Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2013

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 6

1. Sei γ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische und Y ein Vektorfeld entlang γ. Mit $Y^\perp$ bezeichnen wir die orthogonale Projektion von Y auf $\dot\gamma^\perp$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\nabla}{dt}\left(Y^\perp\right) = \left(\frac{\nabla}{dt}Y\right)^\perp .$$

2. Sei (M^{2n}, g) eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit positiver Schnittkrümmung K. Sei γ eine geschlossene Geodätische in M, d.h. die Geodätische γ ist eine Immersion von S^1 in M.

a) Zeigen Sie, dass es ein paralleles Vektorfeld $V(t)$ entlang γ gibt, das senkrecht auf $\dot\gamma$ steht und wohldefiniert ist, d.h. am Anfang- und Endpunkt von γ denselben Wert hat.

b) Zeigen Sie, dass es eine geschlossene Kurve in M homotop zu γ gibt, die echt kleinere Länge als γ hat. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für die zweite Variation der Länge einer geschlossenen Geodätischen $\gamma\colon [a,b] \to M$ die Formel gilt:

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} L(s) = -\int_a^b g(\ddot V + R(V,\dot\gamma)\dot\gamma, V)dt.$$

3. (i) Sei $\pi : (\tilde M, \tilde g) \to (M, g)$ eine lokale Isometrie, mit $(\tilde M, \tilde g)$ zusammenhängend und vollständig. Weiter sei M zusammenhängend. Zeigen Sie, dass dann $\pi : \tilde M \to M$ eine Überlagerung ist, d.h. π ist surjektiv und um jeden Punkt $m \in M$ existiert eine Umgebung U, so dass $\pi^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung offener Mengen $\tilde U_i$ ist und die Einschränkung von π auf $\tilde U_i$ ist eine Isometrie von $\tilde U_i$ auf U. (ii) Sei $\pi : (\tilde M, \tilde g) \to (M, g)$ eine Riemannsche Submersion. Zeigen Sie: ist $(\tilde M, \tilde g)$ vollständig, so auch (M, g).

4. Sei $M \subset N$ eine Untermanigfaltigkeit und $q \in N \setminus M$ ein Punkt, der hinreichend nahe an M liegt. Sei weiter $p \in M$ ein Punkt in M mit minimalem Abstand von q. Die verbindende Geodätische werde mit γ_v bezeichnet, d.h. $\gamma_v : [0.1] \to M$ mit $\gamma_v(0) = p, \gamma_v(1) = q$ und $\dot\gamma_v(0) = v$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $v \in T_pM^\perp$.