Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57 Sommersemester 2013

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 5

1. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *homogen*, falls es für alle Paare p, q von Punkten in M eine Isometrie gibt, die p auf q abbildet. Beweisen Sie, dass homogene Riemannsche Mannigfaltigkeiten geodätisch vollständig sind.

2. Beweisen Sie: Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist genau dann geodätisch vollständig, wenn die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von M kompakt sind.

3. Sei X ein Killing-Vektorfeld auf einer zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und $p \in M$ ein Punkt, so dass

$$X(p) = 0 \text{ und } \nabla X(p) = 0.$$

Mit ϕ_t bezeichnen wir den lokalen Fluß von X.

a) Zeigen Sie, dass $[X, Y](p) = 0$ für alle Vektorfelder Y und $d\phi_t \colon T_pM \to T_pM$ für alle Zeiten t die Identität ist.

b) Zeigen Sie, dass ϕ_t in einer kleinen Umgebung von p die Identität für alle Zeiten t ist.

c) Beweisen Sie, dass $X \equiv 0$ auf ganz M.

4. Sei $M^n \subset N^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit und g eine beliebige Riemannsche Metrik auf M. Dann ist das *Normalenbündel* $\pi \colon TM^\perp \to M$ definiert durch

$$T_xM^\perp = \{u \in T_xN \mid g(u, w) = 0 \ \forall w \in T_xM\}, \quad x \in M.$$

Das Normalenbündel ist ein Vektorbündel vom Rang k über M. Mit $TM_\epsilon^\perp$ bezeichnen wir das Scheibenbündel vom Radius ϵ in $TM^\perp$. Beweisen Sie: Ist M kompakt, dann ist für hinreichend kleines ϵ das Bild von $TM_\epsilon^\perp$ unter der Exponentialabbildung, definiert auf den Fasern durch

$$\exp_x \colon T_xM_\epsilon^\perp \to N,$$

eine offene Umgebung U von M in N. Die Menge U heißt *Tubenumgebung*.