Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Mark Hamilton
Zimmer 7.548 V57

Sommersemester 2013

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 10

1. Sei (M, g) eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $I(M, g)$ die Isometriegruppe. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathrm{Ric} < 0$, dann ist $I(M, g)$ endlich.

b) Ist $\mathrm{Ric} \leq 0$, dann sind alle Killing-Vektorfelder parallel und die Zusammenhangskomponente $I_0(M, g)$ der Eins ist ein Torus.

c) Ist $\mathrm{Ric} = 0$, dann ist $\dim I(M, g) = b_1(M)$.

2. Sei (M^n, g), $n \geq 2$, eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric} \leq 0$. Beweisen Sie, dass jedes konforme Killing-Vektorfeld schon ein Killing-Vektorfeld ist.

3. Sei (M^n, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie folgende Formel für $\nabla^*\nabla$ auf $\Omega^k(M)$:

$$\nabla^*\nabla = \frac{1}{k+1} d^*d + \frac{1}{n-k+1} dd^* + P^*P.$$

Berechnen Sie dazu beide Seiten in einem Punkt p, indem Sie eine lokale Orthonormalbasis $\{e_i\}$ mit $\nabla_{e_i} e_i(p) = 0$ betrachten.

4. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang k mit einem Zusammenhang ∇ über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathcal{P}(E)$ der parallelen Schitte in E höchstens Dimension k hat.