Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2013

## Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

## Übungsblatt 7

1. Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ mit Winkelkoordinaten $(\theta, \phi)$ und $\Phi$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi \colon T^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\longmapsto ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\Phi$ eine Einbettung ist.

b) Beweisen Sie, dass die von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierte Metrik auf $T^2$ gegeben ist durch

$$g = d\theta \otimes d\theta + (2+\cos\theta)^2 d\phi \otimes d\phi.$$

Ist $T^2$ mit dieser Metrik isometrisch zu einem Torus der Form $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_\Gamma)$ für ein Gitter $\Gamma$?

2. a) Sei $\phi \colon (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ eine Riemannsche Überlagerung, so dass $\tilde{g} = \phi^* g$. Wir können die Mannigfaltigkeit $M$ schreiben als $\tilde{M}/G$, wobei $G$ die Gruppe der Decktransformationen ist. Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf $M$ bijektiv den Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf $\tilde{M}$ entsprechen, die invariant unter $G$ sind.

b) Bestimmen Sie das Spektrum des Laplace-Operators auf den reell projektiven Räumen $\mathbb{RP}^n$ mit der von der runden Sphäre induzierten Metrik.

3. Sei $(f_1, f_2)$ eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^2$ und $G$ die Gruppe von Diffeomorphismen, die erzeugt wird von den Abbildungen $\gamma_1, \gamma_2$, gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(xf_1 + yf_2) &= (x+1)f_1 - yf_2 \\ \gamma_2(xf_1 + yf_2) &= xf_1 + (y+1)f_2. \end{aligned}$$

Der Quotient $K = \mathbb{R}^2/G$ heißt *Kleinsche Flasche*.

a) Zeigen Sie, dass die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ eine Metrik auf $K$ induziert, genau dann, wenn $f_1, f_2$ orthogonal sind. Die Mannigfaltigkeit $K$ mit einer dieser Metriken heißt flache Kleinsche Flasche.

b) Beweisen Sie, dass jede flache Kleinsche Flasche eine zweifache Riemannsche Überlagerung durch einen Torus $\mathbb{R}^2/\Gamma$ hat, wobei $\Gamma$ ein rechteckiges Gitter der Form

$$\Gamma = a_1\mathbb{Z}e_1 \oplus a_2\mathbb{Z}e_2$$

mit der Standardbasis $e_1, e_2$ des $\mathbb{R}^2$ ist.

4. Seien $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ und $S^1$ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Sei $G$ die von dem Diffeomorphismus $\gamma(x, z) = (x+1, e^{i\theta}z)$ auf $\mathbb{R} \times S^1$ erzeugte Gruppe. Zeigen Sie, dass für die Standardproduktmetrik auf $\mathbb{R} \times S^1$ die Gruppe $G$ eine Gruppe von Isometrien und $T = (\mathbb{R} \times S^1)/G$ ein flacher Torus ist. Berechnen Sie das Gitter $\Gamma$, so dass der Torus $T$ isometrisch zu $\mathbb{R}^2/\Gamma$ ist.