Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57
Sommersemester 2013

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 4

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $X = TM$ das Tangentialbündel. Zeigen Sie, dass es auf der Mannigfaltigkeit X ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld V gibt, dessen Flußlinien alle von der Form

$$t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$$

sind, wobei γ eine Geodätische auf M ist. Der Fluß dieses Vektorfeldes heißt der *geodätische Fluß*.

2. Sei $\phi\colon (M, g) \to (N, h)$ eine Isometrie von Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Beweisen Sie:
a) ϕ bildet Geodätische auf Geodätische ab.
b) $\phi(\exp_p(tv)) = \exp_{\phi(p)}(td\phi_p v)$ für alle $p \in M, v \in T_pM$.

3. Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \subset \overline{M}$ eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit. Dann heißt M *total geodätisch*, falls die zweite Fundamentalform von M verschwindet: $II = 0$. Zeigen Sie, dass M genau dann total geodätisch ist, wenn jede Geodätische von M eine Geodätische von $\overline{M}$ ist.

4. a) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von T_pM. Seien $\{\gamma_i\}$ die Geodätischen mit Anfangswerten $\gamma_i(0) = p$ und $\dot{\gamma}_i(0) = e_i$. Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Funktion f auf M die Formel gilt:

$$\Delta f(p) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} (f \circ \gamma_i)(t)$$

b) Sei $\pi\colon (M, g) \to (N, h)$ eine Riemannsche Submersion, deren Fasern alle total geodätisch sind. Beweisen Sie für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ die folgende Formel für den Laplace-Operator:

$$\Delta^M(f \circ \pi) = (\Delta^N f) \circ \pi.$$