**Universität Stuttgart**

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2013

**Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)**

**Übungsblatt 9**

1. Beweisen Sie mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung für den Casimir-Operator

$$\mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}} = \sum_i \rho_*(e_i) \circ \rho_*(e_i) \in \mathrm{End(V)}$$

die folgenden Aussagen:

a) $\mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}}$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Orthonormal-Basis $\{e_i\}$.

b) Für alle $g \in G$ gilt $\mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}} \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \mathrm{Cas}_\rho^{\mathfrak{g}}$. Betrachten Sie dazu die Basis $\{\mathrm{Ad}(g)e_i\}$.

2. Beweisen Sie, dass für einen kompakten symmetrischen Raum $M = G/K$ für die Skalarkrümmung der Metrik, die durch das Negative der Killingform $B$ gegeben ist, die Gleichung

$$\mathrm{scal}_{-B} = \frac{\dim M}{2}$$

gilt.

3. Sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\omega$ eine $p$-Form auf $M$ und $\{e_i\}$ eine lokale Orthonormalbasis. Beweisen Sie für Vektorfelder $X, Y$ die Formel

$$R_{XY}^{\Lambda^p}\omega = \sum_i (R_{XY}e_i)^\# \wedge e_i \lrcorner\, \omega.$$

4. Verwenden Sie Aufgabe 3, um zu zeigen, dass der Operator $q(R)$ auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, g)$ mit dem Hodge-Stern $*$ auf Formen kommutiert:

$$*(q(R)\omega) = q(R)(*\omega), \quad \forall \omega \in \Omega^p(M).$$