Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Uwe Semmelmann
Zimmer 7.544 V57

Sommersemester 2013

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 2

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ zwei glatte Funktionen auf M. Beweisen Sie folgende Formel:

$$\Delta(f \cdot h) \;=\; \Delta f \cdot h \;+\; f \cdot \Delta h \;-\; 2\, g(df, dh) \;.$$

2. Sei $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ eine Isometrie Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Beweisen Sie für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$:

$$\Delta^M(f \circ \varphi) \;=\; (\Delta^N f) \circ \varphi \;.$$

3. Sei E ein Vektorbündel mit einer Fasermetrik g und assoziierter L^2-Metrik $(\cdot, \cdot)$. Weiter sei ∇ eine metrische kovariante Ableitung auf Schnitten von E mit formal-adjungierten Operator $\nabla^* : \Gamma(T^*M \otimes E) \to \Gamma(E)$, dh. es gilt

$$(\nabla e, f) = (e, \nabla^* f)$$

für alle Schnitte $e \in \Gamma(E)$ und $f \in \Gamma(T^*M \otimes E)$. Beweisen Sie:

$$\nabla^* f \;=\; -\,\mathrm{tr}\,(\nabla^{T^*M \otimes E} f) \;.$$

Dabei ist der Tensorprodukt-Zusammenhang auf einem Tensorprodukt $E \otimes F$ definiert durch

$$\nabla^{E \otimes F}_X (e \otimes f) \;:=\; \nabla^E_X e \otimes f \;+\; e \otimes \nabla^F_X f \;.$$

wobei $\{e_i\}$ eine lokale orthonormale Basis bezeichnet.

4. Zeigen Sie, unter Verwendung der Bezeichnungen von Aufgabe 4, dass folgende Formel gilt:

$$\nabla^* \nabla e \;=\; -\sum_i \left[\, \nabla_{e_i}(\nabla_{e_i} e) \;-\; \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}\, e \right] ,$$