Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Uwe Semmelmann
Zimmer 7.544 V57

Sommersemester 2013

Vorlesung: Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (Prof. Semmelmann)

Übungsblatt 1

1. Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und sei ω eine beliebige k-Form. Zeigen Sie, dass für jedes Vektorfeld X die Gleichung

$$\nabla_X(*\,\omega) \;=\; *\nabla_X\,\omega\ ,$$

erfüllt ist. In anderen Worten der Bündelisomorphismus $* : \Lambda^k T^*M \to \Lambda^{n-k} T^*M$ ist parallel.

2. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und jedes Vektorfeld X auf M folgende Beziehung gilt:

$$\mathrm{div}\,(f\,X) \;=\; f\,\mathrm{div}\,X \;+\; g(\mathrm{grad} f, X)\ .$$

3. Sei X ein Vektorfeld auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g), in lokalen Koordinaten (U, x) geschrieben als $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathrm{div}\,X \;=\; \bar{g}^{-\frac{1}{2}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\bar{g}}\,a_i)\ ,$$

gilt, wobei $\bar{g} = \det(g_{ij})$.

4. Sei X ein beliebiges Vektorfeld und sei ω eine beliebige k-Form. Zeigen Sie dann die Gleichungen

$$*(X \lrcorner \omega) \;=\; (-1)^{k-1}\, X^\flat \wedge *\omega \quad \text{and} \quad *\,(X^\flat \wedge \omega) \;=\; (-1)^k\, X \lrcorner *\,\omega\ .$$