\big|_{TN \times TN}$, wobei $TN \subset TM$ wieder als Unterraum identifiziert wird.

   Betrachte $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so ist $T_p S^n = p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und

   $$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle, \qquad X, Y \in T_p S^n \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

   d.h. g_p ist die Einschränkung des euklidischen Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^{n+1}$.

   Der *Satz von Nash* besagt allgemein, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)(3n+11)}$ ist.

3. Auf dem n-dimensionalen hyperbolischen Raum,

   $$H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

ist eine Riemannsche Metrik gegeben durch

$$g = \frac{1}{x_n^2} \sum \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i.$$

Alternativ kann man H^n auch als Poincare-Modell betrachten,

$$H^n \cong \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 < 1 \right\},$$

dann ist die Riemannsche Metrik gegeben durch

$$g = \frac{4}{(1-r^2)^2} \sum \mathrm{d}x_i^2, \qquad r^2 = \sum x_i^2.$$

4. Seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, dann ist auch $M \times N$ mit der eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Bezeichnen p_1 bzw. p_2 die Projektionen von $M \times N$ auf M bzw. N, dann definiert man die Produktmetrik auf $M \times N$ durch $g_{M\times N} = p_1^* g + p_2^* h$. Unter der Identifikation $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \oplus T_qN$ ist $g_{M\times N} = g \oplus h$, d.h. es gilt $g_{M\times N}(A + X, B + Y) = g(A, B) + h(X, Y)$.

5. Sei G eine Lie-Gruppe und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = T_eG$. Dann definiert

   $$B_g(X, Y) = \langle dl_{g^{-1}}(X), dl_{g^{-1}}(Y) \rangle,$$

   eine glatte Metrik auf G. Außerdem ist B linksinvariant, d.h.

   $$l_g^* B = B$$

   und folglich $l_g \in \mathrm{Iso}(G, B)$ für alle $g \in G$.

6. Sei G kompakt und halbeinfach, dann definiert die Killing-Form ein negativ-definites bi-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$:

   $$B(X, Y) = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)) .$$

   Man erhält eine bi-invariante Metrik auf G, d.h. Rechts- und Linkstranslationen sind Isometrien.

Mit Hilfe einer Metrik lassen sich Abstände und Winkel definieren Für alles Weitere sei (M, g) stets eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Mit Hilfe einer Metrik lassen sich Abstände und Winkel definieren, was nun erkärt werden soll. Isometrien sind dann Abbildungen, die diese Größen erhalten.

Definition 9.4 *Die* Länge *einer Kurve* $\gamma : [a, b] \to M$ *ist definiert durch*

$$L[\gamma] = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, \mathrm{d}t,$$

wobei $\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}$.

Bemerkung: Der *Abstand* zweier Punkte $p, q \in M$ ist definiert als

$$d(p,q) = \inf_{\gamma} L[\gamma],$$

wobei das Infimum über alle stückweise glatten Kurven γ zu nehmen ist, die p und q verbinden.

Lemma 9.5 *Die Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik, d.h.*

1. *d ist* symmetrisch,
2. *d erfüllt die* Dreiecksungleichung,
3. *d ist* positiv definit, *d.h. $d(p,q) \geq 0$ und $d(p,q) = 0$ genau dann, wenn $p = q$.*

Beweis: 1. und 2. sind klar. Es verbleibt die positive Definitheit zu zeigen. Seien dazu $p, q \in M$ mit $d(p,q) = 0$. Angenommen $p \neq q$, dann wählen wir eine Karte (U, x) um p mit $x(p) = 0$ und $O = x^{-1}(B_r(0))$ mit $\bar{O} \subset U$ und $q \notin O$. Man definiert nun eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}, \qquad f(a_1, \ldots, a_n, p) = \left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\|_g .$$

Dann ist f eine stetige, nichtnegative Funktion und folglich existiert ein $k > 0$, so dass

$$\frac{1}{k} \leq f\big|_{S^{n-1} \times \bar{O}} \leq k.$$

Sei $\|\cdot\|'$ die Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann gilt für $(a, p) \in S^{n-1} \times O$,

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\|' = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} = 1.$$

Somit ist

$$\frac{1}{k} \left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\|' \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\| \leq k \left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\|' \qquad (*)$$

Da (*) homogen in a_i, folgt, dass (*) auf ganz $\mathbb{R}^n \times \bar{O}$ gilt.
Sei nun γ eine stückweise glatte Kurve von p nach q und γ' sei der Teil von γ bis zum ersten Schnittpunkt mit ∂O, α sei der Radius von O, dann ist

$$\begin{aligned} d(p,q) = \inf_{\gamma} L(\gamma) &\geq \inf_{\gamma} L(\gamma') \\ &\geq \frac{1}{k} \inf L(\gamma')' \\ &\geq \frac{1}{k} \alpha > 0, \end{aligned}$$

wobei $L(\gamma')'$ die Länge bezüglich der durch das Standardskalarprodukt induzierten Norm $\|\cdot\|'$ bezeichnet. □

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und d die induzierte Metrik auf M. Dann definiert d eine Topologie auf M. Die offenen Mengen sind genau die Vereinigungen von d-Bällen der Form

$$B_\varepsilon^d(p) := \{q \in M \mid d(p, q) < \varepsilon\} \ .$$

Eine direkte Konsequenz aus dem Beweis von Lemma 9.5 und insbesondere Ungleichung (*) ist der folgende Satz.

Satz 9.6 *Die durch d induzierte Topologie stimmt mit der ursprünglichen überein.*

10 Zusammenhänge und kovariante Ableitungen

10.1 Kovariante Ableitungen auf dem Tangentialbündel

In diesem Abschnitt soll eine Abbildung konstruiert werden, die zwei Vektorfeldern X, Y ein neues Vektorfeld $\nabla_X Y$ zuordnet, die kovariante Ableitung von Y nach X. Dieses Vektorfeld beschreibt in jedem Punkt $p \in M$ die infinitesimale Änderung von Y in Richtung X_p.

Auf dem $\mathbb{R}^n$ läßt sich ∇ folgendermaßen definieren: Seien $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ zwei glatte Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$, d.h. a_i und b_i sind glatte Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Dann definiert man:

$$\nabla_X Y = \sum_j X(b_j) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = X(Y) \ ,$$

wobei $X(Y)$ als komponentenweise Ableitung von Y nach X zu verstehen ist. Man nennt ∇ den *flachen Zusammenhang* auf $\mathbb{R}^n$.

Diese Definition ist aber nicht koordinaten-unabhängig und kann somit nicht auf beliebige Mannigfaltigkeiten übertragen werden. Hier nutzt man folgende

Definition 10.1 *Ein* Zusammenhang *(auch* kovariante Ableitung*) auf M ist eine Abbildung*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

so dass für beliebige Vektorfelder X, Y und alle Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\nabla_{f \cdot X} Y = f \cdot \nabla_X Y$
2. $\nabla_X (f \cdot Y) = X(f)\, Y + f \cdot \nabla_X Y$

Bemerkung: Aus 1. folgt, dass für ein festes Y die Abbildung $X \mapsto \nabla_X Y$ ein $(1,1)$-Tensor ist. Daraus folgt, dass man in jedem Punkt $p \in M$ eine wohldefinierte Abbildung

$$T_pM \to T_pM, \qquad v \mapsto (\nabla_X Y)(p)$$

hat, wobei X eine Fortsetzung von v zu einem Vektorfeld auf M ist.

Definition 10.2 *Die* Torsion *T eines Zusammenhangs ∇ auf TM ist definiert als die Abbildung*

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M), \qquad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \ .$$

Ein Zusammenhang heißt torsionsfrei *(oder auch symmetrisch), falls seine Torsion verschwindet, d.h. $T \equiv 0$ gilt.*

Lemma 10.3 *Die Torsion T ist ein schiefsymmetrischer $(1,2)$-Tensor, d.h. $T(X,Y)$ ist $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear in X und Y und es gilt für beliebige Vektorfelder X, Y:*

$$T(X,Y) \;=\; -T(Y,X) \;.$$

Beweis: Die Schiefsymmetrie ist klar. Für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ rechnet man direkt nach,

$$\begin{aligned} T(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y] \\ &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y(X) - Y(f)X - f[X,Y] + Y(f)X \\ &= fT(X,Y). \end{aligned}$$

□

10.2 Die lokale Beschreibung von Zusammenhängen

Sei ∇ ein Zusammenhang auf TM. Dann kann man ∇ in lokalen Karten (U,x) durch eine Familie von n^3 Funktionen beschreiben.

Definition 10.4 *Die* Christoffel-Symbole *des Zusammenhangs sind die lokalenFunktionen $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(U),\; i,j,k = 1,\ldots,n$ definiert bzgl. lokaler Karten (U,x) durch die Gleichungen*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \tfrac{\partial}{\partial x_j} \;=\; \sum_k \Gamma_{ij}^k \tfrac{\partial}{\partial x_k} \;.$$

Bemerkung: Der Zusammenhang ∇ ist durch seine Christoffel-Symbole eindeutig festgelegt, d.h. seien X und Y Vektorfelder auf M, die sich lokal auf U schreiben als $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, dann gilt auf U:

$$\nabla_X Y \;=\; \sum \left(a_i \tfrac{\partial b_k}{\partial x_i} \;+\; a_i b_j \Gamma_{ij}^k \right) \tfrac{\partial}{\partial x_k}$$

Unter Ausnutzung der Eigenschaften von ∇ berechnet man auf U:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum b_j \tfrac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} a_i \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,k} \left(a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i} + \left(\sum_j a_i b_j \Gamma_{ij}^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Lemma 10.5 *Der Zusammenhang ∇ ist genau dann torsionsfrei, wenn die Christoffel-Symbole symmetrisch sind, d.h. wenn $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ für alle Karten und alle Indizes i,j,k gilt.*

Beweis: Da die Torsion $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear in beiden Einträgen ist, genügt es zu zeigen

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \qquad \forall i,j,k.$$

Dies folgt aber direkt aus der Definition der Christoffel-Symbole. □

Beispiel: Die Christoffel-Symbole des flachen Zusammenhangs auf $\mathbb{R}^n$ sind alle Null und damit ist der flache Zusammenhang insbesondere torsionsfrei.

Definition 10.6 *Ein Vektorfeld V auf M heißt* parallel, *falls $\nabla_X V = 0$ für beliebige Vektorfelder X auf M erfüllt ist.*

Bemerkung: Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind alle Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$ parallel. Im Allgemeinen, auf beliebigen Mannigfaltigkeiten, sind die Koordinatenvektorfelder genau dann parallel, wenn

$$\nabla_X \tfrac{\partial}{\partial x_i} = 0 \quad \forall X \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \tfrac{\partial}{\partial x_j} = 0 \quad \forall i,j \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall i,j,k \ .$$

d.h. die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k messen die Abweichung der Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$ parallel zu sein.

10.3 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition 10.7 *Ein Zusammenhang ∇ heißt* metrisch *bzgl. g. falls*

$$X(g(Y,Z)) \ = \ g(\nabla_X Y, Z) \ + \ g(Y, \nabla_X Z)$$

für alle Vektorfelder $X,Y,Z \in \chi(M)$ erfüllt ist.

Beispiel: Der flache Zusammenhang auf $\mathbb{R}^n$ ist metrisch bzgl. des Euklidischen Skalarproduktes.

Satz 10.8 (Fundamentallemma der Riemannschen Geometrie) *Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) existiert ein eindeutig bestimmter torsionsfreier und metrischer Zusammenhang. Man nennt ihn den* Levi-Civita-Zusammenhang *von (M,g).*

Beweis: Für einen metrischen Zusammenhang ∇ auf (M,g) gilt,

$$\begin{aligned}
X(g(Y,Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)\\
Y(g(Z,X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)\\
Z(g(X,Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).
\end{aligned}$$

Ist ∇ weiterhin torsionsfrei, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y))\\
&\qquad = g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) + g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y) + g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z)\\
&\qquad = g([Y,Z],X) + g([X,Z],Y) + g([Y,X] + 2\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

Damit erhält man die Koszul-Formel, die den Levi-Civita-Zusammenhang eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned}
2\,g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) \;+\; Y(g(Z,X)) \;-\; Z(g(X,Y))&\\
-\; g([Y,Z],X) \;-\; g([X,Z],Y) \;+\; g([X,Y],Z)& \qquad (*)
\end{aligned}$$

Es verbleibt zu zeigen, dass durch die rechte Seite von (*) tatsächlich ein metrischer, torsionsfreier Zusammenhang bestimmt wird. Wir zeigen zunächst, dass die rechte Seite $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear in X ist. Sei also $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}
2\,g(\nabla_{fX} Y, Z) &= fX(g(Y,Z)) + Y(f)g(Z,X) + fY(g(Z,X))\\
&\quad - Z(f)g(X,Y) - fZ(g(X,Y))\\
&\quad - fg([Y,Z],X) - g(f[X,Y] - Z(f)X, Y) + g(f[X,Y] - Y(f)X, Z)\\
&= 2f\,g(\nabla_X Y, Z) + Y(f)g(Z,X) - Z(f)g(X,Y) + Z(f)g(X,Y) -\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Y(f)g(X,Z)\\
&= 2f\,g(\nabla_X Y, Z).
\end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass

$$g(\nabla_X fY, Z) = fg(\nabla_X Y, Z) + X(f)g(\nabla_X Y, Z).$$

Betrachtet man $g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ und beachtet dass in den Summanden gerade die Rollen von Y und Z vertauscht sind, dann ergibt sich unmittelbar, dass ∇ metrisch ist. Analog überzeugt man sich, dass ∇ torsionsfrei ist. $\square$

Beispiel: Der flache Zusammenhang auf $\mathbb{R}^n$ ist der Levi-Civita Zusammenhang von $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

$$\begin{aligned}
&T(X,Y) = X(Y) - Y(X) - [X,Y] = 0,\\
&X\langle Y, Z\rangle = X(YZ^\top) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\,.
\end{aligned}$$

10.4 Killing-Vektorfelder

Mit Hilfe des Levi-Civita-Zusammenhangs lässt sich eine wichtige Charakterisierung von Killing-Vektorfeldern angeben. Zur Erinnerung: eine Isometrie zwischen zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g_M) und (N, g_N) ist ein Diffeomorphismus $f : M \to N$, dessen Differential $df_p : (T_pM, g_{M,p}) \to (T_pN, g_{N,f(p)})$ eine Isometrie Euklidischer Vektorräume ist. Anders gesagt gilt: $f^*g_N = g_M$.

Killing-Vektorfelder waren nun definiert als Vektorfelder X auf M, deren lokaler Fluß φ_t^X aus lokalen Isometrien besteht. Äquivalent dazu ist, dass die Lie-Ableitung der Metrik verschindet, d.h. $L_X g = 0$.

Satz 10.9 *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-CIvita Zusammenhang ∇. Ein Vektorfeld X auf M ist genau dann ein Killing-Vektorfeld, wenn ∇X schief-symmetrisch ist, d.h wenn für beliebige Vektorfelder Y, Z gilt*

$$g(\nabla_Y X, Z) \ + \ g(Y, \nabla_Z X) \ = \ 0 \ .$$

Beweis: Die Lie-Ableitung der Metrik berechnet sich nach folgender Formel:

$$(L_X g)(Y, Z) \ = \ X(g(Y, Z)) \ - \ g([X, Y], Z) \ - \ g(Y, [X, Z]) \ .$$

Der Levi-Civia Zusammenhang ist metrisch und torsionsfrei, daher kann man die Ableitung von $g(Y, Z)$ nach X und die beiden Kommutatoren mit Hilfe von kovarianten Ableitungen ausdrücken. Man erhält:

$$\begin{aligned}
(L_X g)(Y, Z) \ &= \ g(\nabla_X Y, Z) \ + \ g(Y, \nabla_X Z) \\
&\qquad - g(\nabla_X Y, Z) \ + \ g(\nabla_Y X, Z) - \ g(Y, \nabla_X Z) \ + \ g(Y, \nabla_Z X) \\
&= \ g(\nabla_Y X, Z) \ + \ g(Y, \nabla_Z X)
\end{aligned}$$

Damit ist die angegebene Bedingung offensichtlich äquivalent zu $L_X g = 0$.

□

10.5 Die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs

Lemma 10.10 *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien Γ_{ij}^k die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs von (M, g). Dann gilt*

$$\Gamma_{ij}^l \ = \ \frac{1}{2} \sum_k g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \ + \ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \ - \ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) \ ,$$

wobei g lokal durch die Matrix (g_{ij}) gegeben ist, mit $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ und (g^{lk}) bezeichnet die zu (g_{ij}) inverse Matrix.

Beweis: Zunächst ist $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ und somit folgt die Behauptung mit der Koszul-Formel

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \\ &\stackrel{!}{=} 2\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} g_{lk} = 2g\left(\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right). \end{aligned}$$

□

10.6 Levi-Civita-Zusammenang von Untermannigfaltigkeiten

Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $i : M \to \overline{M}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Auf M betrachtet man die induzierte Riemannsche Metrik

$$g = i^*\overline{g} = \overline{g}\big|_{TM \times TM}$$

wobei man TM wieder mit dem Unterraum $di(TM) \subset T\overline{M}$ identifiziert. Dadurch erhält man punktweise die Zerlegung

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}, \qquad p \in M.$$

Man bezeichnet mit T_pM den Normalenraum an M. Die Vereinigung aller Normalenräume definiert das Normalenbündel $TM^{\perp}$ von M. Man hat $T\overline{M} = TM \oplus TM^{\perp}$ und jedes $X \in T\overline{M}$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$X = X^{\top} + X^{\perp},$$

wobei $X^{\top}$ tangential und $X^{\perp}$ normal an M ist.

Lemma 10.11 *Sei $X \in \chi(M)$ und $p \in M$, dann existiert eine offene Umgebung U von p in $\overline{M}$ und eine lokale Fortsetzung von X zu einem Vektorfeld auf U.*

Beweis: Sei (U, x) eine Untermannigfaltigkeits-Karte um p, d.h.

$$x(M \cap U) = x(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k\ .$$

Dann schreibt sich in dieser Karte das Vektorfeld X als

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad X_i \in \mathcal{C}^{\infty}(M \cap U).$$

Die lokale Fortsetzung $\tilde{X}$ von X definiert man nun auf U durch

$$\tilde{X}(x^{-1}(a,b)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x^{-1}(a,0)) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

d.h. $\tilde{X} \in \chi(U)$ und $\tilde{X}\big|_{M\cap U} = X\big|_{M\cap U}$. Dabei entspricht die Schreibweise (a, b) der Zerlegung $\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. □

Satz 10.12 *Sei $M \subset \overline{M}$ eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit und $\overline{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang von $\overline{g}$. Dann berechnet sich der Levi-Civita-Zusammenhang von g durch*

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^{\top} = \mathrm{pr}_{TM}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right),$$

wobei $X, Y \in \chi(M)$ mit lokalen Fortsetzungen $\tilde{X}, \tilde{Y}$.

Beweis: *Wohldefiniertheit.* Wir zeigen zunächst, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Fortsetzungen ist. Sei $\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, wobei $\tilde{Y}_i\big|_{M\cap U} = Y_i$. Dann ist

$$\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)_p = \sum_{i=1}^n \left(\tilde{X}(\tilde{Y}_i)\frac{\partial}{\partial x_i} + \tilde{Y}_i \overline{\nabla}_{\tilde{X}} \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Bigg|_p.$$

Da $\nabla_X Y$ tensoriell in X ist, gilt

$$\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \overline{\nabla}_{X_p} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Weiterhin ist $X_p \in T_pM$, also ist auch

$$\tilde{X}(\tilde{Y}_i)_p = X_p(\tilde{Y}_i) = X_p(\tilde{Y}_i\big|_{M\cap U}) = X_p(Y_i).$$

Somit hängt $\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)_p$ für $p \in M$ nur von den Werten von X und Y in p ab, ist also unabhängig von den Fortsetzungen. Damit ist ∇ ein wohldefinierter Zusammenhang auf M. Wir zeigen nun, dass ∇ torsionsfrei und metrisch ist, es folgt dann, dass ∇ der eindeutige Levi-Civita-Zusammenhang auf M ist.
∇ *ist torsionsfrei.* Es ist $X = \tilde{X}\big|_M$, d.h. X und $\tilde{X}$ sind i-verknüpft, ebenso Y und $\tilde{Y}$. Somit sind auch $[X, Y]$ und $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ i-verknüpft, insbesondere ist $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p$ tangential an TM für $p \in M$. Somit ist

$$\begin{aligned}\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\Big|_p &= \left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^{\top} - \left(\overline{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X}\right)^{\top} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]\Big|_p \\ &= \mathrm{pr}_{TM}\left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \overline{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]\right) = 0.\end{aligned}$$

∇ *ist metrisch.* Man führt dies darauf zurück, dass $\overline{\nabla}$ metrisch ist,

$$\begin{aligned}X(g(Y, Z))_p = \tilde{X}(\overline{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z}))_p &= \overline{g}(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z})_p + \overline{g}(\tilde{Y}, \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Z})_p \\ &= \overline{g}((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p, Z_p) + \overline{g}(Y_p, (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Z})_p) \\ &= g(\nabla_X Y, Z)_p + g(Y, \nabla_X Z)_p.\end{aligned}$$

□

Beispiel: Wir betrachten auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zwei Vektorfelder $X, Y \in \chi(M)$. Wie bereits festgestellt ist das Normalenvektorfeld gegeben durch

$$N : S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \to TS^n \subset \mathbb{R}^{n+1},\ p \mapsto N_p = p,$$

mit $X(N) = X$ (da hier $N = \mathrm{Id}, X(N) = dN(X)$ und $d\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$). Somit gilt nach obiger Formel für den Levi-Civita-Zusammenhang auf der Standardsphähre S^n:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)^\top = \tilde{X}(\tilde{Y}) - \left\langle \tilde{X}(\tilde{Y}), N \right\rangle N = \tilde{X}(\tilde{Y}) + \left\langle \tilde{Y}, \tilde{X}(N) \right\rangle N \\ &= \tilde{X}(\tilde{Y}) + \langle X, Y \rangle N.\end{aligned}$$

Definition 10.13 *Sei $M \subset \overline{M}$ eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit. Dann ist die* 2. Fundamentalform *von M in $\overline{M}$ definiert als*

$$\mathrm{II}(X, Y) = (\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})^\perp,$$

für Vektorfelder $X, Y \in \chi(M)$, mit lokalen Fortsetzungen $\tilde{X}, \tilde{Y}$.

Beispiel: Für $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die 2. Fundamentalform gegeben durch

$$\mathrm{II}(X, Y) = (\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})^\perp = \left\langle \overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, N \right\rangle N = \langle \tilde{X}(\tilde{Y}), N \rangle N = -\langle X, Y \rangle N.$$

Lemma 10.14 *Die 2. Fundamentalform* II *ist eine symmetrische $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilineare Abbildung.*

Beweis: Die $\mathcal{C}^\infty(M)$-Bilinearität folgt aus der Symmetrie, denn $\mathrm{II}(X, Y) = (\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})^\perp$ ist schon $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear in X. Da $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p \in T_pM$ für $p \in M$ folgt

$$\mathrm{II}(X, Y) - \mathrm{II}(Y, X) = \left(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \overline{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X}\right)^\perp = [\tilde{X}, \tilde{Y}]^\perp = 0\ .$$

Hier nutzt man wieder die i-Verknüpftheit von $[X, Y]$ und $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$, aus der folgt, dass $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p$ tangential an M ist und somit der normale Anteil verschwindet. □

Bemerkung: Die 2. Fundamentalform II definiert punktweise eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung

$$\mathrm{II}_p : T_pM \times T_pM \to T_pM^\perp, \qquad p \in M.$$

Als unmittelbare Konsequenz aus den Definitionen ergibt sich

Satz 10.15 (Gauß-Formel) $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y)$ *für $X, Y \in \chi(M)$.*

Definition 10.16 *Der* Form-Operator *in Richtung eines Normalenfeldes $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ ist definiert als*

$$A_\xi X = -(\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \xi)^\top,$$

d.h. $A_\xi \in \mathrm{End}\, TM$.

Lemma 10.17 *Der Form-Operator A_ξ ist ein selbstadjungierter Endomorphismus von TM und es gilt die Formel*

$$\overline{g}(\mathrm{II}(X,Y),\xi) = \overline{g}(A_\xi X, Y), \qquad X, Y \in \chi(M).$$

Beweis: Die Selbstadjungiertheit folgt direkt aus der Symmetrie der 2. Fundamentalform. Da der Zusammenhang $\overline{\nabla}$ metrisch ist folgt direkt aus der Definition:

$$\begin{aligned}\overline{g}(\mathrm{II}(X,Y),\xi) &= \overline{g}((\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}),\xi) = \tilde{X}(\underbrace{\overline{g}(\tilde{Y},\xi)}_{=0}) - \overline{g}(\tilde{Y},\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\xi) \\ &= \overline{g}(\tilde{Y}, -\overline{\nabla}_{\tilde{X}}\xi) = \overline{g}(\tilde{Y}, A_\xi X).\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Im Falle einer Hyperebene $M \subset \overline{M}$ hat man ein Normalenfeld N. Sei $A = A_N$, dann gilt

$$\mathrm{II}(X,Y) = \overline{g}(\mathrm{II}(X,Y),N)\, N = \overline{g}(AX,Y)\, N\ .$$

Insbesondere ist der Form-Operator der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gleich $-\mathrm{Id}$.
Beispiel: Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche. Wir betrachten das Einheits-Normalenvektorfeld $N : M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Die *Weingartenabbildung* ist definiert als

$$\mathrm{d}N : T_pM \to T_{N(p)}S^2 = N(p)^\perp = T_pM$$

Wir berechnen $\mathrm{d}N$ mit Hilfe der Integralkurve c von X, $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$. Dann ist

$$\mathrm{d}N(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} N(c(t)) = X(N) = \overline{\nabla}_X N \overset{!}{=} (\overline{\nabla}_X N)^\top = -A_N X,$$

denn

$$g(\overline{\nabla}_X N, N) = \frac{1}{2} L_X g(N,N) = 0$$

und folglich ist $\overline{\nabla}_X N = (\overline{\nabla}_X N)^\top$. Somit entspricht die Weingarten-Abbildung gerade dem Form-Operator.

10.7 Kovariante Ableitung auf Vektorbündeln

Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbündel über M.

Definition 10.18 *Eine* kovariante Ableitung *auf E ist eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung*

$$\nabla : \chi(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E), \quad (X,s) \mapsto \nabla_X s\ ,$$

so dass für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und alle $X \in \chi(M)$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$

2. $\nabla_X (f \cdot s) = X(f) \cdot s + f \, \nabla_X s$

Bemerkung: Kovariante Ableitungen auf TM setzen sich fort zu kovarianten Ableitungen auf Tensor- und Formenbündeln. Mit Hilfe von Hauptfaserbündeln kann man dafür eine universelle Beschreibung geben. Hier bleiben es erstmal ad-hoc Definitionen.

Beispiel: Sei B ein $(0,r)$-Tensor, dann ist $\nabla_X B$ ein $(0,r)$-Tensor, der definiert ist durch:

$$(\nabla_X B)(X_1, \ldots, X_r) \;=\; X(B(X_1, \ldots, X_r)) \;-\; \sum_{i=1}^{r} B(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_r) \; .$$

Im Folgenden sollen Anwendungen für diese Formel gegeben werden.

Lemma 10.19 *Eine kovariante Ableitung auf TM ist metrisch bzgl. einer Riemannschen Metrik genau dann, wenn g parallel bzgl. ∇ ist, d.h. $\nabla g = 0$ gilt.*

Beweis: Seien X, Y, Z Vektorfelder auf M, dann gilt nach Definition von ∇g:

$$(\nabla_X g)(Y, Z) \;=\; X(g(Y,Z)) \;-\; g(\nabla_X Y, Z) \;-\; g(Y, \nabla_X Z) \; ,$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt. □

Lemma 10.20 *Ein Vektorfeld X auf M ist genau dann ein Killing-Vektorfeld, wenn für den Levi-Civita-Zusammenhang zu g die Gleichung*

$$g(\nabla_Y X, Z) \;+\; g(Y, \nabla_Z X) \;=\; 0$$

für beliebige Vektorfelder Y, Z erfüllt ist, d.h. genau dann, wenn ∇X schiefsymmetrisch ist, also eine 2-Form auf M definiert:

$$(\nabla X)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) \; .$$

Beweis: Nach Definition ist $X \in \chi(M)$ genau dann ein Killing-Vektorfeld, wenn der lokale Fluß von X aus lokalen Isometrien besteht, also genau dann, wenn $L_X g = 0$ gilt. Nach der Definition der Lie-Ableitung von Bilinearformen und der Voraussetzung, dass ∇ metrisch und torsionsfrei ist, erhält man

$$\begin{aligned}
(L_X g)(Y, Z) &= L_X(g(Y,Z)) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) \\
&= g(\nabla_Y X, Z) \;+\; g(Y, \nabla_Z X) \; ,
\end{aligned}$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt. □

Bemerkung: Killing-Vektorfelder X sind also dadurch charakterisiert, dass ∇X ein schiefsymmetrischer Endomorphismus von TM ist.

Lemma 10.21 *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem torsionsfreien Zusammenhang ∇. Dann gilt für eine beliebige Differentialform ω auf M:*

$$d\omega \;=\; \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge \nabla_{e_i}\omega \ ,$$

wobei $\{e_i\}$ eine lokale ortho-normale Basis von TM ist, mit dualer Basis $\{e^i\}$ von T^*M.

Beweis: Sei zunächst ω eine 1-Form. Dann gilt für die linke Seite der zu beweisenden Gleichung:

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

Auf der rechten Seite erhält man:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum(e^i \wedge \nabla_{e_i}\omega)(X,Y) &= \textstyle\sum[e^i(X)(\nabla_{e_i}\omega)(Y) - e^i(Y)(\nabla_{e_i}\omega)(X)] \\
&= (\nabla_X\omega)(Y) - (\nabla_Y\omega)(X) \\
&= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) - Y(\omega(X)) + \omega(\nabla_Y X) \\
&= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung nutzte man die Torsionsfreiheit des Zusammenhangs ∇ durch die Gleichung $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

Für Formen beliebigen Grades nutzt man die Formel:

$$\begin{aligned}
d\omega(X_0,\dots,X_k) \;&=\; \textstyle\sum_j (-1)^j L_{X_j}(\omega(X_0\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)) \\
&\qquad + \;\textstyle\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_i (e^i \wedge \nabla_{e_i}\omega)(X_0,\dots,X_k) \;&=\; \textstyle\sum_{i,j}(-1)^j e^i(X_j)(\nabla_{e_i}\omega)(\dots,\hat{X}_j,\dots) \\
&=\; \textstyle\sum_{i,j}(-1)^j(\nabla_{X_j}\omega)(\dots,\hat{X}_j,\dots) \\
&=\; \textstyle\sum_j(-1)^j X_j(\omega(\dots,\hat{X}_j,\dots)) \\
&\qquad - \;\textstyle\sum_{j,k}(-1)^j\omega(\dots,\nabla_{X_j}X_k,\dots,\hat{X}_j,\dots)
\end{aligned}$$

□

Folgerung 10.22 *Parallele Formen sind geschlossen.*

Bemerkung: Die kovariante Ableitung $\nabla\omega$ einer k-Form ω kann man auffassen als Schnitt im Vektorbündel $T^*M \otimes \Lambda^k T^*M$. Man hat $\nabla\omega = \sum e^i \otimes \nabla_{e_i}\omega$, für eine lokale ONB $\{e_i\}$. Tatsächlich gilt nach Definition des Tensorproduktes

$$\sum(e^i \otimes \nabla_{e_i}\omega)(X,X_1,\dots,X_k) = \sum e^i(X)(\nabla_{e_i}\omega)(X_1,\dots,X_k) = (\nabla_X\omega)(X_1,\dots,X_k)\ .$$

Man hat folgende Isomorphie von Vektorbündeln, die einer punktweisen Isomorphie von Vektorräumen entspricht:

$$T^*M \otimes \Lambda^k T^*M \cong \Lambda^{k+1}T^*M \oplus \Lambda^{k-1}T^*M \oplus E \ ,$$

dabei ist E ein zusätzliches Vektorbündel, das hier nicht genauer beschrieben werden soll. Man kann explizit Projektionen auf die ersten beiden Summanden angeben:

$$\mathrm{pr}_1 : T^*M \otimes \Lambda^k T^*M \to \Lambda^{k+1}T^*M, \lambda \otimes \omega \mapsto \lambda \wedge \omega$$

und

$$\mathrm{pr}_2 : T^*M \otimes \Lambda^k T^*M \to \Lambda^{k-1}T^*M, X^* \otimes \omega \mapsto i_X\omega$$

wobei X ein Vektorfeld ist mit der dualen 1-Form $X^* := g(X, \cdot)$. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann:

$$d\omega \ = \ \mathrm{pr}_1(\nabla\omega)$$

Die Projektion auf den zweiten Summanden liefert (bis auf ein Vorzeichen) das sogenannte Kodifferential $d^* : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$. Man schreibt oft auch $d^* = \delta$. Es gilt also

$$d^*\omega = -\mathrm{pr}_2(\nabla\omega) = -\sum i_{e_k}\nabla_{e_k}\omega$$

Das Kodifferential d^* ist der zu d adjungierte Operator. Dh. bzgl. des L^2-Skalarproduktes $(\alpha, \beta) = \int \langle \alpha, \beta \rangle dvol_g$ gilt $(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta)$, wobei $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$.

11 Krümmung Riemannscher Mannigfaltigkeiten

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang ∇.

Definition 11.1 *Die* Riemannsche Krümmung *von (M, g) ist die Abbildung*

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M), \qquad (X, Y, Z) \mapsto R_{X,Y}Z$$

die für Vektorfelder X, Y, Z definiert ist durch

$$R_{X,Y}Z \;=\; \nabla_X \nabla_Y Z \;-\; \nabla_Y \nabla_X Z \;-\; \nabla_{[X,Y]} Z \;.$$

Lemma 11.2 *Die Abbildung R ist ein $(1, 3)$-Tensor, d.h. $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear in allen Einträgen.*

Beweis: Es ist zum Beispiel,

$$\begin{aligned} R_{fX,Y}Z &= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y f\nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]-Y(f)X} Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z + Y(f)\nabla_X Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z. \end{aligned}$$

Analog zeigt man die $\mathcal{C}^\infty(M)$-Linearität in den übrigen Einträgen. □

Bemerkungen:

1. Die Abbildung R definiert auch einen $(0, 4)$-Tensor: $R(X, Y, Z, U) \;=\; g(R_{X,Y}Z, U)$.
2. Der Riemannsche Krümmungstensor definiert punktweise $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen. Für fixierte Vektoren $X, Y \in T_pM$ hat man

   $$R_{X,Y} : T_pM \to T_pM, \qquad R_{X,Y}Z := (R_{\tilde{X}\tilde{Y}}\tilde{Z})(p) \;,$$

   wobei $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ Fortsetzungen der Vektoren $X, Y, Z \in T_pM$ zu Vektorfeldern auf M sind. So geschrieben ist die Krümmung eine endomorphismen-wertige 2-Form.
3. Für die Riemannsche Krümmung gibt es auch die Definition mit dem umgekehrten Vorzeichen.
4. Die Riemannsche Krümmung ist vollständig durch den Levi-Civita-Zusammenhang bestimmt und kann also lokal durch die Christoffel-Symbole bzw. in Abhängigkeit von der Metrik und ihren partiellen Ableitungen ausgedrückt werden. Definiert man

   $$R_{ijkl} \;=\; g(R_{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}} \tfrac{\partial}{\partial x_k}, \tfrac{\partial}{\partial x_l}) \;,$$

   dann ist die genaue Formel:

   $$R_{ijkl} \;=\; \tfrac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x_l} \;-\; \tfrac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x_k} \;+\; \sum_m \Gamma^i_{lm}\,\Gamma^m_{kj} \;-\; \sum_m \Gamma^i_{km}\,\Gamma^m_{lj} \;.$$

Der Riemannsche Krümmungstensor hat eine Reihe von Symmetrien und speziellen Eigenschaften.

Satz 11.3 *Seien dabei X, Y, Z, U, V beliebige Vektorfelder auf M, dann gilt:*

1. $R(X,Y,Z,U) \;=\; -R(Y,X,Z,U) \;=\; -R(X,Y,U,Z)$
2. $R(X,Y,Z,U) \;=\; R(Z,U,X,Y)$
3. *1. Bianchi-Identität:*
   $R(X,Y,Z,U) \;+\; R(Y,Z,X,U) \;+\; R(Z,X,Y,U) \;=\; 0$
4. *2. Bianchi-Identität:*
   $(\nabla_X R)(Y,Z,U,V) \;+\; (\nabla_Y R)(Z,X,U,V) \;+\; (\nabla_Z R)(X,Y,U,V) \;=\; 0$

Beweis: Zu 1.: Die Schiefsymmetrie in X, Y folgt direkt aus der Definition. Der Krümmungstensor ist schiefsymmetrisch in Z, U genau dann, wenn $R(X,Y,Z,Z) = 0$ für alle Vektorfelder X, Y, Z erfüllt ist. Da ∇ metrisch ist folgt:

$$\begin{aligned}
L_X g(Z,Z) &= g(\nabla_X Z, Z) \;+\; g(Z, \nabla_X Z) \;=\; 2\,g(\nabla_X Z, Z)\\
L_{[X,Y]} g(Z,Z) &= 2\,g(\nabla_{[X,Y]} Z, Z)\\
L_Y L_X g(Z,Z) &= 2\,g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) \;+\; 2\,g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z)\\
L_X L_Y g(Z,Z) &= 2\,g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) \;+\; 2\,g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z)
\end{aligned}$$

Subtrahiert man die letzten drei Gleichungen von einander, so erhält man:

$$\begin{aligned}
0 &= (L_X L_Y \;-\; L_Y L_X \;-\; L_{[X,Y]})g(Z,Z)\\
&= 2\,g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, Z)\\
&= 2\,g(R_{XY} Z, Z)
\end{aligned}$$

Zu 3.: Wir können durch eine geeignete Wahl ohne Einschränkung annehmen, dass $[X,Y] = [Z,X] = [Y,Z] = 0$ in einem Punkt. Dann ist

$$\begin{aligned}
&R_{X,Y} Z + R_{Z,X} Y + R_{Y,Z} X\\
&\qquad = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X\\
&\qquad = \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X)\\
&\qquad = \nabla_X ([Y,Z]) + \nabla_Y ([Z,X]) + \nabla_Z ([X,Y]) = 0.
\end{aligned}$$

Zu 2.: Nach 3. gelten

$$\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0,\\
&R(Y,Z,W,X) + R(Z,W,Y,X) + R(W,Y,Z,X) = 0,\\
&R(Z,W,X,Y) + R(W,X,Z,Y) + R(X,Z,W,Y) = 0,\\
&R(W,X,Y,Z) + R(X,Y,W,Z) + R(Y,W,X,Z) = 0.
\end{aligned}$$

Addieren dieser Terme ergibt,

$$2R(X,Z,W,Y) - 2R(W,Y,X,Z) = 0.$$

Zu 4.: Nach der Definition der kovarianten Ableitung von $(0,r)$-Tensoren erhält man für die kovariante Ableitung des Krümmungstensors zunächst folgende Formel:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,Z,U,V) \;&=\; X(R(Y,Z,U,V)) \;-\; R(\nabla_X Y,Z,U,V) \;-\; R(Y,\nabla_X Z,U,V) \\
&\qquad -\; R(Y,Z,\nabla_X U,V) \;-\; R(Y,Z,U,\nabla_X V) \\
&=\; X(g(R_{Y,Z}U,V)) \;-\; g(R_{\nabla_X Y,Z}U,V) \;-\; g(R_{Y,\nabla_X Z}U,V) \\
&\qquad -\, g(R_{Y,Z}\nabla_X U,V) \;-\; g(R_{Y,Z}U,\nabla_X V) \\
&=\; g(\nabla_X(R_{Y,Z}U) \;-\; R_{\nabla_X Y,Z}U \;-\; R_{Y,\nabla_X Z}U \;-\; R_{Y,Z}\nabla_X U,V) \\
&=\; g((\nabla_X R)_{Y,Z}U,V)\ .
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist dabei genau die Definition von $(\nabla_X R)_{Y,Z}$. Somit kann man die 2. Bianchi-Identität äquivalent für die Krümmung R als endomorphismen-wertige 2-Form schreiben. Zu zeigen ist dann:

$$(\nabla_X R)_{Y,Z} \;+\; (\nabla_Y R)_{Z,X} \;+\; (\nabla_Z R)_{X,Y} \;=\; 0\ .$$

Die Definition von $\nabla_X R$ in obiger Rechnung lässt sich auch folgendermassen schreiben:

$$(\nabla_X R)_{Y,Z} \;=\; [\nabla_X, R_{Y,Z}] \;-\; R_{\nabla_X Y,Z} \;-\; R_{Y,\nabla_X Z}$$

Setzt man hier die Definition der Krümmung $R_{X,Y} = [\nabla_X,\nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ ein, so folgt

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R)_{Y,Z} \;&=\; [\nabla_X,[\nabla_Y,\nabla_Z]] \;-\; [\nabla_X,\nabla_{[Y,Z]}] \;-\; R_{\nabla_X Y,Z} \;-\; R_{Y,\nabla_X Z} \\
&=\; [\nabla_X,[\nabla_Y,\nabla_Z]] \;-\; \nabla_{[X,[Y,Z]]} \;+\; R_{X,[Y,Z]} \;-\; R_{\nabla_X Y,Z} \;-\; R_{Y,\nabla_X Z}
\end{aligned}$$

Bildet man nun die zyklische Summe über X,Y,Z dann verschwinden die Summanden mit ∇ auf Grund der Jacobi-Identität. Die restlichen Krümmungsterme fallen weg nach Anwendung der Gleichung $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ und ihrer Permutationen. □

Bemerkungen:

1. Die ersten drei Eigenschaften sind algebraischer Natur. Punktweise sind sie äquivalent dazu, dass die Riemannsche Krümmung in $\mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 T_p^*M) \cap \ker b$ liegt, also eine symmetrische Bilinearform auf $\Lambda^2 T_p^*M$ ist, die im Kern der Bianchi-Abbildung $b : \Lambda^2 T_p^*M \otimes \Lambda^2 T_p^*M \to \Lambda^4 T_p^*M$ liegt, die definiert ist durch $b(\alpha \otimes \beta) = \alpha \wedge \beta$

2. Die Riemannsche Krümmung kann man auch auch auffassen als symmetrische Abbildung $\mathcal{R} : \Lambda^2 T_p^*M \to \Lambda^2 T_p^*M$. In diesem Fall spricht man vom Krümmungsoperator, implizit definiert durch

$$g(\mathcal{R}(X \wedge Y), U \wedge V) \;=\; R(X,Y,U,V)\ .$$

Man bemerke, dass man mit Hilfe der Metrik in jedem Punkt eine Identifikation $T_p^*M \cong T_pM$ hat. Die 1. Bianchi-Identität entspricht dann der Gleichung $\sum \mathcal{R}(\omega_i) \wedge \omega_i \;=\; 0$, für irgendeine Ortho-Normal-Basis $\{\omega_i\}$ von $\Lambda^2 T_p^*M$. Der Krümmungsoperator der Standardsphäre (siehe unten) ist gleich $-\mathrm{Id}$.

Aufgrund der $\mathcal{C}^\infty(M)$-Linearität im unteren Eintrag definiert die kovariante Ableitung ∇Z einen Endomorphismus auf TM, d.h. man betrachtet die Zuordnung

$$\nabla Z : TM \to TM, \qquad X \mapsto \nabla_X Z.$$

Die kovariante Ableitung ∇ induziert nun auch eine kovariante Ableitung auf End (TM), die ebenfalls mit ∇ bezeichnet wird. Sei $L \in \text{End}\,(TM)$, so definiert man

$$(\nabla_X L)(Y) = \nabla_X(L(Y)) - L(\nabla_X Y).$$

Dies ermöglicht eine sinnvolle Definition von

$$\nabla^2 Z = \nabla(\nabla Z), \qquad \nabla^2_{XY} Z = (\nabla_X(\nabla Z))(Y).$$

Lemma 11.4 $\quad R_{X,Y}Z = \nabla^2_{XY}Z - \nabla^2_{YX}Z.$

Beweis: Nach Definition von ∇ auf End (TM) ist

$$\nabla^2_{XY}Z = \nabla_X(\nabla Z(Y)) - \nabla Z(\nabla_X Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z$$

Folglich ist

$$\nabla^2_{XY}Z - \nabla^2_{YX}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} Z = R_{X,Y}Z.$$

□

11.1 Die Schnittkrümmung

Lemma 11.5 *Sei $E \subset T_pM$ ein 2-dimensionaler Unterraum, dann ist die Zahl*

$$K(X,Y) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

unabhängig von der Wahl der Basis $\{X,Y\}$ von E.

Beweis: Sei $E = \mathrm{span}\{X,Y\} = \mathrm{span}\{V,W\}$ und $V = aX + bY$, $W = cX + dY$, dann ist

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb \neq 0$$

und

$$g(R_{V,W}W,V) = (ad-cb)^2 g(R_{X,Y}Y,X)$$

Analog überzeugt man sich, dass

$$\begin{aligned} g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2 &= (ad-cb)^2 \left(g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2\right) \\ &= \det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \left(g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2\right). \end{aligned}$$

□

Bemerkungen:

1. Die Zahl $K(E) = K(X,Y)$ für $E = \mathrm{span}\{X,Y\}$ nennt man *Schnittkrümmung* von E in p.

2. Falls $\dim M = 2$, so ist K eine Funktion auf M,

   $$K(p) = K(T_pM).$$

   Sie heißt *Gauß-Krümmung* auf M.

3. Man kann den Nenner der Schnittkrümmung mittels der Determinate ausdrücken:

   $$\det \left(\begin{smallmatrix} g(X,X) & g(X,Y) \\ g(Y,X) & g(Y,Y) \end{smallmatrix}\right) = g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2 =: g(X \wedge Y, X \wedge Y).$$

   Insbesondere ist $\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2 \neq 0$, falls X,Y linear unabhängig.

Satz 11.6 *Die Riemannsche Krümmung ist vollständig durch die Schnittkrümmung bestimmt.*

Definition 11.7 *Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein* Raum konstanter Krümmung *c, falls $K(E) = c$ für alle 2-dimensionalen Unterräume $E \subset T_pM$ und alle $p \in M$.*

Bemerkung: Räume konstanter Schnittkrümmung sind Quotienten von $\mathbb{R}^n$, S^n, H^n (Satz von Hopf bzw. Cartan-Hadamard).

Satz 11.8 *Sei* (M, g) *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung* c*. Dann gilt*

$$R_{X,Y}Z = c\,(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)\,.$$

Beweis: Wir setzen $F(X,Y,Z,V) = c\,(g(Y,Z)g(X,V) - g(X,Z)g(Y,V))$. Man rechnet direkt nach, dass F Eigenschaft 1.-3. von Satz 11.3 erfüllt und folglich ist $F \in \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 T_pM) \cap \ker b$ mit

$$F : \Lambda^2 \to \Lambda^2, \qquad F = c\mathrm{Id}.$$

Folglich ist $F(X,Y,Z,V) = -cg(X \wedge Y, Z \wedge V)$ und

$$K^F(X,Y) = \frac{F(X,Y,Y,X)}{g(X \wedge Y, X \wedge Y)} = c\frac{g(X \wedge Y, X \wedge Y)}{g(X \wedge Y, X \wedge Y)} = c = K^R(X,Y).$$

Somit ist $F = R$. □

Beispiele:

1. Ist $M = \mathbb{R}^n$, so ist $K \equiv 0$, denn $\nabla_X Y = X(Y)$. Dann gilt

$$R_{X,Y}Z = X(Y(Z)) - Y(X(Z)) - [X,Y](Z) = 0.$$

   $\mathbb{R}^n$ ist "flach".

2. Sei $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dann ist, wie schon gesehen, der Levi-Civita-Zusammenhang der von der flachen Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Metrik gegeben durch

$$\nabla_X Y = X(Y) + \langle Y, X\rangle\, N\ .$$

   Damit berechnet sich die Krümmung von S^n als

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= X(\nabla_Y Z) + \langle X, \nabla_Y Z\rangle\, N - Y(\nabla_X Z) - \langle Y, \nabla_X Z\rangle\, N \\
&\qquad - [X,Y](Z) - \langle [X,Y], Z\rangle\, N \\
&= X(Y(Z) + \langle Y,Z\rangle\, N) + \langle X, Y(Z) + \langle Y,Z\rangle\, N\rangle\, N \\
&\quad - Y(X(Z) + \langle X,Z\rangle\, N) - \langle Y, X(Z) + \langle X,Z\rangle\, N\rangle\, N \\
&\quad - X(Y(Z)) + Y(X(Z)) - \langle [X,Y], Z\rangle\, N \\
&= X(\langle Y,Z\rangle\, N) + \langle X, Y(Z)\rangle\, N - Y(\langle X,Z\rangle\, N) - \langle Y, X(Z)\rangle\, N - \langle [X,Y],Z\rangle\, N \\
&= X(\langle Y,Z\rangle\, N) - Y(\langle X,Z\rangle\, N) + (\langle X, Y(Z)\rangle - \langle Y, X(Z)\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle)\, N \\
&= \langle Y,Z\rangle\, X - \langle X,Z\rangle\, Y \\
&\qquad + (X(\langle Y,Z\rangle) - Y(\langle Y,Z\rangle) + \langle X, Y(Z)\rangle - \langle Y, X(Z)\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle)\, N \\
&= \langle Y,Z\rangle\, X - \langle X,Z\rangle\, Y
\end{aligned}$$

   Somit ist

$$\langle R_{X,Y}Y, X\rangle = \langle Y,Y\rangle\,\langle X,X\rangle - \langle X,Y\rangle\,\langle Y,X\rangle = \langle X \wedge Y, X \wedge Y\rangle$$

   und daher ist $K(S^n) \equiv 1$.

3. Wir betrachten den hyperbolischen Raum

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\},$$

mit der Metrik

$$g = \frac{1}{x_n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i\right).$$

Man verifiziert sofort, dass dann

$$g_{ij} = \frac{1}{x_n^2}E_{ij}, \qquad g^{ij} = x_n^2 E^{ij}.$$

Damit berechnen sich die Christoffel-Symbole wie folgt,

$$\begin{aligned}\Gamma_{ii}^k &= \frac{1}{x_n}, \qquad i < n,\\ \Gamma_{nn}^k &= -\frac{1}{x_n} = \Gamma_{in}^k = \Gamma_{ni}^k,\\ \Gamma_{ij}^k &= 0, \qquad \text{sonst.}\end{aligned}$$

Es folgt, dass $K(H^n) \equiv -1$. Im Spezialfall

$$H^2 = \{(x, y) \mid y > 0\}, \qquad g = \frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2),$$

also

$$g_{xx} = \frac{1}{y^2} = g_{yy}, \qquad g_{xy} = g_{yx} = 0,$$

erhält man dies auch direkt aus der Koszul-Formel, ohne die Christoffel-Symbole berechnen zu müssen. Es ist nämlich,

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{\partial x}\partial_x, \partial x) &= \partial_x g_{xx} + \partial_x g_{xx} - \partial_x g_{xx} = \partial_x g_{xx} = 0,\\ 2g(\nabla_{\partial x}\partial_x, \partial y) &= \partial_x g_{xy} + \partial_x g_{yx} - \partial_y g_{xx} = -\partial_y(g_{xx}) = \frac{2}{y^3}.\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\nabla_{\partial x}\partial_x = \frac{1}{y}\partial_y.$$

Analog berechnet man

$$\nabla_{\partial y}\partial_y = -\frac{1}{y}\partial_y, \qquad \nabla_{\partial y}\partial_x = \nabla_{\partial x}\partial y = -\frac{1}{y}\partial_x.$$

Der Krümmungstensor ergibt sich damit zu

$$R_{\partial x \partial y}\partial_x = \nabla_{\partial x}\nabla_{\partial y}\partial_x - \nabla_{\partial y}\nabla_{\partial x}\partial_x = \frac{1}{y^2}\partial_y.$$

Die Schnittkrümmung ist dann gerade

$$K = K(\partial_x, \partial_y) = \frac{R(\partial_x, \partial_y, \partial_y, \partial_x)}{|\partial_x|^2|\partial_y|^2 - g(\partial_x, \partial_y)^2} = -\frac{g\left(\frac{1}{y^2}\partial_y, \partial_y\right)}{\frac{1}{y^2}\frac{1}{y^2}} = -1.$$

11.2 Ricci-Krümmung

Definition 11.9 *Die* Ricci-Krümmung *von* (M, g) *ist punktweise definiert durch die Abbildung*

$$\mathrm{Ric} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$

mit

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{tr}\,(Z \mapsto R_{ZX}Y)\,.$$

Bemerkungen:

1. Ric ist ein $(0, 2)$-Tensor.
2. Ric definiert einen Endomorphismus von TM durch die Gleichung
$$g\,(\mathrm{Ric}(X), Y) = \mathrm{Ric}(X, Y).$$
3. Sei $\{e_i\}$ eine lokale Orthonormalbasis, dann hat Ric die Darstellung
$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{k} R(e_i, X, Y, e_i) = \sum_{i=1}^{k} R(X, e_i, e_i, Y).$$

Lemma 11.10 Ric *ist ein symmetrischer* $(0, 2)$*-Tensor.*

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus den Symmetrien des Krümmungstensors,

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_i R(e_i, X, Y, e_i) = \sum_i R(Y, e_i, e_i, X) = \sum_i R(e_i, Y, X, e_i) = R(Y, X).$$

□

Aufgrund der Symmetrie ist Ric bereits durch $\mathrm{Ric}(X, X)$ bestimmt (Polarisation),

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{Ric}(X, X) + \mathrm{Ric}(Y, Y) - \mathrm{Ric}(X - Y, X - Y))\,.$$

Es zeigt sich nun, dass Ric daher bereits vollständig durch die Schnittkrümmung beschrieben ist.

Lemma 11.11 *Sei* $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ *eine Orthonormalbasis in* $X^\perp \subset T_pM$*. Dann gilt*

$$\mathrm{Ric}(X, X) = \sum_{i=1}^{n-1} K(X, e_i) g(X, X).$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei $|X| = 1$ und eine Orthonormalbasis von T_pM gegeben durch $X = e_n$, $X^\perp = \text{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Es ist nach Definition der Schnittkrümmung,

$$R(e_i, X, X, e_i) = K(X, e_i)\left(|e_i|^2|X|^2 - g(e_i, X)^2\right) = K(X, e_i)\left(1 - \delta_{in}^2\right),$$

und folglich

$$\text{Ric}(X, X) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, X, X, e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} K(X, e_i) g(X, X).$$

□

Definition 11.12 *Die* Skalarkrümmung *ist definiert als*

$$\text{scal}_g = \text{tr}(\text{Ric}) = \sum_i \text{Ric}(e_i, e_i) = \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_j, e_i).$$

Die Skalarkrümmung ist eine glatte Funktion auf M, die von der Metrik g abhängt.

Beispiel: (M, g) habe konstante Schnittkrümmung c. Dann gilt für die Ricci-Krümung

$$\text{Ric}(X, X) = \sum_{i=1}^{n-1} K(X, e_i) g(X, X) = c \cdot (n-1) g(X, X),$$

und folglich ist die Skalarkrümmung ebenfalls konstant und gegeben durch

$$\text{scal}_g = c \cdot n(n-1).$$

Bemerkung: Der Krümmungstensor lässt sich als Element

$$R \in \text{Sym}^2(\Lambda^2 V) \cap \ker b, \qquad V = T_pM,$$

auffassen. Aus der Darstellungstheorie der $\text{SO}(n)$ wissen wir, dass

$$\mathbb{R} \oplus \text{Sym}_0^2 V \oplus \Lambda^4 V \oplus W = \text{Sym}^2(\Lambda^2 V) \subset \Lambda^2 V \otimes \Lambda^2 V.$$

Da $\Lambda^4 V$ nicht im Kern der Bianchi-Abbildung liegt, lässt sich R somit darstellen als

$$R = \text{scal} + \text{Ric} + w,$$

wobei w für die Weyl-Krümmung steht.

11.3 Einsteinmetriken

Definition 11.13 *Eine* Einsteinmetrik *ist eine Metrik g mit*

$$\mathrm{Ric}_g = \lambda g,$$

für eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen:

1. Räume konstanter Schnittkrümmung sind Einstein, denn

$$\mathrm{Ric}_g = c \cdot (n-1) g.$$

2. Ist M Einstein, dann gilt $\lambda = \frac{\mathrm{scal}_g}{n}$.

3. Ist $\dim M = 1$, dann verschwinden alle Krümmungsgrößen.

4. Ist $\dim M = 2$, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(e_i, e_j) &= \sum_{k=1}^{2} R(e_i, e_k, e_k, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ R(e_1, e_2, e_2, e_1) = R(e_2, e_1, e_1, e_2), & i = j, \end{cases} \\ &= K \cdot g(e_i, e_j) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathrm{Ric} = K \cdot g, \qquad \mathrm{scal} = 2K,$$

d.h. alle Krümmungsgrößen fallen zusammen. Insbesondere ist M genau dann Einstein, wenn K konstant ist.

5. Für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten existiert immer eine Metrik konstanter Krümmung.

6. Die Schnittkrümmung bestimmt die Ricci-Krümmung. Ist $\dim M = 3$, so gilt auch die Umkehrung (dies gilt nicht mehr für $\dim M \geq 4$). Insbesondere gilt

$$(M^3, g) \text{ Einstein } \Leftrightarrow M \text{ hat konstante Schnittkrümmung.}$$

Sei dazu $\{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(e_1, e_1) &= K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3), \\ \mathrm{Ric}(e_2, e_2) &= K(e_2, e_1) + K(e_2, e_3), \\ \mathrm{Ric}(e_3, e_3) &= K(e_3, e_1) + K(e_3, e_2). \end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um ein lineares Gleichungssystem für die drei Unbekannten $K(e_1, e_2), K(e_1, e_3)$ und $K(e_2, e_3)$. Man erhält daraus eine explizite Formel für die Schnittkrümmung in Abhänigkeit der Ricci-Krümmung.

7. Die Einsteinsche-Feldgleichung ist
$$\mathrm{Ric}_g - \frac{\mathrm{scal}_g}{2} g = T,$$
wobei T den Energie-Impuls-Tensor bezeichnet. Falls keine Masse im System vorhanden ist, so ist $T = 0$ und die Feldgleichung schreibt sich als
$$\mathrm{Ric}_g - \frac{\mathrm{scal}_g}{2} g = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ric}_g = 0 \ .$$
Lösungen der Feldgleichung sind also genau die Ricci-flache Metriken.

8. Einstein-Metriken sind kritische Punkte des Hilbert-Funktionals. Bezeichne
$$\mathcal{M}_1(M) := \{\text{Riemannsche Metriken mit Volumen } 1\},$$
dann ist das Hilbert-Funktional gegeben durch
$$S : \mathcal{M}_1(M) \to \mathbb{R}, \qquad s(g) = \int_M \mathrm{scal}_g \, \mathrm{d}vol_g.$$

9. Mit Hilfe topologischer Obstruktionen kann man die Existenz 4-dimensionaler Mannigfaltigkeiten zeigen, die keine Einstein-Metriken zulassen.

10. Die Existenz von Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 5 ohne Einstein-Metrik ist völlig ungeklärt.

11. Ist (M, g) zusammenhängend und Einstein, dann ist die Skalarkrümmung konstant. Man kann diese Mannigfaltigkeiten einteilen nach
$$\mathrm{scal}_g < 0, \qquad \mathrm{scal}_g = 0, \qquad \mathrm{scal}_g > 0.$$
Es gibt topologische Obstruktionen gegen die Existenz von Metriken positiver Skalarkrümmung. Jede glatte Funktion auf einer Mannigfaltigkeit, die auch negative Werte annimmt läßt sich als Skalarkrümmung einer Metrik realisieren.

Satz 11.14 (Schur,1886) *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $n \geq 3$ und*
$$\mathrm{Ric}_g = f \cdot g$$
mit einer glatten Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dann ist f konstant.

Bemerkung: Genauer gesagt hat Schur folgende etwas speziellere Aussage gezeigt: Ist g eine Metrik, so dass die Schnittkrümmung für jede Ebene $E \subset T_pM$ nur vom Punkt p abhängt, d.h. $K(E) = f(p)$, dann ist die Schnittkrümmung K konstant. Tatsächlich, da die Ricci-Krümmung eine Summe von Schnittkrümmungen ist, folgt aus der Voraussetzung die Gleichung $\mathrm{Ric} = cfg$, für eine gewisse Konstante c und aus allgemeineren Aussage folgt dann, dass f und somit die Schnittkrümmung konstant sein muss.

Die Beweisidee der allgemeineren Aussage liegt darin, die Gleichung $\mathrm{Ric}_g = f \cdot g$ zu differenzieren und daraus $\mathrm{d}f = 0$ zu folgern. Dafür benötigen wir jedoch noch einige technische Vorbereitungen.

Definition 11.15 *Sei B ein $(0,r)$-Tensor und $\{e_i\}$ eine lokale ortho-normale Basis von T_pM. Dann ist die* Divergenz *von B definiert durch*

$$(\delta B)(X_1,\dots,X_{r-1}) := -\sum_i (\nabla_{e_i} B)(e_i, X_1,\dots,X_{r-1}).$$

Bemerkungen:

1. Auf Differentialformen entspricht δ genau dem Kodifferential d^*.
2. Seien A, B zwei $(0,r)$-Tensoren, dann definiert man
$$\langle A, B\rangle = \sum_{i_1,\dots,i_r} A(e_{i_1},\dots,e_{i_r})B(e_{i_1},\dots,e_{i_r}).$$
3. δB ist ein $(0, r-1)$-Tensor.
4. $\delta g = 0$, denn die Metrik ist parallel bezüglich dem Levi-Civita-Zusammenhang.
5. Ist B symmetrisch, so auch δB.
6. Sei B ein $(0,2)$-Tensor, dann ist
$$\operatorname{tr}_g(B) = \sum_i B(e_i, e_i) = \langle B, g\rangle .$$

Definition 11.16 *Sei X ein Vektorfeld auf M, dann ist*

$$\operatorname{div}(X) = \sum g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

die Divergenz von X.

Beispiel: Ist $M = \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) = \sum_{i=1}^n g(e_i(X), e_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}.$$

Lemma 11.17 *Sei ω_X die 1-Form zum Vektorfeld X, d.h.*

$$\omega_X(Y) = g(X, Y).$$

Dann gilt

$$d^*\omega_X = -\operatorname{div}(X).$$

Beweis: Der Levi-Civita-Zusammenhang ist metrisch und folglich gilt

$$\begin{aligned}
d^*\omega_X &= -\sum(\nabla_{e_i}\omega_X)(e_i) = -\sum\left(L_{e_i}(\omega_X(e_i)) - \omega_X(\nabla_{e_i}e_i)\right) \\
&= -\sum\left(L_{e_i}(g(X,e_i)) - g(X,\nabla_{e_i}e_i)\right) = -\sum g(\nabla_{e_i}X, e_i) \\
&= -\mathrm{div}(X).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Der *Laplace Operator* lässt sich für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ definieren durch

$$\Delta f = -\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,(f)) = d^* d\, f\ .$$

Bemerkung: Sei $X \in T_pM$, dann existiert lokal eine sogenannte *parallele* Fortsetzung von X zu einem lokalen Vektorfeld $\tilde{X}$ mit $(\nabla\tilde{X})_p = 0$. Sei nun B ein $(0,r)$-Tensor und $X_1, \ldots, X_r, V \in T_pM$ in diesem Sinne parallel fortgesetzt, dann gilt in p:

$$\begin{aligned}
(\nabla_V B)(X_1, \ldots, X_r)_p &= L_V(B(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_r))_p - \sum_{i=1}^r B(\ldots, \nabla_V\tilde{X}_i, \ldots)_p \\
&= L_V(B(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_r)).
\end{aligned}$$

Für Tensorrechnungen in einem Punkt p kann man damit auch immer o.B.d.A. lokale Orthonormalbasen $\{e_i\}$ betrachten, die die Bedingung $(\nabla e_i)_p = 0$ erfüllen. Dadurch lassen sich oft Rechnungen erheblich vereinfachen.
Die Existenz der parallelen Fortsetzung wird später mit der Hilfe der Parallelverschiebung bewiesen.

Lemma 11.18 $\delta\,\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{dscal}_g$.

Beweis: Sei $p \in M$ und $\{e_i\}$ eine ortho-normale Basis von T_pM, $v \in T_pM$ und $e_1, \ldots, e_n, v$ seien, in einer Umgebung von p, parallel fortgesetzt. Dann gilt nach der 2.Bianchi-Identität

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_v R)(e_i, e_j, e_j, e_i) + (\nabla_{e_i}R)(e_j, v, e_j, e_i) + (\nabla_{e_j}R)(v, e_i, e_j, e_i) \\
&= L_v R(e_i, e_j, e_j, e_i) + L_{e_i}R(e_j, v, e_j, e_i) + L_{e_j}R(v, e_i, e_j, e_i).
\end{aligned}$$

Summation über i und j ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= L_v\mathrm{scal}_g - \sum_i L_{e_i}\mathrm{Ric}(v, e_i) - \sum_j L_{e_j}\mathrm{Ric}(v, e_j) \\
&= \mathrm{dscal}_g(v) + 2(\delta\mathrm{Ric})(v).
\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung des Lemmas. □

Beweis des Satzes von Schur: Sei also $\mathrm{Ric} = f \cdot g$ für ein $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann ist

$$f = \frac{\mathrm{scal}_g}{n}, \qquad n = \dim M.$$

Es gilt nun nach dem vorigen Lemma,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\mathrm{dscal}_g &= \delta\mathrm{Ric} = \delta(f \cdot g) \\
&= -\sum (\nabla_{e_i}(f \cdot g))(e_i, \cdot) \\
&= -\sum L_{e_i}(f \cdot g)(e_i, \cdot) \\
&= -\sum L_{e_i}(f) \cdot g(e_i, \cdot) - \sum f \cdot \underbrace{L_{e_i} g(e_i, \cdot)}_{=0} \\
&= -g(\mathrm{grad}\, f, \cdot) = -\mathrm{d}f = -\frac{1}{n}\mathrm{dscal}_g.
\end{aligned}$$

Daher ist $0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \mathrm{dscal}_g$ und schließlich

$$\mathrm{dscal}_g = 0, \qquad \text{für } n \neq 2.$$

Also ist die Skalarkrümmung und damit die Funktion f konstant. $\square$

11.4 Lie-Gruppen

Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_eG$.

Bemerkungen:

1. Linksinvariante Metriken auf G stehen in einer 1:1 Beziehung zu Skalarprodukten auf der Lie-Algebra. Betrachte dazu ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\mathfrak{g}$, dann definiert man

$$g_h(X,Y) = \langle \mathrm{d}l_{h^{-1}}(X), \mathrm{d}l_{h^{-1}}(Y)\rangle = l_h^* \langle X, Y\rangle .$$

   Analog definiert jede linksinvariante Metrik ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$.

2. Bi-invariante Metriken sind Metriken, die links- und rechtsinvariant sind, d.h. sowohl Links- als auch Rechtstranslation sind Isometrien.

Lemma 11.19 *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit einer links-invarianten Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann sind äquivalent:*

1. *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist bi-invariant.*
2. *$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist* Ad*-invariant.*
3. $\langle \mathrm{ad}(Z)X, Y\rangle + \langle X, \mathrm{ad}(Z)Y\rangle = 0.$
4. *Der Levi-Civita-Zusammenhang ist gegeben durch*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y], \qquad \textit{für } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Beweis: Bis auf die Äquivalenz von 3. und 4. haben wir bereits alles in Kapitel 8 gezeigt. Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ links-invariant ist, ist $\langle X, Y\rangle$ konstant für $X, Y \in \mathfrak{g}$ und somit ist nach der Koszul-Formel,

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= -\langle X, [Y,Z]\rangle + \langle Y, [Z,X]\rangle + \langle Z, [X,Y]\rangle \\ &= \langle X, [Z,Y]\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle + \langle [X,Y], Z\rangle . \end{aligned}$$

Somit ist

$$\langle X, [Z,Y]\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y].$$

□

Folgerung 11.20 *Sei G eine Lie-Gruppe mit bi-invarianter Metrik. Dann gilt*

1. $R_{X,Y}Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z].$
2. $K(X,Y) = \frac{1}{4}\frac{\|[X,Y]\|^2}{\|X\wedge Y\|^2} \geq 0.$

Beweis: Zu 1: Unter Verwendung der Jacobi-Identität ist

$$\begin{aligned}R_{X,Y}Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\\ &= \frac{1}{4}\left([X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] - 2[[X,Y],Z]\right)\\ &= \frac{1}{4}\left([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + 2[Z,[X,Y]]\right)\\ &= \frac{1}{4}[Z,[X,Y]].\end{aligned}$$

Zu 2:

$$K(X,Y) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{\|X\wedge Y\|^2} = -\frac{1}{4}\frac{\langle[[X,Y],Y],X\rangle}{\|X\wedge Y\|^2} = \frac{1}{4}\frac{\langle[X,Y],[X,Y]\rangle}{\|X\wedge Y\|^2}.$$

□

Bemerkung: Auf Lie-Gruppen kennen wir bereits die Killing Form

$$B_G(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y)).$$

B_G ist genau dann nicht ausgeartet, wenn G halbeinfach ist. Ist G kompakt und halbeinfach, dann ist B_G negativ definit. In diesem Fall wird G durch die Killing Form zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(G,-B_G)$.

Satz 11.21 *Sei G eine kompakte, halbeinfache Lie-Gruppe. Dann ist $(G,-B_G)$ eine Einstein Mannigfaltigkeit.*

Beweis: Man berechnet die Ricci-Krümmung zu

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,Y) &= \mathrm{Tr}(Z\mapsto R_{Z,X}Y) = \mathrm{Tr}(Z\mapsto -\frac{1}{4}[[Z,X],Y]) = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(Z\mapsto[[Z,X],Y])\\ &= -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(Z\mapsto[X,[Y,Z]])\\ &= -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(Z\mapsto \mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y)(Z))\\ &= -\frac{1}{4}B_G(X,Y).\end{aligned}$$

□

11.5 Riemannsche Produkte

Seien (M_1, g_1) und (M_2, g_2) zwei Riemmansche Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $M = M_1 \times M_2$ mit der Metrik $g = g_1 \oplus g_2$. Dabei identiifiziert man die Tangentialräume wie folgt

$$TM = TM_1 \oplus TM_2, \qquad TM \ni X = X_1 + X_2, \qquad X_1 \in TM_1, X_2 \in TM_2.$$

Bzgl. der Produkt-Metrik sind die Unterräume TM_1 und TM_2 in TM zueinander orthogonal. Der Levi-Civita-Zusammenhang auf M ist daher gegeben durch,

$$\nabla_X Y = \nabla^{g_1}_{X_1} Y_1 + \nabla^{g_2}_{X_2} Y_2.$$

Für die Krümmungsgrößen erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
&R_{X,Y}Z = R^{g_1}_{X_1,Y_1} Z_1 + R^{g_2}_{X_2,Y_2} Z_2,\\
&\mathrm{Ric}_g = \mathrm{Ric}_{g_1} \oplus \mathrm{Ric}_{g_2}\\
&\mathrm{scal}_g = \mathrm{scal}_{g_1} + \mathrm{scal}_{g_2},\\
&K(X,Y) = 0, \qquad \text{falls } X \in TM_i, Y \in TM_j, \quad i \neq j.
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Man erhält zum Beispiel, dass die Schnittkrümmung bezüglich der Produktmetrik auf $S^2 \times S^2$ nicht-negartiv ist: $K_{S^2 \times S^2} \geq 0$.

   Hopf Vermutung: Es gibt keine Metrik g auf $S^2 \times S^2$ mit $K_g > 0$.

2. Sind M_1 und M_2 Einstein, dann ist auch $M_1 \times M_2$ Einstein, falls
$$\frac{\mathrm{scal}_{g_1}}{\dim M_1} = \frac{\mathrm{scal}_{g_2}}{\dim M_2}.$$

Beispiele:

1. Die Produktmetrik auf $S^1 \times S^{n-1}$ für $n \geq 3$ ist nicht Einstein. Denn Sei $X \in TS^1$, dann ist
$$\mathrm{Ric}(X,X) = \mathrm{Ric}_{S^1}(X,X) = 0,$$
denn S^1 ist eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Jedoch ist für $0 \neq Y \in TS^{n-1}$,
$$\mathrm{Ric}(Y,Y) = c(n-2)g(Y,Y) \neq 0.$$

2. Auf $S^1 \times S^2$ existiert überhaupt keine Einsteinmetrik, denn
$$g \text{ Einstein } \Leftrightarrow K_g = \text{ konstant}.$$
Die drei-dimensionale Mannigfaltigkeit $M = S^1 \times S^2$ besitzt eine drei-dimensionale einfach-zusammenhängende Überlagerung $\tilde{M}$. Die sogenannte *universelle Überlagerung*. Hätte $S^1 \times S^2$ konstante Schnittkrümmung so auch die universelle Überlagerung $\tilde{M}$. Diese wäre dann diffeomorph zu S^3 oder $\mathbb{R}^3$ und damit hätte $M = S^1 \times S^2$ eine triviale 2. Homotopiegruppe, d.h. $\pi_2(M) = 0$, was ein Widerspruch ist.

3. Auch auf $S^1 \times S^3$ existiert keine Einstein-Metrik. Man kann zeigen (M. Berger, 1961), dass eine kompakte, nicht-flache, 4-dimensionale Einstein-Mannigfaltigkeit positive Euler-Charakteristik hat. Die Euler-Charakteristik von $S^1 \times S^3$ ist aber Null.

11.6 Krümmung von Untermannigfaltigkeiten

Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $i : M \to \overline{M}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit der induzierte Riemannsche Metrik $g = i^*\overline{g}$. Der Levi-Civita-Zusammenhang $\overline{\nabla}$ von $\overline{g}$ ist über die Gauß-Formel verknüpft mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇ der induzierten Metrik g. Für die dazugehörigen Krümmungen liefert das folgende Beziehung:

Satz 11.22 (Gauß-Gleichung) *Seien $X, Y, V, W \in \chi(M)$, dann gilt*

$$R(X,Y,V,W) = \overline{R}(X,Y,V,W) - \overline{g}(\mathrm{II}(X,V), \mathrm{II}(Y,W)) + \overline{g}(\mathrm{II}(X,W), \mathrm{II}(Y,V))$$

Beweis: Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $[X,Y] = 0$. Dann ist

$$\overline{R}(X,Y,V,W) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y V - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X V, W).$$

Verwenden wir $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X,Y)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y V, W) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X\nabla_Y V, W) + \overline{g}(\overline{\nabla}_X \mathrm{II}(Y,V), W) \\
&= \overline{g}(\nabla_X\nabla_Y V, W) + \underbrace{\overline{g}(\mathrm{II}(X, \nabla_Y V), W)}_{=0} + \overline{g}(\overline{\nabla}_X \mathrm{II}(Y,V), W).
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\nabla}_X \mathrm{II}(Y,V), W) &= X(\underbrace{\overline{g}(\mathrm{II}(V,Y), W)}_{=0}) - \overline{g}(\mathrm{II}(Y,V), \overline{\nabla}_X W) \\
&= -\underbrace{\overline{g}(\mathrm{II}(Y,V), \nabla_X W)}_{=0} - \overline{g}(\mathrm{II}(Y,V), \mathrm{II}(X,W)).
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y,V,W) &= \overline{g}(\nabla_X\nabla_Y V, W) - \overline{g}(\nabla_Y\nabla_X V, W) \\
&\quad - \overline{g}(\mathrm{II}(Y,V), \mathrm{II}(X,W)) + \overline{g}(\mathrm{II}(X,V), \mathrm{II}(Y,V)) \\
&= R(X,Y,V,W) - \overline{g}(\mathrm{II}(Y,V), \mathrm{II}(X,W)) + \overline{g}(\mathrm{II}(X,V), \mathrm{II}(Y,W)).
\end{aligned}$$

□

Folgerung 11.23 *Sei $\{X, Y\}$ eine Basis für einen 2-dimensionalen Unterraum von T_pM. Dann ist*

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) - \frac{\|\mathrm{II}(X,Y)\|^2 - \overline{g}(\mathrm{II}(X,X), \mathrm{II}(Y,Y))}{\|X \wedge Y\|^2}$$

Beispiel: Wir betrachten $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist $\overline{K} = 0$, denn der $\mathbb{R}^{n+1}$ ist flach und $\mathrm{II}(X,Y) = \langle X, Y\rangle N$. Somit erhält man

$$K(X,Y) = 0 - \frac{\langle X,Y\rangle^2 - |X|^2|Y|^2}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = 1.$$

Bemerkung: Den zweiten Summanden, also $\frac{\|\mathrm{II}(X,Y)\|^2 - \overline{g}(\mathrm{II}(X,X),\mathrm{II}(Y,Y))}{\|X\wedge Y\|^2}$, nennt man auch Gauß-Krümmung. Er hängt von der Einbettung $M \subset \overline{M}$ ab. Wie die obige Formel zeigt, stimmt er allerdings im Fall von Hyperflächen des $\mathbb{R}^3$ mit der intrinsisch definierten Schnittkrümmung überein, ist dann also unabhängig von der Einbettung. Diese Tatsache ist Inhalt des Theorema Egregium von Gauß.

Bemerkungen:

1. Der Form-Operator ist selbstadjungiert also diagonaliserbar. Seine Eigenwerte heißen *Hauptkrümmungen*, seine Eigenvektoren *Hauptkrümmungsrichtungen*.

2. Die *mittlere Krümmung* bzw. das *mittlere Krümmungsfeld* ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{\dim M} \operatorname{Tr} \mathrm{II}.$$

3. Eine spezielle Klasse von Mannigfaltigkeiten sind die *total geodätischen Untermannigfaltigkeiten*. Das sind Untermannigfaltigkeiten mit $\mathrm{II} \equiv 0$.

4. Eine Abschwächung davon sind die *Minimalflächen*, das sind Untermannigfaltigkeiten mit $H \equiv 0$, d.h. die Hauptkrümmungen heben sich in jedem Punkt auf, die mittlere Krümmung ist Null.

5. CMC-Flächen (constant-mean-curvature) lassen beliebige aber konstante mittlere Krümmung zu. Dies sind gerade die Untermannigfaltigkeiten für die das mittlere Krümmungsfeld parallel ist $\overline{\nabla} H = 0$.

6. Eine Hyperfläche $M \subset \overline{M}$ heißt *Nabel-Fläche* (bzw. total umbilisch) falls ein Normalenfeld N und eine Funktion λ existieren mit:

$$\mathrm{II}(X,Y) = \lambda\, g(X,Y) N.$$

   In diesem Fall gilt für den Form-Operator $A = \lambda \,\mathrm{Id}$. Vollständige, einfach-zusammenhängende total-umbilische Hyperflächen im euklidischen Raum sind isometrisch zur Standardsphäre. Denn aus Folgerung 11.23 ergibt sich, dass die Schnittkrümmung konstant gleich λ^2 ist. Aus der Klassifikation der Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung (Cartan-Hadamard) folgt dann, dass M isometrisch zur Standardsphäre sein muss.

Im Fall von Hyperflächen $M \subset \overline{M}$ gibt es einige Vereinfachungen und einfache Eigenschaften, die zum Schluss noch erwänt werden sollen. Sei N ein Normalenfeld und $A = A_N$ der Form-Operator von M. Dann schreibt sich die Gauß-Gleichung als

$$R(X,Y,V,W) \;=\; \overline{R}(X,Y,V,W) \;-\; \overline{g}(AX,V)\,\overline{g}(AY,W) \;+\; \overline{g}(AX,W)\,\overline{g}(AY,V)\;.$$

Daraus berechnet sich die Ricci-Krümmung von M als:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(Y,V) &= \overline{Ric}(Y,V) - \overline{R}(N,Y,V,N) - \sum \overline{g}(Ae_i,V)\,\overline{g}(AY,e_i) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \sum \overline{g}(Ae_i,e_i)\,\overline{g}(AY,V) \\
&= \overline{Ric}(Y,V) - \overline{R}(N,Y,V,N) - \overline{g}(AY,AV) + \mathrm{tr}A\cdot\overline{g}(AY,V)
\end{aligned}$$

Sei $M \subset \overline{M}$ eine total-umbilische Hyperfläche, d.h. $A = \lambda\,\mathrm{Id}$, dann ergibt sich auch Folgerung 11.23 für die Schnittkrümmungen die Beziehung

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \lambda^2 .$$

Es soll nun die Frage untersucht werden, wann die von einer Einstein $\overline{g}$ induzierte Metrik g auf einer Hyperfläche $M \subset \overline{M}$ wieder eine Einstein-Metrik ist. Im Falle von Hyperflächen in Räumen konstanter Schnittkrümmung läßt sich leicht eine vollständige Antwort geben. Für Einstein-Hyperflächen im (flachen) Euklidischen Raum hat man zum Beispiel das folgende Resultat

Satz 11.24 (Ryan) *Vollständige Einstein-Hyperflächen positiver Skalarkrümmung in $\mathbb{R}^{n+1}$, mit $n \geq 3$, sind isometrisch zur n-dimensionalen Standard-Sphäre S^n.*

Beweis: Die Metrik g sei Einstein, also $\mathrm{Ric} = \rho\, g$ und nach Voraussetzung ist $\rho > 0$. Wie oben gezeigt gilt dann

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = -\,g(AX,AY) + \mathrm{tr}A\cdot g(AX,Y) .$$

Sei $x_0 \in M$ und $\{e_i\}$ die Hauptkrümmungsrichtungen in x_0, d.h. $Ae_i = \lambda_i e_i$. Setzt man nun $X = Y = e_i$, so folgt

$$\rho = -\,\lambda_i^2 + \mathrm{tr}A\cdot\lambda_i .$$

Damit sind die Hauptkrümmungen in jedem Punkt von M Lösungen der quadratischen Gleichung

$$t^2 - a\,t + \rho = 0 ,$$

mit $a = \mathrm{tr}A$. Also gibt es in jedem Punkt höchstens zwei verschiedene Hauptkrümmungen: $\lambda \geq \mu$. Man nimmt an, dass $\lambda \neq \mu$. Dann folgt aus $\rho > 0$, dass $\lambda\cdot\mu = \rho > 0$, d.h. λ und μ haben das gleiche Vorzeichen. Sei p die Vielfachheit des Eigenwertes λ. Damit berechnet sich die Spur von A als

$$\mathrm{tr}A = p\,\lambda + (n-p)\,\lambda = \lambda + \mu ,$$

wobei man die obige quadratische Gleichung und den Wurzelsatz von Vieta benutzt. Es folgt

$$(p-1)\,\lambda + (n-p-1)\,\mu = 0$$

und somit $p = 1, n-p = 1$ und schließlich $n = 2$, was ein Widerspruch ist. Als Schlußfolgerung erhält man $\lambda = \mu$ und $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist daher total-umbilisch. Die Schnittkrümmung berechnet sich, wie oben bemerkt, zu λ^2 und ist also insbesondere konstant. Es folgt, dass M überlagert wird von der Standardsphäre und mit einem kleinem Extra-Argument läßt sich dann noch zeigen, dass (M, g) tatsächlich isometrisch zur Standardsphäre ist. □

Bemerkungen:

1. Im Allgemeinen gilt: Vollständige Einstein-Hyperflächen in $\mathbb{R}^{n+1}$ sind Hyperebenen, Sphären oder Zylinder über ebenen Kurven.

2. Vollständige Einstein-Hyperflächen in S^{n+1} sind kleine Sphären und Produkte von Sphären.