Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Uwe Semmelmann
Zimmer 7.544 V57

Sommersemester 2013

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 3

1. Sei X ein Vektorfeld entlang einer glatten Kurve $c : I \to M$. Zeigen Sie: a) Gilt $\dot{c}(t_0) \neq 0$ dann existiert ein glattes Vektorfeld $\tilde{X}$ in einer Umgebung von $c(t_0)$, so dass $\tilde{X}_{c(t)} = Z(t)$ für alle t in einer hinreichend kleinen Umgebung von t_0. Insbesondere ist damit c lokal eine Integralkurve. b) $\dot{X}(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}\tilde{X}$ für t nahe t_0. c) Ist c eine Integralkurve von X, dann gilt $X(f) \circ c = \frac{f \circ c}{dt}$.

2. Sei $X \in T_pM$, Y ein Vektorfeld auf M und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$. Bezeichne $P_c^{\nabla}(p, c(t))$ die Parallelverschiebung entlang c, von p nach $c(t)$. Beweisen Sie folgende Formel für die kovariante Ableitung:

$$\nabla_X Y \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} P_c^{\nabla}(p, c(t))^{-1}\, Y_{c(t)} \;.$$

3. Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit einer bi-invarianten Metrik. Zeigen Sie, dass dann die Geodätischen durch e genau die 1-parametrigen Untergruppen, dh. die Kurven der Form $c(t) = \exp tX$ für $X \in \mathfrak{g}$, sind.

4. Beweisen Sie: Sei $c : I \to M$ eine nicht-konstante Geodätische. Dann ist eine Umparametrisierung $c \circ h : J \to M$ genau dann eine Geodätische, wenn $h(t) = at + b$ für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.