



**Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten
(Prof. Semmelmann)**

Übungsblatt 8

1. Sei (M^n, g) eine n -dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $g_\lambda = e^{2\lambda}g$ mit $\lambda \in C^\infty(M)$ eine zu g konform äquivalente Metrik. Wir bezeichnen Größen, die zu g_λ gehören, mit einem Index λ .

a) Beweisen Sie folgende Formeln für das Volumenelement und den Hodge-Stern:

$$\begin{aligned} d\text{vol}_{g_\lambda} &= e^{n\lambda} d\text{vol}_g \\ *_\lambda &= e^{(n-2p)\lambda} * \text{ auf } p\text{-Formen} \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie das Kodifferential d_λ^* und den Laplace-Operator Δ_λ .

c) Zeigen Sie, dass eine Form genau dann g -harmonisch ist, wenn sie g_λ -harmonisch ist.

2. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass der harmonische Repräsentant einer beliebigen Kohomologiekasse genau der mit minimaler L^2 -Norm in dieser Klasse ist.

3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $q(R)$ der Endomorphismus von $\Lambda^p T^*M$ aus der Vorlesung. Beweisen Sie, dass $q(R)$ ein symmetrischer Endomorphismus ist.

4. Sei (M, g) eine n -dimensionale kompakte orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{Ric} \geq 0$ und $b_1(M) = n$. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist die Riemannsche universelle Überlagerung $(\mathbb{R}^n, g_{\text{can}})$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ operiert durch Isometrien.

a) Zeigen Sie, dass $\pi_1(M)$ nur durch Translationen operiert.

b) Zeigen Sie, dass (M, g) isometrisch zu einem flachen Torus ist.