

VORLESUNGSSKRIPT DIFFERENTIALGEOMETRIE WS 16/17

UWE SEMMELMANN

Date: 6. März 2017.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	5
1.1. Topologische Mannigfaltigkeiten	5
1.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	8
1.3. Projektive Räume	10
1.4. Der Satz vom regulären Wert	11
1.5. Immersionen, Submersionen, Einbettungen	15
2. Der Tangentialraum	17
2.1. Die geometrische Definitionen des Tangentialraumes	17
2.2. Die algebraische Definition des Tangentialraumes	19
2.3. Das Tangentialbündel	25
2.4. Vektorbündel	26
3. Vektorfelder	27
3.1. Vektorfelder als Derivationen	27
3.2. Die Lie-Algebra der Vektorfeldern	29
3.3. Das Bild von Vektorfeldern unter Diffeomorphismen	30
3.4. Vektorfelder und Differentialgleichungen	31
3.5. Lie-Ableitung von Vektorfeldern	33
3.6. Ergänzungen zu Vektorfeldern	34
4. Integral-Mannigfaltigkeiten	38
4.1. Distributionen und Integral-Mannigfaltigkeiten	38
4.2. Integrale Distributionen	39
4.3. Satz von Frobenius für Distributionen	41
4.4. Immersierte Untermannigfaltigkeiten	42
5. Lie-Gruppen	44
5.1. Die Lie-Algebra - Lie-Gruppe Korrespondenz	45
5.2. Homomorphismen	47
5.3. Die Exponential-Abbildung	50
6. Transformationsgruppen und homogene Mannigfaltigkeiten	55
6.1. Beispiele homogener Mannigfaltigkeiten	60

7. Differentialformen	62
7.1. Der Vektorraum der k -Formen	62
7.2. Das Verhalten unter Abbildungen	64
7.3. Eine Basis im Raum der Formen	64
7.4. Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten	66
7.5. Differentialformen in lokalen Koordinaten	68
7.6. Das Zurückziehen von Differentialformen	68
7.7. Das Differential	68
7.8. Lie-Ableitung von Differentialformen	72
7.9. Symplektische Mannigfaltigkeiten	76
7.10. Die de Rahm - Kohomologie	82
7.11. Bemerkungen zu rot , grad und div	86
7.12. Beispiel: Die Maxwell Gleichungen	89
7.13. Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten	90
8. Orientierungen	91
9. Integration auf Mannigfaltigkeiten	98
10. Riemannsche Metriken	101
10.1. Definition und Existenz Riemannscher Metriken	101
10.2. Beispiele Riemannscher Metriken	102
10.3. Isometrien	104
10.4. Mannigfaltigkeiten als metrische Räume	105
10.5. Das kanonische Volumenelement	106
11. Differential-Operatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten	108
11.1. Der Hodge-Stern-Operator	108
11.2. Der Gradient	109
11.3. Das Kodifferential	109
11.4. Der Laplace Operator	111
12. Das Hodge-Theorem	113
12.1. Schwache Lösungen	113
12.2. Die Hodge-Zerlegung	114

12.3.	Das Hodge-Theorem	115
12.4.	Die Poincaré-Dualität	116

1. DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEITEN

1.1. Topologische Mannigfaltigkeiten. Topologische Mannigfaltigkeiten sollen als spezielle topologische Räume definiert werden. Dafür sind zunächst einige Grundbegriffe der Topologie zu wiederholen.

Sei M eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{O} = \mathcal{O}_M \subset \mathcal{P}(M)$ heisst *Topologie* auf M , falls

- (1) $\emptyset, M \in \mathcal{O}$
- (2) $U, V \in \mathcal{O}$ dann ist auch $U \cap V \in \mathcal{O}$
- (3) $U_i \in \mathcal{O}, i \in I$ dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Ein Paar $(M, \mathcal{O})$ heisst *topologischer Raum*. Eine Teilmenge heisst *offen*, falls $U \in \mathcal{O}$. Eine Teilmenge $A \subset M$ heisst *abgeschlossen*, falls $M \setminus A$ offen.

Beispiele: (1) Die offenen Mengen der *Standardtopologie* auf $\mathbb{R}^n$ sind die Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$, für die zu jedem Punkt $x \in U$ eine kleine Kugel $B_r(x)$ existiert, die ganz in U liegt. (2) Die *diskrete Topologie* auf einer Menge M ist definiert durch $\mathcal{O} = \mathcal{P}(M)$, d.h. jede Teilmenge von M ist offen. (3) Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ ein topologischer Raum und $X \subset M$ eine Teilmenge. Dann sind die offenen Mengen der *Teilraumtopologie* (auch *induzierte Topologie*) auf X genau die Schnitte von X mit offenen Mengen in M .

Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$ heisst *Basis der Topologie* $\mathcal{O}_M$, falls die offenen Mengen aus $\mathcal{O}_M$ genau die Vereinigungen der Mengen aus $\mathcal{B}$ sind. Insbesondere ist also $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}_M$.

Beispiel: Eine (abzählbare) Basis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ bilden die Kugeln $B_r(x)$ mit rationalem Radius r um Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit rationalen Koordinaten.

Eine Abbildung $f: (M, \mathcal{O}_M) \rightarrow (N, \mathcal{O}_N)$ heisst *stetig*, falls $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_M$ für alle $V \in \mathcal{O}_N$. Eine bijektive Abbildung $f: M \rightarrow N$ heisst *Homöomorphismus* falls f und f^{-1} stetig sind. In diesem Fall nennt man die Räume M und N zueinander *homöomorph*.

Ein topologischer Raum M heisst *lokal homöomorph* zu $\mathbb{R}^n$ (auch *lokal euklidisch*), falls für alle $p \in M$ eine offene Menge $U \subset M$ mit $p \in U$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und ein Homöomorphismus $\phi: U \rightarrow V$ existieren.

Ein topologischer Raum M heisst *zusammenhängend*, falls kein $U \subset M, U \neq \emptyset, M$ existiert, dass zugleich offen und abgeschlossen ist. Äquivalent ist, dass M nicht als nicht-triviale Vereinigung zweier disjunkter offener Mengen dargestellt werden kann. Eine Teilmenge $X \subset M$ heisst *zusammenhängend*, falls X mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

Ein topologischer Raum M heisst *wegzusammenhängend*, falls sich je zwei Punkte in M durch einen stetigen Weg in M verbinden lassen, d.h. für je zwei Punkte $p, q \in M$ existiert eine stetige Abbildung $c: [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$.

Lemma 1.1. *Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend. Zusammenhängende, lokal euklidische Räume sind auch wegzusammenhängend.*

Ein topologischer Raum heisst *kompakt* falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilberdeckung besitzt. Ein topologischer Raum M heisst *hausdorff* (auch T_2), falls für alle $p, q \in M, p \neq q$ offene Mengen $U, V \subset M$ existieren mit $p \in U, q \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Bemerkung Aus lokal euklidisch folgt *nicht* hausdorff.

Definition 1.2. *Eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum M mit:*

- (1) M ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$
- (2) M ist hausdorff
- (3) M besitzt eine abzählbare Basis der Topologie

Die lokalen Homöomorphismen $\phi: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ heissen Karten (oder auch lokale Koordinatensysteme) von M .

Genaugenommen muss man noch überprüfen, dass die Dimension wohldefiniert ist, also nicht vom Punkt abhängig ist. Das folgt aus dem Satz von Brouwer bzw. aus dem Satz über die Invarianz des Gebietes.

Satz: (Brouwer) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist die Menge $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen, d.h. f ist ein Homöomorphismus.*

Folgerung: *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ zwei offene Mengen. Sind U und V zueinander homöomorph, so folgt $n = m$.*

Beweis: Man nimmt $n \neq m$ an und o.B.d.A. auch $m < n$. Sei $i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ die kanonische Einbettung $i(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Dann ist i stetig, injektiv und $i(\mathbb{R}^m)$ enthält keine in $\mathbb{R}^n$ offene Menge.

Sei nun $\phi: U \rightarrow V$ der laut Voraussetzung existierende Homöomorphismus. Dann ist auch $f := i|_V \circ \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Aus dem Satz von Brouwer folgt nun, dass die Menge $f(U) = i(V) \subset i(\mathbb{R}^n)$ offen in $\mathbb{R}^n$. Das ist ein Widerspruch und es muss also $m = n$ gelten. $\square$

Nach dieser Folgerung kann es also für einen Punkt $p \in M$ nicht zwei Karten U_1, U_2 geben, mit $p \in U_1 \cap U_2$ und U_1 ist homöomorph zu einer offenen Menge $V_1 \subset \mathbb{R}^n$ und U_1 ist homöomorph zu einer offenen Menge $V_2 \subset \mathbb{R}^m$ mit $n \neq m$. Denn sind $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ und $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2$ die beiden Karten-Homöomorphismen, dann ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: V_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus, also $m = n$.

Im Folgenden sollen drei Beispiele topologischer Mannigfaltigkeiten vorgestellt werden.

- (1) Der n -dimensionale *euklidische Raum* $M = \mathbb{R}^n$. Hier hat man eine Karte, die durch die Identität gegeben ist. Analog ist auch jede offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.
- (2) Die n -dimensionale *Sphäre*: $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Als Topologie auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wählt man die von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierte Topologie. Dann ist klar, dass der topologische Raum S^n hausdorff ist und eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Auf S^n kann man mittels der stereographischen Projektion zwei Karten definieren, die zeigen, dass S^n lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

Sei $U_1 = S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ und $U_2 = S^n \setminus \{-e_{n+1}\}$. Dann definiert man Homöomorphismen $g_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 1, 2$ durch

$$g_1(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n), \quad g_2(x) = \frac{1}{1 + x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n) .$$

- (3) Der n -dimensionale *hyperbolische Raum*: $H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1, x_0 > 0\}$. Hier reicht eine Karte, d.h. H^n ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. Man definiert $\phi: H^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\phi(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Die (stetige) Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad \psi(y) = (\sqrt{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}, y_1, \dots, y_n)$$

Bemerkung: Der Doppelkegel $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$ ist keine topologische Mannigfaltigkeit.

Satz 1.3. *Eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ist eine abzählbare Menge von Punkten mit der diskreten Topologie. Insbesondere sind 0-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeiten endlich.*

Beweis: Sei M eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann existiert eine offene Menge $U \subset M$ mit $p \in U$, die homöomorph zu $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ist. Daraus folgt $U = \{p\}$, d.h. die Punkte in M sind offene Mengen und M trägt damit die diskrete Topologie. $\square$

Bemerkung: Eine zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu S^1 oder $\mathbb{R}^1$.

Satz 1.4. *Sei M eine n -dimensionale und N eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist $M \times N$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n + m$.*

Beispiel: Sei $M = N = S^1$, dann ist $T^2 = S^1 \times S^1$ der 2-dimensionale *Torus*. Allgemeiner hat man den n -dimensionalen Torus $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$.

1.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Es soll nun für topologische Mannigfaltigkeiten der Begriff einer differenzierbaren Abbildung definiert werden. Dazu muss zunächst auf der topologischen Mannigfaltigkeit eine differenzierbare Struktur eingeführt werden. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Seien $(U, x), (V, y)$ Karten um $p \in M$. Dann gilt:

$$f \circ y^{-1} = (f \circ x^{-1}) (x \circ y^{-1}) .$$

Man sieht, dass für die Definition der Differenzierbarkeit von f mit Hilfe von Karten, die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel $x \circ y^{-1}$ benötigt wird.

Definition 1.5. Zwei Karten $(U, x), (V, y)$ heißen verträglich falls die Abbildung

$$x \circ y^{-1}: y(U \cap V) \rightarrow x(U \cap V)$$

ein Diffeomorphismus von offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist. Die Abbildung $x \circ y^{-1}$ heisst Kartenwechsel. Eine Menge von Karten $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ heisst Atlas von M , falls die Karten M überdecken und je zwei Karten verträglich sind. Ein Atlas $\mathcal{A}$ heisst maximaler Atlas, falls jede Karte, die mit allen Karten in $\mathcal{A}$ verträglich ist, schon in $\mathcal{A}$ liegt.

Lemma 1.6. Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas für M und sei $\mathcal{A}_{max}$ die Menge aller Karten von M , die mit allen Karten aus $\mathcal{A}$ verträglich sind. Dann gilt

- (1) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{max}$
- (2) $\mathcal{A}_{max}$ ist ein Atlas
- (3) $\mathcal{A}_{max}$ ist maximaler Atlas
- (4) Jeder Atlas ist in genau einem maximalen Atlas enthalten

Definition 1.7. Eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einem maximalen Atlas.

Bemerkung: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten nennt man auch C^∞ - oder glatte Mannigfaltigkeiten. Ein maximaler Atlas definiert eine differenzierbare Struktur. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten, die keine differenzierbare Strukturen zulassen. Auf einer topologischen Mannigfaltigkeit kann es “unterschiedliche” differenzierbare Strukturen geben.

Notation: Im Weiteren soll mit “Mannigfaltigkeit” immer “differenzierbare Mannigfaltigkeit” gemeint sein.

Beispiele: (1) Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist trivialerweise eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Als Atlas nimmt man hier $\mathcal{A} = \{(U, \text{id})\}$. (2) Die Sphäre S^n ist eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Seien $(U_i, g_i), i = 1, 2$ die oben eingeführten Karten. Zu überprüfen bleibt, ob der Kartenwechsel $g_1 \circ g_2^{-1}$ differenzierbar ist. Für

$x \in g_2(U_1 \cap U_2) = g_2(S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$g_1 \circ g_2^{-1}(x) = g_1 \left(\frac{2x}{1 + \|x\|^2}, \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2}} \cdot \frac{2x}{1 + \|x\|^2} = \frac{2x}{2\|x\|^2} = \frac{x}{\|x\|^2}$$

Damit sind die Karten (U_1, g_1) und (U_2, g_2) verträglich. Da sie auch S^n überdecken erhält man den Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, g_i), i = 1, 2\}$.

Definition 1.8. Seien M, N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ heisst differenzierbar, wenn es um jeden Punkt $p \in M$ Karten (U, x) um p und (V, y) um $f(p)$ gibt, so dass auf einer Umgebung $W \subset x(f^{-1}(V) \cap U)$ von $x(p)$ die Abbildung

$$y \circ f \circ x^{-1}: W \subset x(f^{-1}(V) \cap U) \rightarrow y(V)$$

differenzierbar ist. Ein Diffeomorphismus ist ein Homöomorphismus f , für den f und f^{-1} differenzierbar sind. In diesem Fall nennt man die Mannigfaltigkeiten M und N diffeomorph.

Bemerkungen: (1) Genauer kann man noch von Differenzierbarkeit in einem Punkt und k -facher Differenzierbarkeit sprechen. Im Weiteren soll “differenzierbar” immer “beliebig oft differenzierbar” bedeuten. Solche Abbildungen nennt man dann *glatt* oder C^∞ . (2) Ist f in p bzgl. eines Paares von Karten differenzierbar, so auch für alle anderen Karten um p bzw. $f(p)$. Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der differenzierbaren Funktionen auf M mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichnet man mit $C^\infty(M)$.

Beispiele:

- (1) Die antipodale Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n, f(y) = -y$ ist differenzierbar. (ÜA)
- (2) Auf $\mathbb{R}$ seien die Atlanten $\mathcal{A}_1 = \{x = \text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{\tilde{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{x}(t) = t^3\}$ fixiert. Dann sind x und $\tilde{x}$ keine verträglichen Karten, da $x \circ \tilde{x}^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$ nicht differenzierbar ist. Damit ist $\text{id}: (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1, \max}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2, \max})$ differenzierbar, aber kein Diffeomorphismus, denn die Abbildung $\text{id}: (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2, \max}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1, \max})$ ist nicht differenzierbar. Allerdings liefert die Abbildung $f(t) = \sqrt[3]{t}$ einen Diffeomorphismus $f: (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{1, \max}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{2, \max})$.

Bemerkungen:

- (1) Für $n \neq 4$ ist jede differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^n$ diffeomorph zur Standardstruktur $\mathcal{A}_{\max}$ zu $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$.
- (2) Auf $\mathbb{R}^4$ gibt es überabzählbar viele differenzierbare Strukturen, die paarweise nicht diffeomorph sind (= exotische Strukturen).
- (3) Jede topologische Mannigfaltigkeit in Dimension 1, 2 und 3 besitzt genau eine differenzierbare Struktur.
- (4) Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten in Dimension 4, die keine differenzierbare Struktur zulassen.

- (5) Es gibt für $n \geq 7$ Mannigfaltigkeiten, die homöomorph zu S^n aber nicht diffeomorph sind. Diese nennt man exotische Sphären. In jeder Dimension $n, n \geq 7$, gibt es höchstens endlich viele exotische Sphären. Die Existenz einer exotischen S^4 ist ungeklärt.

1.3. Projektive Räume. Im Folgenden soll noch ein wichtiges Beispiel differenzierbarer Mannigfaltigkeiten vorgestellt werden: die projektiven Räume. Diese sind definiert als Quotientenräume.

Sei X ein topologischer Raum, sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X , dann bezeichne $X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Auf dieser lässt sich eine Topologie definieren. Dafür bezeichne $\pi: X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]$ die kanonische Projektion. Dann ist eine Menge $U \subset X/\sim$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset X$ offen ist. Die Quotiententopologie wird damit die größte (feinste) Topologie auf $X/\sim$, für die die kanonische Projektion stetig ist. Im Allgemeinen ist $X/\sim$ keine Mannigfaltigkeit, noch nicht einmal hausdorff. Die Eigenschaften kompakt und zusammenhängend übertragen sich von X auf $X/\sim$. Sei Y ein beliebiger topologischer Raum. Eine Abbildung $f: X/\sim \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi: X \rightarrow Y$ stetig ist.

Auf S^n betrachtet man die Äquivalenzrelation $x \sim -x$. Dann ist der *reell-projektive Raum* definiert als

$$\mathbb{RP}^n = S^n / \sim,$$

versehen mit der Quotientenraumtopologie. Offensichtlich ist $\mathbb{RP}^n$ ein kompakter, zusammenhängender topologischer Raum. Das $\mathbb{RP}^n$ eine abzählbare Basis der Topologie besitzt und hausdorff ist, wird später gezeigt (im Zusammenhang mit Gruppenwirkungen auf Mannigfaltigkeiten). Man kann $\mathbb{RP}^n$ auch mit dem Raum aller 1-dimensionalen Unterräume, also aller Geraden durch die Null in $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren. Dafür bildet man die Äquivalenzklasse $[x]$ auf die Gerade durch x ab. Es ist

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

wobei $x \sim y$ genau dann, wenn $x = \lambda y$ für ein $\lambda \neq 0$, also genau dann, wenn x und y auf einer Geraden durch die Null liegen.

Auf dem reell-projektiven Raum kann man folgendermaßen Karten definieren. Sei dazu $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ die kanonische Projektion. Man schreibt

$$\pi(x_0, \dots, x_n) = [(x_0, \dots, x_n)] = [x_0 : \dots : x_n].$$

Man betrachtet die offenen Mengen $V_i := \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, i = 0, \dots, n$ und definiert für $i = 0, \dots, n$ Karten auf $\mathbb{RP}^n$ durch

$$U_i := \pi(V_i) = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\} = \{[x_0 : \dots : 1 : \dots : x_n]\}$$

mit der 1 an der $(i+1)$ ten Stelle. Lokale Homöomorphismen $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind gegeben durch

$$\varphi_i([x]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Tatsächlich sind die Abbildungen φ_i wohl-definiert, denn

$$[x] = [y] \leftrightarrow x \sim y \leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : x = \lambda y \leftrightarrow \frac{x_k}{y_k} = \frac{x_i}{y_i} \leftrightarrow \frac{x_k}{x_i} = \frac{y_k}{y_i} \leftrightarrow \varphi_i([x]) = \varphi_i([y])$$

für alle k, i . Die Abbildung φ_i ist bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$\varphi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = [y_0 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_{n-1}]$$

Offensichtlich ist damit φ_i für alle i ein Homöomorphismus. Weiterhin ist der Kartenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ ein Diffeomorphismus. Man findet

$$\begin{aligned} (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(y_0, \dots, y_{n-1}) &= \varphi_j([y_0 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_{n-1}]) \\ &= \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_j} \right). \end{aligned}$$

Zusammenfassend ist damit der folgende Satz bewiesen

Satz 1.9. *Der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist eine n -dimensionale kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit.*

Etwas allgemeiner kann man zu jedem $(n+1)$ -dimensionalen Vektorraum V über einem Körper (oder Schiefkörper) K einen projektiven Raum definieren:

$$KP^n := \text{Menge aller 1-dimensionalen Unterräume in } V.$$

Diese Räume sind Quotientenräume von V bzgl. der Äquivalenzrelation: $v \sim w$ genau dann, wenn v und w linear abhängig sind. Für $K = \mathbb{C}$ erhält man den *komplex projektiven Raum* $\mathbb{CP}^n$ und für $K = \mathbb{H}$ den *quaternionisch projektiven Raum* $\mathbb{HP}^n$, d.h.

Bemerkung: Es gilt $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$. Für $n \geq 2$ ist $\mathbb{RP}^n$ nicht diffeomorph zu S^n , denn $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$ und $\pi_1(S^n) = 1$ für $n \geq 2$.

Die projektiven Räume sind mit den Sphären durch die sogenannte *Hopf-Faserung* verbunden. Das sind jeweils Abbildungen der Form $(z_0, \dots, z_n) \mapsto [z_0 : \dots : z_n]$,

$$S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n, \quad S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n, \quad S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{HP}^n$$

Dabei ist das Urbild eines Punktes im reell projektiven Raumes gleich $\mathbb{Z}_2$, im komplex-projektiven Raum diffeomorph zu S^1 und im quaternionisch projektiven Raum diffeomorph zu S^3 . Es gibt noch die Hopf-Faserung $S^{15} \rightarrow S^8$ mit Urbild (= Faser) diffeomorph zu S^7 .

1.4. Der Satz vom regulären Wert. In diesem Abschnitt soll die Konstruktion differenzierbarer Mannigfaltigkeiten als Urbild regulärer Werte beschrieben werden. Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung.

Definition 1.10. Seien (U, x) bzw. (V, y) Karten um p bzw. $f(p)$. Dann ist der Rang von f in p definiert als der Rang der Jacobi-Matrix von $y \circ f \circ x^{-1}$, d.h.

$$\operatorname{rg}_p(f) = \operatorname{Rang} \left(\frac{\partial(y f x^{-1})_i}{\partial x_j} \right) = \operatorname{Rang} J_{x(p)}(y f x^{-1}) ,$$

wobei $J_p(r)$ im Weiteren die Jacobi-Matrix einer Abbildung r im Punkt p bezeichnet.

Bemerkung: Der Rang der Jacobi-Matrix $J_{x(p)}(y f x^{-1})$ hängt nicht von den gewählten Karten (U, x) und (V, y) ab, d.h. der Rang $\operatorname{rg}_p(f)$ ist damit wohldefiniert.

Beweis: Seien (U, x) und $(\tilde{U}, \tilde{x})$ Karten um p und (V, y) und $(\tilde{V}, \tilde{y})$ Karten um $f(p)$. Dann gilt

$$\tilde{y} f \tilde{x}^{-1} = (\tilde{y} y^{-1}) \circ (y f x^{-1}) \circ (\tilde{x} x^{-1})^{-1} .$$

Nun sind die Kartenwechsel $\tilde{y} y^{-1}$ bzw. $\tilde{x} x^{-1}$ Diffeomorphismen und deren Jacobi-Matrizen damit Isomorphismen, die den Rang einer linearen Abbildung also nicht ändern. Daraus und aus der Kettenregel folgt nun

$$\operatorname{rg} J(\tilde{y} f \tilde{x}^{-1}) = \operatorname{rg} (J(\tilde{y} y^{-1}) \circ J(y f x^{-1}) \circ J(\tilde{x} x^{-1})^{-1}) = \operatorname{rg} J(y f x^{-1}) .$$

Bemerkung: Die Abbildung $p \mapsto \operatorname{rg}_p(f)$ ist unterhalbstetig, d.h. hat f in p den Rang r , dann gilt $\operatorname{rg}_q(f) \geq r$ für alle q in einer kleinen Umgebung von p .

Aus der Analysis ist bekannt, dass der Rang das lokale Verhalten von Abbildungen bestimmt. Die entsprechenden Sätze übertragen sich nun direkt auf Mannigfaltigkeiten. Zunächst überträgt sich der Rangsatz.

Rangsatz: Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung, die in einer Umgebung von $p \in M$ konstanten Rang r hat. Dann ist f bzgl. geeigneter lokaler Koordinaten um p von der Form

$$\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^t, \quad (x, y) \mapsto (x, 0, \dots, 0) ,$$

wobei $\dim M = r + s$ und $\dim N = r + t$.

Ist f ein Diffeomorphismus, dann ist $J_p(f)$ invertierbar. Die partielle Umkehrung dieser Aussage beinhaltet der Umkehrsatz.

Umkehrsatz: Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten der Dimension n . Sei $p \in M$ ein Punkt mit $\operatorname{rg}_p(f) = n$. Dann existiert eine Umgebung von p , auf der f ein Diffeomorphismus ist.

Zum Beweis: ist der Rang von f in p gleich n , dann ist die Jacobi-Matrix von $y f x^{-1}$ invertierbar und damit ist $y f x^{-1}$ ein lokaler Diffeomorphismus um $x(p)$, was sich entsprechend auf die Mannigfaltigkeit überträgt.

Der Umkehrsatz ist ein Spezialfall des Rangsatzes. Einen weiteren wichtigen Spezialfall erhält man, wenn man von der Jacobi-Matrix nur noch verlangt, dass sie surjektiv sein soll. Dazu definiert man zunächst

Definition 1.11. Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann heißt ein Punkt $p \in M$ regulär, falls $\text{rg}_p(f) = \dim N$, d.h. falls $J(yfx^{-1})$ surjektiv in $x(p)$ ist.

Bemerkung: (1) Ist p regulär, dann folgt $\dim M \geq \dim N$. (2) Ist $\dim M < \dim N$, dann sind alle Punkte in M kritisch, d.h. nicht regulär.

Satz vom regulären Punkt: Sei $f: M \rightarrow N$ differenzierbar und sei $p \in M$ regulär. Dann existieren Karten (U, x) um p und (V, y) um $f(p)$ mit $f(U) \subset V$ und

$$y f x^{-1}: (x_1, \dots, x_{r+s}) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$$

wobei $\dim M = r + s$ und $\dim N = r$, d.h. in lokalen Koordinaten stimmt f mit der kanonischen Projektion von $\mathbb{R}^{r+s}$ auf $\mathbb{R}^r$ überein.

Definition 1.12. Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Punkt $q \in N$ heißt regulärer Wert von f , falls jedes $p \in f^{-1}(q)$ ein regulärer Punkt von f ist.

Bemerkung: (1) Jeder Punkt, der nicht im Bild von $f: M \rightarrow N$ liegt, ist ein regulärer Wert. (2) Nach dem Satz von Sard liegt die Menge der regulären Werte dicht in N . (3) Es gibt keine surjektive differenzierbare Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, wohl aber stetige.

Definition 1.13. Eine Teilmenge $M_0 \subset M$, einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M nennt man k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es um jeden Punkt von M_0 eine Karte (U, x) von M gibt mit

$$x(U \cap M_0) = \mathbb{R}^k \cap x(U),$$

wobei $\mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^n$. Die Differenz $\dim M - \dim M_0$ nennt man die Kodimension von M_0 in M .

Bemerkungen: (1) Jede Untermannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Untermannigfaltigkeiten von M der Kodimension 0 sind genau die offenen Mengen in M . Untermannigfaltigkeiten der Dimension 0 sind genau die diskreten Teilmengen in M (endlich, falls M kompakt). (2) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit der Dimension k von $\mathbb{R}^n$, wenn M lokal diffeomorph zu einer offenen Menge in $\mathbb{R}^k$ ist, z.B. reguläre Flächen im $\mathbb{R}^3$. (3) Der Satz von Whitney besagt, dass jede n -dimensionale Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n}$ ist. Genauer kann man noch sagen:

- (1) Falls n eine 2er-Potenz ist, läßt sich $\mathbb{R}P^n$ nicht in $\mathbb{R}^{2n-1}$ einbetten, z.B. ist $\mathbb{R}P^2$ nicht diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.
- (2) Ist n keine 2er-Potenz, dann existiert für jede n -dimensionale Mannigfaltigkeit eine Einbettung nach $\mathbb{R}^{2n-1}$. (Haefliger-Hirsch-Wall)

- (3) Orientierbare Flächen lassen sich in $\mathbb{R}^3$ einbetten. Nicht-orientierbare Flächen nur nach $\mathbb{R}^4$.
- (4) Jede kompakte, orientierbare n -dimensionale Mannigfaltigkeit besitzt eine Einbettung nach $\mathbb{R}^{2n-1}$.

Satz vom regulären Wert: *Ist $q \in N$ ein regulärer Wert einer differenzierbaren Abbildung $f: M \rightarrow N$, dann ist $f^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit von M und es gilt*

$$\dim f^{-1}(q) = \dim M - \dim N .$$

Beweis: Sei $p \in f^{-1}(q)$ ein regulärer Punkt. Dann wählt man Karten (U, x) um p und (V, y) um q , wie sie nach dem Satz vom regulären Punkt existieren. O.B.d.A. kann man auch noch $y(q) = 0$ voraussetzen. Dann gilt $p \in U \cap f^{-1}(q)$ g.d.w. $y f x^{-1} x(p) = 0$. Da man die Karten so gewählt hat, dass f lokal mit der kanonischen Projektion

$$(x_1, \dots, x_{r+s}) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$$

übereinstimmt, ist dies äquivalent zu $x(p)_i = 0$ für $i = 1, \dots, r$, d.h. zu $x(p) \in \mathbb{R}^s \cap x(U)$. Insgesamt erhält man die gesuchte Untermannigfaltigkeitsgleichung

$$x(U \cap f^{-1}(q)) = \mathbb{R}^s \cap x(U) .$$

□

Der Satz vom regulären Wert kann benutzt werden, um Mannigfaltigkeitsstrukturen nachzuweisen. Dafür sollen zwei Beispiele gegeben werden.

Beispiel: *Die n -dimensionale Sphäre*

Für $M = \mathbb{R}^{n+1}$ und $N = \mathbb{R}$ betrachtet man die Abbildung $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \|x\|^2 = \sum_i x_i^2$. Die Jacobi-Matrix von f im Punkt $x = (x_0, \dots, x_n)$ berechnet sich als $J(f) = (2x_0, \dots, 2x_n)$. Damit folgt $\text{rg}_x(f) \neq 0$ für alle Punkte $x \neq 0$, d.h. 1 ist ein regulärer Wert für f und $f^{-1}(1) = S^n$ ist damit eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beispiel: *Die orthogonale Gruppe $O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^T \cdot A = E\}$*

Sei $M = M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ und sei $N = \text{Sym}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^T = A\} = \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$, d.h. N ist die Menge der symmetrischen Matrizen.

Lemma 1.14. *Für die Abbildung $f: M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^T A$ ist die Einheitsmatrix E ein regulärer Wert. Damit ist die orthogonale Gruppe $O(n) = f^{-1}(E)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.*

Beweis: Nach dem Satz vom regulären Wert ist zu zeigen ist, dass die Jacobi-Matrix der Abbildung f in jedem Punkt $p \in f^{-1}(E) = O(n)$ surjektiv ist. Dafür nutzt man die Definition

der Jacobi-Matrix als Abbildung (Richtungsableitung) und berechnet für $v \in \mathbb{R}^{n^2}$:

$$\begin{aligned} J(f)_p v &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p + tv)^T (p + tv) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p^T p + tp^T v + tv^T p + t^2 v^T v) \\ &= p^T v + v^T p \end{aligned}$$

Für $B \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ und $p \in \text{O}(n) = f^{-1}(E)$ definiert man $v := \frac{1}{2}pB$ und berechnet

$$p^T v + v^T p = \frac{1}{2}p^T p B + \frac{1}{2}B^T p^T p = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^T = B .$$

D.h. die Jacobi-Matrix der oben definierten Abbildung f ist surjektiv in allen Punkten von $f^{-1}(E)$ und die Einheitsmatrix E ist damit ein regulärer Wert von f . Nach dem Satz vom regulären Wert ist damit die orthogonale Gruppe $\text{O}(n)$ als Urbild der Einheitsmatrix E unter f eine Mannigfaltigkeit, nämlich eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$. $\square$

Bemerkungen: (1) Die spezielle orthogonale Gruppe $\text{SO}(n)$ ist eine offene Teilmenge von $\text{O}(n)$ und daher eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0. (2) Die Mannigfaltigkeit $\text{O}(n)$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten. (3) Die klassischen Matrizenengruppen $\text{GL}(n)$, $\text{U}(n)$, $\text{SU}(n)$, $\text{Sp}(n)$ sind alles Mannigfaltigkeiten. Zusätzlich sind die Gruppenoperationen differenzierbare Abbildungen. Solche Gruppen nennt man *Lie-Gruppen*.

1.5. Immersionen, Submersionen, Einbettungen. Mit Hilfe des Ranges lassen sich zwei Klassen von differenzierbaren Abbildungen charakterisieren.

Definition 1.15. Sei $f: M^m \rightarrow N^n$ eine differenzierbare Abbildung. Die Abbildung f heißt Submersion, wenn $\text{rg}_p(f) = \dim N$ für alle $p \in M$ gilt. Die Abbildung f heißt Immersion, wenn $\text{rg}_p(f) = \dim M$ für alle $p \in M$ gilt. Die Abbildung f heißt Einbettung, wenn $f(M) \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow f(M)$ ein Diffeomorphismus ist.

Submersionen und Immersionen lassen sich durch weitere äquivalente Bedingungen beschreiben.

Lemma 1.16. Eine Abbildung $f: M^m \rightarrow N^n$ ist genau dann eine Submersion, wenn die Jacobi-Matrix $J(yfx^{-1})$ in allen Punkten $p \in M$ bzgl. Karten (U, x) um p und (V, y) um $f(p)$ surjektiv ist. Weiter ist f eine Submersion genau dann, wenn f in lokalen Koordinaten von folgender Form ist: $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$.

Lemma 1.17. Eine Abbildung $f: M^m \rightarrow N^n$ ist genau dann eine Immersion, wenn die Jacobi-Matrix $J(yfx^{-1})$ in allen Punkten $p \in M$ bzgl. von Karten (U, x) um p und (V, y) um $f(p)$ injektiv ist. Weiter ist f eine Immersion genau dann, wenn f in lokalen Koordinaten von der Form $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ ist.

Bemerkungen: (Übungsaufgaben)

- (1) Immersionen sind i.A. nicht injektiv und injektive Immersionen sind i.A. keine Einbettungen.
- (2) Einbettungen sind Immersionen, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild sind.
- (3) Sei M kompakt und $f: M \rightarrow N$ eine injektive Immersion, dann ist f eine Einbettung.
- (4) Eine Abbildung f ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn f Immersion und Submersion ist.
- (5) Diffeomorphismen sind bijektive lokale Diffeomorphismen.
- (6) Submersionen sind i.A. nicht surjektiv.
- (7) Submersionen sind offene Abbildungen.
- (8) Sei $f: M \rightarrow N$ eine Submersion, M kompakt und N zusammenhängend, dann ist f surjektiv.

2. DER TANGENTIALRAUM

2.1. Die geometrische Definitionen des Tangentialraumes. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist eine lineare Approximation von f in x gegeben durch das Differential $df_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, d.h. die lineare Abbildung $df_x = J_x(f)$ mit

$$f(x+v) = f(x) + df_x(v) + \varphi(v)$$

und $\lim_{v \rightarrow 0} \varphi(v)/\|v\| = 0$. Es gilt

$$df_x(v) = J_x(f)v = v(f)_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x+tv),$$

wobei $J_x(f)$ die Jacobi-Matrix von f bezeichnet. Die partiellen Ableitungen von f entsprechen genau den Bildern der Basisvektoren e_i der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^n$ unter der linearen Abbildung df_x , also den Spalten der Jacobi-Matrix.

Nun möchte man analog Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten approximieren. Dazu definiert man zu jedem Punkt p der Mannigfaltigkeit M einen abstrakten Vektorraum $T_p M$, den *Tangentialraum* in p , und dann definiert man zu jeder Abbildung $f: M \rightarrow N$ eine lineare Abbildung $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, das *Differential* von f in p .

Für Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$ hat man eine anschauliche Definition des Tangentialraumes, als Menge der Tangentialvektoren an Kurven in M :

$$T_p M := \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ differenzierbar}, \gamma(0) = p\}.$$

Im Allgemeinen hat man aber keine kanonische Einbettung und muß daher den Tangentialraum $T_p M$ durch innere Eigenschaften von M definieren. Dazu definiert man auf der Menge der Kurven in M eine Äquivalenzrelation: zwei Kurven $\alpha, \beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = p = \beta(0)$ heißen äquivalent, $\alpha \sim \beta$, falls für eine und damit für jede Karte (U, x) um p gilt:

$$(x \circ \alpha)(0) = (x \circ \beta)(0).$$

Denn $\tilde{x} \circ \alpha = (\tilde{x}x^{-1}) \circ (x \circ \alpha)$ und damit $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{x} \circ \alpha(t) = d(\tilde{x}x^{-1}) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x \circ \alpha(t)$. Die Gleichung der Äquivalenzrelation bzgl. der neuen Karte $\tilde{x}$ ergibt sich also durch Anwendung des Isomorphismus $d(\tilde{x}x^{-1})$ auf die Gleichung der Äquivalenzrelation bzgl. der alten Karte. Dabei ist $d(\tilde{x}x^{-1})$ das Differential im Sinne der Analysis, d.h. die Anwendung der Jacobi-Matrix, im Punkte $x(p)$. (Man kann immer ε klein genug wählen, so dass α und β auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert sind und die Kurven in der Kartenumgebung verlaufen. Es reicht also aus differenzierbare Kurven γ zu betrachten, die durch p verlaufen und auf irgendeinem offenen Intervall I_γ definiert sind).

Definition 2.1. Tangentialvektoren an M im Punkt $p \in M$ sind Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ von Kurven in M durch p . Der Tangentialraum von M in p ist die Menge all dieser Äquivalenzklassen:

$$T_p M = \{\gamma: I_\gamma \rightarrow M \text{ differenzierbar}, \gamma(0) = p\} / \sim.$$

Für die Äquivalenzklasse einer Kurve γ in M nutzt man folgende Schreibweisen:

$$[\gamma] = \dot{\gamma}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t) .$$

Lemma 2.2. *Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann ist der Tangentialraum $T_p M$ ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.*

Beweis: Sei (U, x) eine Karte um p , dann definiert man:

$$dx_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [\gamma] \mapsto (x \circ \gamma)(0) .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert nach Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ bzw. des Tangentialraumes $T_p M$. Man zeigt nun, dass dx_p bijektiv ist. Injektivität ist wiederum klar nach der Definition. Um die Surjektivität zu zeigen, definiert man für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ die Kurve $\gamma(t) := x^{-1}(x(p) + tv)$. Man wählt ε so klein, dass $x(p) + tv$ für $|t| < \varepsilon$ in $x(U)$ liegt. Dann folgt

$$dx_p([\gamma]) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x \circ x^{-1}(x(p) + tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x(p) + tv) = v .$$

Die Vektorraumstruktur auf $T_p M$ wird nun so definiert, dass dx_p eine lineare Abbildung wird. Also z.B. für $v, w \in T_p M$ definiert man:

$$v + w := (dx_p)^{-1}(dx_p(v) + dx_p(w)) .$$

Zu zeigen bleibt noch, dass die Vektorraumstruktur auf $T_p M$ nicht von der gewählten Karte abhängt. Das folgt dann wieder aus der Gleichung $d\tilde{x}_p = d(\tilde{x} \circ x^{-1}) \circ dx_p$. $\square$

Bemerkungen: (i) Die Abbildung dx_p ist das Differential der Kartenabbildung x im Punkt p (siehe unten). (ii) Die kanonische differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch die Karte $(\mathbb{R}^n, x = \text{id})$. Daher stimmt hier dx_p überein mit der kanonischen Identifizierung

$$\Phi: T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [\alpha] \mapsto \dot{\alpha}(0) ,$$

die nach Definition ein linearer Isomorphismus ist. In der umgekehrten Richtung ordnet man einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ die Klasse $[\alpha]$ zu mit $\alpha(t) = p + tv$. Dabei ist α eine Kurve durch p mit $\dot{\alpha}(0) = v$.

Definition 2.3. *Sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist das Differential von f in p definiert durch*

$$df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma] .$$

Man schreibt auch: $df_p(\dot{\gamma}(0)) = \dot{f \circ \gamma}(0)$.

Die Eigenschaften des Differentials für Funktionen zwischen Euklidischen Räumen übertragen sich jetzt direkt auf differenzierbare Funktionen zwischen Mannigfaltigkeiten.

Lemma 2.4. *Das Differential einer differenzierbaren Funktion ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, linear und erfüllt die Kettenregel.*

Beweis: Seien α und $\tilde{\alpha}$ zwei äquivalente Kurven auf M durch p , d.h. es gilt $x\dot{\alpha}(0) = x\dot{\tilde{\alpha}}(0)$. Sei weiter (U, x) eine Karte um p und (V, y) eine Karte um $f(p)$, dann folgt

$$\begin{aligned} dy_{f(p)}[f \circ \alpha] &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} yf\alpha = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (yfx^{-1})x\alpha = d(yfx^{-1})x\dot{\alpha}(0) = d(yfx^{-1})x\dot{\tilde{\alpha}}(0) \\ &= dy_{f(p)}[f \circ \tilde{\alpha}] \end{aligned}$$

Es war schon gezeigt worden, dass die Abbildung dy bijektiv ist und somit folgt die Gleichung $[f \circ \alpha] = [f \circ \tilde{\alpha}]$, d.h. die Definition des Differentials df ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten des Tangentialvektors. Die Kettenregel folgt aus einer formalen Rechnung:

$$dg \circ df[\alpha] = dg(df[\alpha]) = dg[f \circ \alpha] = [g \circ f \circ \alpha] = d(g \circ f)[\alpha] .$$

Sei $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kartenabbildung und $p \in U$. Das Differential von x in p ist eine Abbildung $dx_p : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \mathbb{R}^n$. Verknüpft mit der kanonischen Identifizierung Φ erhält man genau die oben definierte Abbildung dx_p , die nach Definition linear ist. Daher ist auch das Differential in p der Kartenabbildung x linear. Im Weiteren unterscheidet man nicht mehr zwischen $dx_p : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \mathbb{R}^n$ und $\Phi \circ dx_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Unter der kanonischen Identifizierung geht ausserdem das in der Analysis definierte Differential, also die Anwendung der Jacobi-Matrix, genau in das oben definierte Differential über.

Schreibt man nun $f = y^{-1} \circ (yfx^{-1}) \circ x$ folgt nach der Kettenregel $df = (dy)^{-1} \circ d(yfx^{-1}) \circ dx$, d.h. man hat ein entsprechendes kommutatives Diagramm. Das Differential ist damit als Verknüpfung linearer Abbildungen linear. $\square$

Bemerkungen: (1) $(d\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_p M}$. (2) Ist f ein Diffeomorphismus, dann ist df_p für alle p ein Isomorphismus. (3) Ist df_p ein Isomorphismus, dann ist f lokal um p ein Diffeomorphismus. (4) Da die Jacobi-Matrix von yfx^{-1} nur eine andere Beschreibung des Differential $d(yfx^{-1})$ ist, folgt für den Rang einer differenzierbaren Abbildung f im Punkt $p \in M$ auch die Gleichung $\text{rg}_p(f) = \text{rg}_p(df_p)$. (5) Sei $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, mit Inklusionsabbildung i . Dann ist $\Phi \circ di : T_p M \rightarrow T_{i(p)} \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein Isomorphismus auf das Bild. Es gilt $di([\gamma]) = [i \circ \gamma]$ und damit $(\Phi \circ di)([\gamma]) = \dot{\gamma}(0)$. Damit kann der Tangentialraum $T_p M$ identifiziert werden mit dem Vektorraum aller Tangentialvektoren $\dot{\gamma}(0)$ für Kurven γ in $\mathbb{R}^N$ mit $\gamma(0) = p$.

2.2. Die algebraische Definition des Tangentialraumes. Den Tangentialraum in einem Punkt p kann man identifizieren mit dem Raum der Derivationen auf Funktionskeimen um p . Das soll im Folgenden genauer erklärt werden. Dieser Zugang verallgemeinert den Begriff der Richtungsableitung aus der Analysis.

Zwei Funktionen f und h definiert auf einer Umgebung U von p heißen äquivalent, $f \sim h$, falls eine Umgebung $V \subset U$ von p existiert, so dass $f|_V = h|_V$ gilt.

Definition 2.5. Die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ differenzierbarer Funktionen, definiert auf Umgebungen von $p \in M$ nennt man Funktionskeime in p . Man schreibt $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ für den Raum der Funktionskeime in p .

Bemerkung: Man kann Funktionskeime addieren und multiplizieren, z.B. definiert man das Produkt durch $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$. Damit wird $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ eine reelle Algebra, d.h. ein Vektorraum mit einer verträglichen Multiplikation.

Lemma 2.6. Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist: $\mathcal{C}_p^\infty(M) \cong \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Sei (U, x) eine Karte um p mit $x(p) = 0$, dann wird die Isomorphie definiert durch die Abbildung $[f] \mapsto [f \circ x^{-1}]$. $\square$

Definition 2.7. Eine Derivation auf $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ ist eine lineare Abbildung $v: \mathcal{C}_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$v([f][g]) = v([f])g(p) + f(p)v([g]) .$$

Die Menge der Derivationen auf $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ wird mit $\mathcal{D}_p(M)$ bezeichnet.

Bemerkung: (1) $\mathcal{D}_p(M)$ ist ein reeller Vektorraum. (2) $\mathcal{D}_p(M) \cong \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$. Dieser Isomorphismus ist folgendermassen definiert: Sei v eine Derivation in $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, dann definiert die Abbildung $[f] \mapsto v(f \circ x^{-1})$ eine Derivation in $\mathcal{D}_p(M)$

Beispiel: Jeder Vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert durch die Richtungsableitung eine Derivation auf $\mathcal{C}_{x_0}^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$v([f]) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_0 + tv) = df_{x_0}(v) = \langle v, \text{grad } f \rangle = \sum_{j=1}^n v_j \left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{x_0} .$$

Dabei entsprechen also die Vektoren e_i der kanonischen Basis, den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass auch umgekehrt jede Derivation von dieser Form ist, d.h. man hat eine Isomorphie $\mathbb{R}^n \cong \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ für einen beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt dann auch $\mathcal{D}_p(M) \cong \mathbb{R}^n$.

Satz 2.8. Jede Derivation δ auf $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ schreibt sich, angewendet auf $[f] \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, als

$$\delta([f]) = \sum_{j=1}^n \delta([x_j]) \left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_0 .$$

Insbesondere hat der Raum der Derivationen auf $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Dimension n , mit den Derivationen $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$, als Basis.

Beweis: Die Aussage des Satzes folgt aus einem fundamentalen Lemma, das zuerst bewiesen werden muss.

Lemma 2.9. *Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer konvexen Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^n$. Dann kann f geschrieben werden als:*

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^n x_j h_j(x) ,$$

für gewisse differenzierbare Funktionen h_j mit $h_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_0 = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$.

Beweis des Lemmas: Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel folgt

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt .$$

Um den Beweis des Satzes abzuschliessen, muss man noch bemerken, dass Derivationen auf konstanten Funktionen verschwinden. Es genügt dies für die konstante Funktion $f \equiv 1$ nachzuweisen: Sei δ eine Derivation, dann folgt $\delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$ und somit $\delta(1) = 0$. Sei nun $[f]$ ein Funktionskeim in $0 \in \mathbb{R}^n$ und δ eine beliebige Derivation. Schreibt man f wie in dem oben angeführten Lemma und wendet δ darauf an, so folgt

$$\delta([f]) = \sum_{j=1}^n \delta([x_j]) \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_0 .$$

Die Abbildung $[f] \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_0$, also die partielle Ableitung nach x_j im Punkt 0, ist eine Derivation, die wie üblich mit $\frac{\partial}{\partial x_j}$ bezeichnet wird und, wie gezeigt, den Raum der Derivationen aufspannen. Offensichtlich sind sie auch linear unabhängig, bilden also eine Basis in $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Definition 2.10. *Sei $\xi \in T_p M$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dann ist die Lie-Ableitung von f in Richtung ξ definiert als:*

$$L_\xi(f) = \xi(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\alpha(t)) ,$$

wobei $\xi = [\alpha]$. Auf Funktionskeimen definiert man die Lie-Ableitung durch $L_\xi([f]) = [L_\xi(f)]$.

Bemerkungen: (i) Identifiziert man $T_{f(p)}\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$, so schreibt sich die Lie-Ableitung auch als $L_\xi(f) = df_p(\xi)$. (ii) Die Lie-Ableitung ist eine Derivation, d.h. $L_\xi \in \mathcal{D}_p(M)$. Das folgt aus der Produktregel bzw. der Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \cdot g)(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(\alpha(t)) \cdot g(\alpha(t))) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f(\alpha(t)) g(p) + f(p) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g(\alpha(t))) .$$

Satz 2.11. Die Abbildung $\xi \mapsto L_\xi$ definiert eine lineare Isomorphie zwischen $T_p M$ und dem Raum der Derivationen auf $\mathcal{C}_p^\infty(M)$, d.h.

$$T_p M \cong \mathcal{D}_p(M) .$$

Beweis: Sei (U, x) eine Karte um $p \in M$ mit $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, sei $\xi \in T_p M$ ein Tangentialvektor mit $dx_p(\xi) = v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Die Zuordnung $\xi \mapsto L_\xi$ ist offensichtlich linear und weiter folgt:

$$(1) \quad L_\xi(f) = df_p(\xi) = d(fx^{-1}x)_p(\xi) = d(fx^{-1})_0 dx_p(\xi) = v(fx^{-1})(0) = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f x^{-1}}{\partial x_j}(0) .$$

Aus dieser Formel folgt sofort, dass die Zuordnung $\xi \mapsto L_\xi$ injektiv ist. Denn gilt $L_\xi(f) = 0$ für alle f dann auch für $f = x_j$, woraus dann $v_j = 0$ und schließlich auch $\xi = 0$ folgt. Hierbei ist $x_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ die auf der Kartenumgebung U definierte j te Koordinatenfunktion, d.h. es gilt $x_j(p) := x(p)_j$. Die Zuordnung $\xi \mapsto L_\xi$ ist bijektiv aus Dimensionsgründen: $\dim T_p M = n = \dim \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n) = \dim \mathcal{D}_p(M)$, denn wie oben gezeigt ist $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$. $\square$

Bezeichnung: Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und sei (U, x) eine Karte um $p \in M$. Dann schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p (f) = \frac{\partial f x^{-1}}{\partial x_j}(x(p)) .$$

Genaugenommen betrachtet man f auf der Kartenumgebung U von p bzw. geht zu dem Funktionskeim $[f]$ in p über.

Bemerkungen:

- (1) Die Derivationen $\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p, j = 1, \dots, n$ bilden eine Basis in $\mathcal{D}_p(M) \cong T_p M$. Denn jeder Tangentialvektor $\xi \in T_p M$ bzw. die dem entsprechende Derivation L_ξ schreibt sich nach (1) als

$$\xi = \sum_{j=1}^n v_j \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p, \quad v_j \in \mathbb{R} .$$

Dabei sind die Koeffizienten v_j eindeutig bestimmt durch $v_j = L_\xi(x_j) = dx_j(\xi)$, denn

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i \circ x^{-1}}{\partial x_j} = \delta_{ij} .$$

Wie ebenfalls in (1) gesehen, gilt auch $v = (v_1, \dots, v_n) = dx_p(\xi)$. Insbesondere folgt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p = (dx_p)^{-1}(e_j) .$$

- (2) Die Derivationen $\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p$ entspricht dem Tangentialvektor $\xi \in T_p M$ mit $dx_p(\xi) = e_j$, d.h. der Äquivalenzklasse von Kurven $[\alpha]$ mit

$$\alpha_j(t) = x^{-1}(x(p) + te_j) .$$

- (3) Seien (U, x) und (V, y) zwei Karten um p . Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} .$$

- (4) Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung und seien $(U, x), (V, y)$ Karten um p bzw. $f(p)$. Dann gilt:

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} ,$$

wobei f_j die Komponentenfunktion $f_j = y_j \circ f$ bezeichnet. Insbesondere gilt für Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Beziehung

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x_i} .$$

- (5) Sei $x_j : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ die j te Koordinatenfunktion. Dann bilden die Linearformen $(dx_i)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, eine Basis im Dualraum $(T_p M)^*$. Es ist genau die zu $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right\}_{i=1, \dots, n}$ duale Basis. Denn nach dem letzten Punkt für $f = x_j$ ist

$$(dx_j)_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \right) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{\partial (x_j \circ x^{-1})}{\partial x_i} = \delta_{ij} .$$

- (6) Eine dritte äquivalente Beschreibung von Tangentialvektoren ist folgendermassen gegeben. Es bezeichne $K_p(M)$ die Menge aller Karten um $p \in M$ und es sei $V_p(M)$ die Menge aller Abbildungen $v : K_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit dem Transformationsverhalten $v(V, y) = J_{x(p)}(y \circ x^{-1}) v(U, x)$. Dann ist $V_p(M)$ isomorph zu $T_p M$, wobei der Isomorphismus gegeben ist durch:

$$T_p M \rightarrow V_p(M), \quad \xi \mapsto ((U, x) \mapsto dx_p(\xi))$$

(wie oben gesehen gilt $dx_p(\xi) = (L_\xi(x_1), \dots, L_\xi(x_n))$). Somit können Tangentialvektoren lokal (in jeder Karte) angesehen werden als Vektoren in $\mathbb{R}^n$, die ein gewisses Transformationsverhalten bei Kartenwechsel besitzen. Die Abbildung $(U, x) \mapsto dx_p(\xi)$ besitzt das gewünschte Transformationsverhalten, da

$$dy_p(\xi) = d(y \circ x^{-1} \circ x)_p(\xi) = d(y \circ x^{-1})_{x(p)} dx_p(\xi)$$

und $d(y \circ x^{-1})_{x(p)}$ ist genau die Jacobi-Matrix $J_{x(p)}(y \circ x^{-1})$.

- (7) Sei $\Phi : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung, $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ und $X \in T_p M$. Dann gilt: $d\Phi_p(X)(f) = L_X(f \circ \Phi) = X(f \circ \Phi)$.

- (8) Sei $X = [\gamma] \in T_p M$ mit $\gamma : I_\gamma \rightarrow M$ und $\gamma(0) = p$. Dann gilt $X = d\gamma(\frac{d}{dt}|_{t=0})$.
Tatsächlich ist

$$X(f) = L_X(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \gamma) = d\gamma(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0})(f) .$$

Alternativ hat man nach Definition $dx_p(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x \circ \gamma)(t)$ aber auch

$$dx_p(d\gamma(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0})) = d(x \circ \gamma)_0(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x \circ \gamma)(t) .$$

2.3. Das Tangentialbündel.

Definition 2.12. Das Tangentialbündel TM einer Mannigfaltigkeit M ist definiert als die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume:

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M .$$

Satz 2.13. Sei M eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann trägt TM die Struktur einer $2n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die Fußpunktabbildung $\pi: TM \rightarrow M$ ist surjektiv und differenzierbar.

Beweis: Man definiert die kanonische Projektion als die Fußpunktabbildung:

$$\pi: TM \rightarrow M, \quad \pi(\xi) = p \quad \text{falls} \quad \xi \in T_p M .$$

Sei (U, x) eine Karte von M , dann definiert man

$$\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

$$\Phi(\xi) = (x \circ \pi(\xi), dx_{\pi(\xi)}(\xi))$$

Es ist klar, dass Φ eine bijektive Abbildung ist. Die Topologie auf TM wird durch die Forderung definiert, dass alle Abbildungen Φ Homöomorphismen sind.

Nun ist noch der Kartenwechsel zu berechnen. Dafür seien $(U, x), (V, y)$ Karten um $p \in M$ mit den assoziierten Karten $(\pi^{-1}(U), \Phi), (\pi^{-1}(V), \Psi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi^{-1}: x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \\ (q, v) &\mapsto (y \circ x^{-1}(q), d(yx^{-1})_q v) . \end{aligned}$$

Denn für $\xi = \Phi^{-1}(q, v)$ folgt $\pi(\xi) = x^{-1}(q)$ und $v = dx_{\pi(\xi)}(\xi)$, wobei $x(\pi(\xi)) = q$. Wendet man darauf Ψ an, so ergibt sich

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(q, v) = \Psi(\xi) = (y \circ \pi(\xi), dy_{\pi(\xi)}(\xi)) = (yx^{-1}(q), dy_{\pi(\xi)} \circ (dx_{\pi(\xi)})^{-1}v) ,$$

der Kartenwechsel ist also differenzierbar und die Karten $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ definieren eine differenzierbare Struktur auf TM . $\square$

Offensichtlich hat TM eine abzählbare Basis der Topologie und $\pi: TM \rightarrow M$ ist differenzierbar, denn

$$x \circ \pi \circ \Phi^{-1}: x(U) \times \mathbb{R}^n \rightarrow x(U), (x_1, \dots, x_{2n}) \mapsto (x_1, \dots, x_n) .$$

Es bleibt noch, die Hausdorff-Eigenschaft zu zeigen. Dafür seien (p, a) und (q, b) zwei verschiedene Punkte in TM , mit $a \in T_p M$ und $b \in T_q M$.

1. Fall: Sei $p \neq q$. Dann existieren offene Umgebungen U, V von p, q mit $U \cap V = \emptyset$. Dann sind aber auch $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ disjunkte offene Umgebungen von (p, a) und (q, b) .

2. Fall: Sei $p = q, a \neq b$ in $T_p M$. Sei (U, x) eine Karte um p mit der Karte $\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n$ für TM und $\Phi(a) = (x(p), v), \Phi(b) = (x(p), w)$. Sind V, W offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit $v \in V, w \in W$ und $V \cap W = \emptyset$, dann sind $\Phi^{-1}(x(U) \times V)$ und $\Phi^{-1}(x(U) \times W)$ disjunkte offene Umgebungen von a, b .

2.4. Vektorbündel. Das Tangentialbündel TM ist ein Beispiel für ein reelles Vektorbündel. Diese sind folgendermassen definiert.

Definition 2.14. Seien E und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\pi: E \rightarrow B$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Vektorbündel vom Rang n ist ein Tripel (E, π, B) mit:

- (1) π ist surjektiv
- (2) Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von B und Diffeomorphismen

$$h_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$$

mit:

- $h_i(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{R}^n$
- $h_i \circ h_j^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n, (x, v) \mapsto (x, g_{ij}(x)v)$
für differenzierbare Abbildungen $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$.

Bemerkungen:

- (1) Das Urbild $E_x = \pi^{-1}(x)$ heißt *Faser* über $x \in B$. Die Fasern E_x sind für alle x Vektorräume isomorph zu $\mathbb{R}^n$.
- (2) Die Mannigfaltigkeit E nennt man *Totalraum*, B die *Basis* und h_i die *lokalen Trivialisierungen* des Vektorbündels $\pi: E \rightarrow B$.
- (3) Zwei Vektorbündel $\pi_1: E_1 \rightarrow M_1$ und $\pi_2: E_2 \rightarrow M_2$ heissen (zueinander) *isomorph* falls ein Paar (f, h) von differenzierbaren Abbildungen $f: E_1 \rightarrow E_2, h: M_1 \rightarrow M_2$ existiert, so dass $\pi_2 \circ f = h \circ \pi_1$ gilt und die Einschränkung von f auf die Faser für alle $x \in M_1$ eine lineare Isomorphie $\pi_1^{-1}(x) \rightarrow \pi_2^{-1}(h(x))$ ist.

Beispiele: (1) Das *Tangentialbündel* $\pi: TM \rightarrow M$ einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist ein Vektorbündel vom Rang n . (2) Analog zum Tangentialbündel definiert man das *Kotangentialbündel* T^*M als Vereinigung der Dualräume $T_p^*M = (T_p M)^*$ und das Endomorphismenbündel $\text{End}TM$. (3) Das *triviale Bündel* über B ist definiert als $\pi: E = B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$, wobei π die Projektion auf den ersten Faktor ist. Ein Vektorbündel ist *trivial*, wenn es isomorph zum trivialen Bündel ist.

Definition 2.15. Eine differenzierbare Abbildung $s: B \rightarrow E$ heißt *Schnitt des Vektorbündels*, falls

$$\pi \circ s = \text{id}_B,$$

d.h. falls $s(x) \in E_x$ für alle $x \in B$. Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der Schnitte in E bezeichnet man mit $\Gamma(E)$.

3. VEKTORFELDER

Definition 3.1. Ein Vektorfeld ist ein Schnitt des Tangentialbündels, d.h. eine differenzierbare Abbildung $X: M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ X = \text{id}_M$, also $X_p = X(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$.

Beispiel: Sei $M = S^n$, dann schreibt sich der Tangentialraum in einem Punkt $p \in S^n$ als $T_p S^n = p^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, p \rangle = 0\}$. Ein Vektorfeld auf S^n ist also eine glatte Abbildung $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle v(p), p \rangle = 0$ für alle $p \in S^n$. Interessant ist die Frage, ob es Vektorfelder ohne Nullstellen gibt, also ohne p mit $v(p) = 0$. Auf der S^{2n+1} läßt sich leicht ein Beispiel dafür angeben:

$$v(x_0, \dots, x_{2n+1}) := (-x_1, x_0, \dots, -x_{2n+1}, x_{2n}) .$$

Der Satz vom Igel in allgemeiner Fassung besagt nun:

Satz: Jedes Vektorfeld auf S^{2n} hat eine Nullstelle.

Bemerkung:

- (1) Sei $n + 1 = (2r + 1) 2^{c+4d}$ mit $0 \leq c \leq 3$. Dann gibt es auf der S^n genau $2^c + 8d - 1$ punktweise linear unabhängige Vektorfelder, die also insbesondere keine Nullstellen haben.
- (2) S^n hat n linear unabhängige Vektorfelder genau dann, wenn $n = 1, 3$ oder 7 .
- (3) Gibt es auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M die maximal mögliche Anzahl von n linear unabhängigen Vektorfeldern, so sagt man, dass M *parallelisierbar* bzw. das Tangentialbündel trivial ist.
- (4) Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der Vektorfelder auf M bezeichnet man mit $\chi(M)$ bzw. $\Gamma(TM)$.

Bemerkung: Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann kann man TM identifizieren mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^{2N}$. Sei $\Psi: TM \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ definiert durch $\Psi(X) = (p, X)$ wobei $X \in T_p M \subset TM$ und $T_p M$ identifiziert wird mit einem Unterraum in $\mathbb{R}^N$. Dann ist Ψ offensichtlich ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Vektorfelder können dann beschrieben werden als Abbildungen $X: M \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ mit $X(p) = (p, X_p)$ oder auch gleich als Abbildung $X: M \rightarrow \mathbb{R}^N$.

3.1. Vektorfelder als Derivationen. Tangentialvektoren kann man identifizieren mit Derivationen auf Funktionskeimen. Analog kann man Vektorfelder identifizieren mit Derivationen auf dem Raum $\mathcal{C}^\infty(M)$ der glatten Funktionen auf M . Die Identifikation wird wieder durch eine Lie-Ableitung gegeben.

Definition 3.2. Eine Derivation δ auf der Algebra $\mathcal{C}^\infty(M)$ der differenzierbaren Funktionen auf M ist eine lineare Abbildung $\delta: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, die die Produktregel:

$$\delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g + f \cdot \delta(g) ,$$

erfüllt. Der Vektorraum der Derivationen auf M wird mit $\mathcal{D}(M)$ bezeichnet.

Beispiel: Jedes Vektorfeld $X \in \chi(M)$ definiert durch die als *Lie-Ableitung* bezeichnete Abbildung $L_X: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Derivation auf M . Dabei definiert man punktweise $L_X(f)(p) := L_{X_p}[f] = df_p(X_p)$.

Satz 3.3. Die Abbildung $X \mapsto L_X$ von $\Gamma(TM)$ nach $\mathcal{D}(M)$ ist ein Isomorphismus unendlich-dimensionaler Vektorräume.

Beweis: Klar ist, dass $X \mapsto L_X$ eine lineare Abbildung ist, und dass die Lie-Ableitung L_X tatsächlich eine Derivation auf M definiert.

Als erstes soll gezeigt werden, dass $X \mapsto L_X$ injektiv ist, d.h. für $X \in \chi(M)$ mit $X \neq 0$ ist $L_X \neq 0$ zu zeigen. Dafür sei $X \neq 0$ ein Vektorfeld auf M , d.h. es existiert ein $p \in M$ mit $X_p = X(p) \neq 0$. Nun war aber schon gezeigt worden, dass die Abbildung $X_p \in T_p M \mapsto L_{X_p} \in \mathcal{D}_p(M)$ injektiv ist. Damit existiert eine Funktion f , definiert auf einer Umgebung U von p mit $L_{X_p}[f] = df_p(X_p) \neq 0$.

Man kann jetzt f zu einer auf ganz M definierten Funktion fortsetzen. Dafür wählt man eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\text{supp}(\phi) \subset U$ und $\phi|_V \equiv 1$ auf einer Umgebung $V \subset U$ von p . Dann ist $f \cdot \phi$ die gewünschte Fortsetzung von f , deren Lie-Ableitung nach X nicht verschwindet:

$$L_X(f \cdot \phi)(p) = d(f \cdot \phi)_p(X_p) = df_p(X_p) \neq 0 .$$

Alternativ kann man schreiben:

$$L_X(f \cdot \phi)(p) = L_{X_p}(f \cdot \phi) = L_{X_p}(f) \phi(p) + f(p) L_{X_p}(\phi) = L_{X_p}(f) .$$

Die Existenz der sogenannten *Abschneidefunktion* ϕ bleibt noch zu zeigen.

Als zweites ist zu zeigen, dass $X \mapsto L_X$ surjektiv ist. Wie schon gesehen, kann man mit Hilfe von Abschneidefunktionen jeden Funktionskeim einer lokal definierten Funktion als Keim einer global definierten Funktion auffassen läßt. Sei nun δ eine Derivation auf M . Dann definiert $\delta_p: f \mapsto \delta(f)(p)$ eine Derivation auf den Funktionskeimen $\mathcal{C}_p^\infty(M)$. Wie schon gezeigt wurde, schreibt sich δ_p als $\delta_p = \sum_{j=1}^n \delta_p(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$. Damit erhält man ein Vektorfeld X auf M : in jedem Punkt $p \in M$ definiert man X_p als den Tangentialvektor, der zur Derivation δ_p gehört. Es gilt dann $L_X = \delta$. In lokalen Koordinaten (U, x) schreibt sich X als

$$X|_U = \sum_{j=1}^n \delta(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} ,$$

womit gezeigt ist, dass X ein glattes Vektorfeld ist.

Zur Konstruktion der Abschneidefunktion ϕ :

Lemma 3.4. *Sei $R > 0$, dann existiert eine glatte Funktion $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\phi|_{B_0(\frac{1}{3}R)} \equiv 1 \quad \text{und} \quad \phi|_{\mathbb{R}^n \setminus B_0(\frac{2}{3}R)} \equiv 0 .$$

Bemerkung: Jedes Vektorfeld X auf M schreibt sich in einer Karte (U, x) als $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ wobei die Funktionen $a_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ bestimmt sind durch $a_i = X(x_i)$. Hierbei bezeichnet x_i wieder die i te Koordinatenfunktion, d.h. $x_i(q) := x(q)_i$ für alle $q \in U$.

3.2. Die Lie-Algebra der Vektorfeldern. Die Verknüpfung zweier Derivationen ist i.A. keine Derivation. Es gilt:

$$\delta_1 \delta_2 (f \cdot g) = (\delta_1 \delta_2 f) \cdot g + \delta_2 f \cdot \delta_1 g + \delta_1 f \cdot \delta_2 g + f \cdot \delta_1 \delta_2 g .$$

Insbesondere hat man damit aber gezeigt:

Lemma 3.5. *Seien δ_1, δ_2 zwei Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty$. Dann ist $\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1$ wieder eine Derivation.*

Definition 3.6. *Seien X, Y Vektorfelder auf M . Dann ist $[X, Y]$ das eindeutig bestimmte Vektorfeld mit*

$$L_{[X, Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X .$$

Man nennt $[X, Y]$ die Lie-Klammer bzw. den Kommutator der Vektorfelder X, Y . Die Lie-Ableitung von Y nach X ist definiert als $L_X Y := [X, Y]$.

Bemerkung: Das Vektorfeld $[X, Y]$ ist also als Derivation bestimmt durch die Gleichung $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Lemma 3.7. *Zwei Vektorfelder $X, Y \in \chi(M)$ seien lokal gegeben als $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dann gilt*

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Beweis: Man schreibt das Vektorfeld $[X, Y]$ lokal als $[X, Y] = \sum c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Die Koeffizienten c_i bestimmen sich durch

$$c_i = [X, Y](x_i) = L_X(L_Y(x_i)) - L_Y(L_X(x_i)) = L_X(b_i) - L_Y(a_i) = \sum_j a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - \sum_j b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} .$$

□

Satz 3.8. Seien X, Y, Z Vektorfelder auf M , a, b reelle Zahlen und f eine differenzierbare Funktion auf M , dann gilt:

$$(1) [X, Y] = -[Y, X] , \quad (\text{Schiefsymmetrie bzw. Antikommutativitat})$$

$$(2) [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] , \quad (\text{Bilinearität})$$

$$(3) [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 , \quad (\text{Jacobi-Identität})$$

$$(4) [fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X, \quad L_X(f \cdot Y) = [X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y .$$

Bemerkung: Eine reelle *Lie-Algebra* ist ein reeller Vektorraum V mit einer Abbildung $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$, die die Eigenschaften 1, 2, 3 erfüllt. Die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ ist also eine bilineare schiefsymmetrische Abbildung, die die Jacobi-Identität erfüllt.

Beispiele: (1) Der Raum $V = \chi(M)$ der Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M zusammen mit dem Kommutator von Vektorfeldern, ist eine unendlichdimensionale reelle Lie-Algebra. (2) $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Vektorkreuzprodukt als Lie-Klammer ist eine 3-dimensionale Lie-Algebra. (3) $V = M(n, \mathbb{R})$ der Vektorraum der quadratischen reellen Matrizen mit der Lie-Klammer definiert durch $[A, B] := A \cdot B - B \cdot A$ ist eine Lie-Algebra der Dimension n^2 .

3.3. Das Bild von Vektorfeldern unter Diffeomorphismen.

Definition 3.9. Sei $\phi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, dann ist das Bild des Vektorfeldes $X \in \chi(M)$ unter ϕ ein Vektorfeld auf N definiert durch

$$(\phi_* X)_q := d\phi_{\phi^{-1}(q)}(X_{\phi^{-1}(q)}) .$$

Satz 3.10. Sei $\phi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und $X \in \chi(M)$. Dann ist $\phi_* X$ ein glattes Vektorfeld auf N und es gilt:

$$(1) L_{\phi_* X}(f) = L_X(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}$$

$$(2) \phi_*[X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y]$$

wobei f eine beliebige reell-wertige Funktion auf N ist.

3.4. Vektorfelder und Differentialgleichungen. Sei $X \in \chi(M)$ ein Vektorfeld auf M und (U, x) eine Karte um $p \in M$. Dann schreibt sich X eingeschränkt auf U als:

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

für glatte Funktionen $a_i: U \rightarrow \mathbb{R}$. Man sucht nun glatte Kurven $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit

- (1) $c(0) = p$
- (2) $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Der Tangentialvektor $\dot{c}(t)$ schreibt sich in der Karte (U, x) als $\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{c}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)}$ wobei c_i definiert ist durch $c_i := x_i \circ c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Denn man hat

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(t)} \quad \text{wobei} \quad a_i = \dot{c}(t)(x_i) = [c](x_i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x_i(c(t))$$

Gleichung (2) ist damit äquivalent zu

$$\dot{c}_i(t) = a_i(c(t)) = (a_i x^{-1})(c_1(t), \dots, c_n(t)) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Zur Bestimmung der Kurve c erhält man also n gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen $c_i, i = 1, \dots, n$ mit den Anfangsbedingungen $c_i(0) = x_i(p)$.

Definition 3.11. Eine differenzierbare Kurve $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ heißt Integralkurve des Vektorfeldes $X \in \chi(M)$ durch p , falls $c(0) = p$ und $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Aus dem Satz über die lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen bzw. dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten ergeben sich die folgenden Eigenschaften der Integralkurven:

Satz 3.12. Für alle $p \in M$ existiert ein Intervall $I_p \subset \mathbb{R}$ um 0 und eine eindeutig bestimmte Kurve $c_p: I_p \rightarrow M$ mit

$$c_p(0) = p \quad \text{und} \quad \dot{c}_p(t) = X_{c(t)}$$

für alle $t \in I_p$, d.h. die Integralkurven von X sind (lokal) eindeutig bestimmt und existieren lokal.

Folgerung 3.13. Durch jeden Punkt der Mannigfaltigkeit M geht genau eine Integralkurve von X , d.h. insbesondere, dass sich Integralkurven nicht schneiden.

Satz 3.14. Für alle $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U von p und ein Intervall I um Null, so dass für alle $q \in U$ die Kurve c_q auf I definiert ist. Die Abbildung

$$I \times U \rightarrow M, \quad (t, q) \mapsto c_q(t)$$

ist differenzierbar.

Definition 3.15. Die Abbildung $(t, q) \mapsto c_q(t)$ heißt der lokale Fluß des Vektorfeldes X . Die Integralkurven von X nennt man auch Flußlinien von X . Der Fluß definiert für alle hinreichend kleinen Parameter t eine lokale Abbildung $\varphi_t: U \subset M \rightarrow M$ durch $\varphi_t(q) = c_q(t)$.

Satz 3.16. Die Abbildungen φ_t sind lokale Diffeomorphismen und es gilt

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$$

für alle Parameter t, s , für die φ_t, φ_s und φ_{t+s} definiert sind. Insbesondere kommutieren die lokalen Diffeomorphismen φ_t . Man sagt: $\{\varphi_t\}$ ist eine 1-parametrische Gruppe (lokaler) Diffeomorphismen.

Beweis: Aus der Definition der Fluß-Abbildung φ_t folgt:

$$\varphi_{t+s}(q) = c_q(t+s) = c_{c_q(s)}(t) = \varphi_t(c_q(s)) = \varphi_t \circ \varphi_s(q)$$

Insbesondere folgt aus dieser Gleichung $\text{id} = \varphi_0 = \varphi_{t+(-t)} = \varphi_t \circ \varphi_{-t}$, also $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$. Damit ist φ_t invertierbar und die Umkehrabbildung ist wieder differenzierbar, d.h. φ_t ist ein (lokaler) Diffeomorphismus. $\square$

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}$ und X das Vektorfeld $X_x = x^2 \frac{d}{dx}$ für $x \in \mathbb{R}$. Die Integralkurve von X durch x ist gegeben durch $c(t) = \frac{x}{1-tx}$. Denn:

$$\dot{c}(t) = x \frac{-1}{(1-tx)^2} (-x) = \frac{x^2}{(1-tx)^2} = c(t)^2 = X_{c(t)}$$

wobei $T_x \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ identifiziert wird. Die Integralkurve von X durch x ist für folgende Parameter t definiert:

$$t \in \left(-\infty, \frac{1}{x}\right) \quad \text{falls } x > 0, \quad t \in \left(\frac{1}{x}, \infty\right) \quad \text{falls } x < 0.$$

Der Fluß ist also definiert auf $I_x = \left(-\frac{1}{|x|}, \frac{1}{|x|}\right)$ und es folgt, dass I_x immer kleiner wird für $x \rightarrow \pm\infty$.

Definition 3.17. Ein Vektorfeld $X \in \chi(M)$ hat kompakten Träger, falls der Abschluß der Menge $\{p \in M \mid X_p \neq 0\}$ kompakt ist.

Satz 3.18. Ist X ein Vektorfeld mit kompaktem Träger, so ist sein Fluß φ_t für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert und jedes $\varphi_t: M \rightarrow M$ ist ein globaler Diffeomorphismus.

Bemerkung: Die Voraussetzung des Satzes ist zum Beispiel für kompakte Mannigfaltigkeiten erfüllt. Ist der lokale Fluß von X für alle t definiert, so nennt man X vollständig.

Beweis: Für alle $p \in M$ existieren offene Umgebungen V von p und ein Intervall $I_p = (-\varepsilon, \varepsilon)$, so dass der Fluß $\varphi_t(q)$ für alle $q \in V, t \in I_p$ definiert ist. Endlich viele dieser Mengen überdecken den Träger $K = \text{supp}(X) : V_1, \dots, V_r$, d.h.

$$X_q = 0 \quad \text{für alle } q \in M \setminus \bigcup_{i=1}^r V_i .$$

Durch Punkte $q \in M$ mit $X_q = 0$ existiert immer die konstante Integralkurve $c(t) = q$.

Seien $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ die Definitionsbereiche der Flüsse auf V_i und $\varepsilon := \min \varepsilon_i$. Dann ist $\varphi_t(q)$ definiert für alle $q \in M$ und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sei $T \in \mathbb{R}$ beliebig und $|T| = k \frac{\varepsilon}{2} + r$, mit $k \in \mathbb{N}$ und $r \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$. Man definiert nun

$$\varphi_T := (\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})^k \cdot \varphi_r \quad \text{für } T > 0 \quad \text{und} \quad \varphi_T := (\varphi_{-\frac{\varepsilon}{2}})^k \cdot \varphi_r \quad \text{für } T < 0 .$$

Mit dieser Definition wird $\{\varphi_t\}$ ein global definierter Fluß des Vektorfeldes X . $\square$

3.5. Lie-Ableitung von Vektorfeldern. Die Lie-Ableitung von Funktionen und Vektorfeldern kann man auch mit Hilfe des lokalen Flußes beschreiben. Sei X ein glattes Vektorfeld auf M mit dem lokalem Fluß $\varphi_t: M \rightarrow M$. Dann ist X nach Definition tangential zu den Flußlinien $c_p(t) = \varphi_t(p)$, woraus folgt:

$$\begin{aligned} L_X(f)_p &= df_p(X_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\varphi_t(p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\varphi_t(p)) - f(p)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\varphi_t^* f)(p) - f(p)) , \end{aligned}$$

wobei das Zurückziehen von Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mittels φ_t durch Verknüpfung definiert ist, d.h. $(\varphi_t^* f)(p) = f(\varphi_t(p))$. Analog, also unter Benutzung des lokalen Flußes kann man nun auch die Lie-Ableitung anderer Objekte beschreiben. Für Vektorfelder definiert man das Zurückziehen mittels der lokalen Diffeomorphismen φ_t durch

$$(\varphi_t^* Y)_p = ((\varphi_{-t})_* Y)_{\varphi_t(p)} = (d\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)} Y_{\varphi_t(p)} .$$

wobei $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ und $d\varphi_{-t}: T_{\varphi_t(p)}M \rightarrow T_pM$.

Satz 3.19. *Seien X, Y beliebige glatte Vektorfelder auf M . Dann gilt in $p \in M$:*

$$L_X Y_p = [X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\varphi_t^* Y)_p - Y_p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_p - (\varphi_{t*} Y)_p) .$$

Beweis: Beim Übergang von φ_t^* zu φ_{t*} geht t in $-t$ über, daher stimmen die beiden Grenzwerte in der Formel für $L_X Y$ offensichtlich überein.

Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann definiert man $F(t, p) := f(\varphi_t(p)) - f(p)$. Es existiert eine glatte Funktion g mit $F(t, p) = t g(t, p)$. Insbesondere folgt:

$$g(0, p) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t, p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\varphi_t(p)) = X_p(f) = L_X f_p$$

Die Existenz der Funktion g ist ein Spezialfall des Lemmas 2.9. Unmittelbar aus der Definition des Differentials ergibt sich nun die folgende Rechnung

$$\begin{aligned}
 (\varphi_t^* Y)_p(f) &= (d\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)} Y_{\varphi_t(p)}(f) \\
 &= Y_{\varphi_t(p)}(f \circ \varphi_{-t}) \\
 &= Y_{\varphi_t(p)}(F(-t, \cdot) + f) \\
 &= -t Y_{\varphi_t(p)}(g(t, \cdot)) + Y_{\varphi_t(p)}(f) \\
 &= Y(f)_{\varphi_t(p)} - t Y_{\varphi_t(p)}(g(t, \cdot))
 \end{aligned}$$

Für den Grenzwert folgt also:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\varphi_t^* Y)_p - Y_p)(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y(f)_{\varphi_t(p)} - Y(f)_p) - \lim_{t \rightarrow 0} Y_{\varphi_t(p)}(g(t, \cdot)) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(f)(\varphi_t(p)) - Y_p(X(f)) \\
 &= X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) \\
 &= [X, Y]_p(f) .
 \end{aligned}$$

□

3.6. Ergänzungen zu Vektorfeldern.

Satz 3.20. *Sei X ein Vektorfeld auf M mit $X_p \neq 0$ für ein $p \in M$. Dann existiert eine Karte (U, y) um p mit*

$$X = \frac{\partial}{\partial y_1} \quad \text{auf } U .$$

Beweis: Die Aussage ist lokal, kann also mittels Karten auf die entsprechende Situation im $\mathbb{R}^n$ zurückgeführt werden. Somit sei o.B.d.A. $M = \mathbb{R}^n$ mit den Standardkoordinaten $x = (x_1, \dots, x_n)$, weiter sei $p = 0$ und $X_0 = \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_0 = e_1$. Diese letzte Eigenschaft kann man immer durch eine lineare Koordinatentransformation erreichen.

Man nutzt folgende Idee für die Konstruktion der geeigneten Karten: durch den Punkt $(0, a_2, \dots, a_n)$ existiert eine eindeutig bestimmte Integralkurve von X . Jeder Punkt auf dieser Kurve ist eindeutig festgelegt durch die benötigte Zeit.

Sei φ_t der lokale Fluß von X , dann definiert man durch

$$\psi(a_1, \dots, a_n) = \varphi_{a_1}(0, a_2, \dots, a_n)$$

eine Abbildung ψ auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$. Man möchte nun zeigen, dass ψ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Dazu berechnet man $d\psi$ im Punkt $a =$

$(a_1, \dots, a_n)$:

$$\begin{aligned} d\psi \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_a \right) (f) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_a (f \circ \psi) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\psi(a_1 + t, a_2, \dots, a_n)) - f(\psi(a))] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\varphi_{a_1+t}(0, a_2, \dots, a_n)) - f(\psi(a))] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\varphi_t(\psi(a))) - f(\psi(a))] \\ &= X_{\psi(a)}(f) \end{aligned}$$

Analog berechnet man nun im Punkt 0 und für $i \geq 2$ das Differential von ψ auf den Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0$:

$$\begin{aligned} d\psi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right) (f) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 (f \circ \psi) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\psi(0, \dots, t, \dots, 0)) - f(0)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(0, \dots, t, \dots, 0) - f(0)] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_0 \end{aligned}$$

Da $X_0 = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_0$ folgt $d\psi_0 = \text{id}$. Damit ist ψ ein lokaler Diffeomorphismus und man kann $y := \psi^{-1}$ als neue Koordinaten um die $0 \in \mathbb{R}^n$ einführen. In diesen Karten gilt dann: $X = \frac{\partial}{\partial y_1}$. Denn wie schon gezeigt ist

$$X_b(f) = d\psi \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{\psi^{-1}(b)} \right) (f) = \frac{\partial f \circ \psi}{\partial x_1} \Big|_{\psi^{-1}(b)} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_b$$

denn nach Definition der partiellen Ableitung in einer Karte (U, y) gilt andererseits:

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_b (f) = \frac{\partial f \circ \psi}{\partial x_1} \Big|_{\psi^{-1}(b)}.$$

□

Bemerkung: Direkt aus der Definition der Lie-Klammer folgt $L_X X = 0$. Diese Eigenschaft lässt sich aber auch mit Hilfe des lokalen Flusses φ_t von X zeigen. Tatsächlich findet man, dass $(\varphi_{t*} X)_p = X_p$ für alle $p \in M$ und alle t , für die φ_t definiert ist, erfüllt ist. Der Vektor $X_{\varphi_{-t}(p)}$ ist der Tangentialvektor an die Kurve $s \mapsto \varphi_s(p)$ für $s = -t$ bzw. der Tangentialvektor an die Kurve $c(s) := \varphi_{s-t}(p)$ für $s = 0$. Daher folgt:

$$(\varphi_{t*} X)_p = d\varphi_t(X_{\varphi_{-t}(p)}) = d\varphi_t \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c(s) \right) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_t \circ \varphi_{s-t}(p) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi_s(p) = X_p$$

Aus der Definition der Lie-Ableitung $L_X X$ als Ableitung der Kurve $(\varphi_{t*} X)_p$ erhält man damit nochmal $L_X X = 0$.

Lemma 3.21. *Sei ψ ein Diffeomorphismus und X ein Vektorfeld auf M mit dem lokalem Fluß φ_t . Dann hat das Vektorfeld ψ_*X den Fluß $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$.*

Beweis: Sei f ein beliebiger Funktionskeim um $q \in M$. Dann ergibt sich die Aussage des Lemmas aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} (\psi_*X)_q(f) &= d\psi(X_{\psi^{-1}(q)})(f) = X_{\psi^{-1}(q)}(f \circ \psi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \psi)(\varphi_t(\psi^{-1}(q))) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(q)) . \end{aligned}$$

Man sieht, dass das Vektorfeld ψ_*X in einem Punkt q tangential an die Kurve $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(q)$ ist. Die Menge dieser Kurven bilden damit den lokalen Fluß von ψ_*X . $\square$

Folgerung 3.22. *Sei $\psi : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus und X ein Vektorfeld auf M mit dem lokalen Fluß φ_t . Dann gilt:*

$$\psi_*X = X \quad \text{genau dann, wenn} \quad \varphi_t \circ \psi = \psi \circ \varphi_t .$$

Beweis: Die Vektorfelder X und ψ_*X stimmen genau dann überein, wenn ihre lokalen Flüsse gleich sind. Nach dem obigen Lemma bedeutet das: $\varphi_t = \psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$. $\square$

Das folgende Lemma gibt eine naheliegende Charakterisierung der Bedingung $[X, Y] = 0$: zwei Vektorfelder kommutieren genau dann, wenn ihre Flüsse kommutieren.

Lemma 3.23. *Sei X ein Vektorfeld mit dem lokalem Fluß φ_t und sei Y ein Vektorfeld mit dem lokalem Fluß ψ_t . Dann gilt:*

$$[X, Y] = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t ,$$

wobei die rechte Gleichung für alle s und t erfüllt sein soll, für die die entsprechenden Flüsse definiert sind.

Beweis: Sei zunächst vorausgesetzt, dass die Flüsse kommutieren dann folgt nach Folgerung 3.22 $\varphi_{t*}Y = Y$ für alle t , für die der Fluß definiert ist. Nach Ableiten erhält man daraus $L_X Y = 0$.

Für den Beweis der umgekehrten Richtung hat man in allen Punkte $q \in M$ die Voraussetzung: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(Y_q - (\varphi_{t*}Y)_q) = 0$ (*). Man definiert nun eine Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$ durch $c(t) = (\varphi_{t*}Y)_p$. Die Berechnung des Tangentialvektors an c im Punkt $c(t)$ ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [c(t+s) - c(t)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\varphi_{(t+s)*}Y - \varphi_{t*}Y]_p \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [d\varphi_t(\varphi_{s*}Y)_{\varphi_{-t}(p)} - d\varphi_t Y_{\varphi_{-t}(p)}] \\ &= d\varphi_t \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [(\varphi_{s*}Y)_{\varphi_{-t}(p)} - Y_{\varphi_{-t}(p)}] \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichung nutzt man die Voraussetzung (*) im Punkte $q = \varphi_{-t}(p)$. Außerdem verwendet man die offensichtliche Beziehung $(f \circ g)_*X = f_*(g_*X)$. Damit ist $c(t)$ konstant also $c(t) = c(0)$, d.h. $\varphi_{t*}Y = Y$ und die Behauptung ergibt sich aus Folgerung 3.22. $\square$

In Satz 3.20 wurde gezeigt, dass man für ein Vektorfeld X mit $X_p \neq 0$ Karten (U, y) um p finden kann, für die X ein Koordinatenvektorfeld auf U ist. Man betrachtet nun folgendes Problem: gegeben sind zwei Vektorfelder X und Y , die in einem Punkt $p \in M$, und damit in einer kleinen Umgebung von p , linear unabhängig sind. Ist es dann möglich Karten zu finden, in denen X, Y Koordinatenvektorfelder sind? Aus dem Satz von Schwarz folgt, dass der Kommutator von je zwei Koordinatenvektorfeldern verschwindet, d.h. in jeder Karte (U, x) gilt, dass $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$. Damit ist $[X, Y] = 0$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass es die gesuchten Koordinaten gibt. Tatsächlich ist diese Bedingung auch hinreichend.

Satz 3.24. *Seien $X_1, \dots, X_k$ Vektorfelder auf einer Umgebung V von $p \in M$, die in jedem Punkt von V linear unabhängig sind und es gelte $[X_a, X_b] = 0$ für $1 \leq a, b \leq k$. Dann existiert eine Karte (U, x) um p mit:*

$$X_a = \frac{\partial}{\partial x_a} \quad \text{auf } U \quad \text{für } a = 1, \dots, k.$$

Beweis: O.B.d.A. kann man wieder annehmen: $M = \mathbb{R}^n, p = 0$ und $X_a = \frac{\partial}{\partial x_a} \Big|_0$ für $a = 1, \dots, k$. Sei φ_t^a der lokale Fluß zum Vektorfeld X_a , dann definiert man

$$\psi(a_1, \dots, a_n) := \varphi_{a_1}^1(\varphi_{a_2}^2(\dots(\varphi_{a_k}^k(0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots, a_n))\dots)) ,$$

Wie im Beweis von Satz 3.20 berechnet man das Differential von ψ und erhält:

$$d\psi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right) = \begin{cases} X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 & i = 1, \dots, k \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 & i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

Somit ist ψ wieder auf einer Umgebung der Null ein Diffeomorphismus und man kann eine neue Karte durch $y = \psi^{-1}$ definieren. Analog zum Beweis von Satz 3.20 findet man auf dieser Kartenumgebung

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} .$$

Aus Lemma 3.23 folgt nun, dass man die Reihenfolge der $\varphi_{a_i}^i$'s in der Definition von ψ vertauschen kann. Schreibt man nun $\psi = \varphi_{a_i}^i(\dots)$, so folgt für $i = 1, \dots, k$

$$X_i = \frac{\partial}{\partial y_i} .$$

$\square$

4. INTEGRAL-MANNIGFALTIGKEITEN

4.1. Distributionen und Integral-Mannigfaltigkeiten. Ziel dieses Abschnitts ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Integralkurven, sowie eine geometrische Interpretation von gewissen Systemen partieller Differentialgleichungen. Die Darstellung folgt dem entsprechenden Abschnitt im Buch von M. Spivak.

Definition 4.1. Eine k -dimensionale Distribution auf M ist eine Zuordnung $p \mapsto \Delta_p$ mit

- (1) $\Delta_p \subset T_p M$ ist ein k -dimensionaler Unterraum
- (2) Für alle $p \in M$ existiert eine Umgebung U von p und auf U definierte Vektorfelder $X_1, \dots, X_k$ mit:

$$\Delta_q = \text{span}\{X_1(q), \dots, X_k(q)\} \quad \text{für alle } q \in U .$$

Sei X ein Vektorfeld auf M . Man sagt, dass X ein Vektorfeld in Δ ist, falls $X_p \in \Delta_p$ für alle $p \in M$ gilt.

Bemerkung: Äquivalent kann man Distributionen auch als Unterbündel $\Delta \subset TM$ definieren. Vektorfelder in Δ sind dann genau die Schnitte von Δ .

Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über M . Eine Teilmenge $F \subset E$ heißt *Unterbündel* von E , falls $F \rightarrow M$ ein Vektorbündel ist und F_p für alle $p \in M$ ein Unterraum von E_p ist. Es folgt, dass F eine Untermannigfaltigkeit von E ist.

Definition 4.2. Eine Integral-Mannigfaltigkeit einer Distribution Δ ist eine Untermannigfaltigkeit $i : N \hookrightarrow M$ mit:

$$di(T_p N) = \Delta_p \quad \text{für alle } p \in N .$$

Bemerkung: Der Begriff der Untermannigfaltigkeit ist hier in dem schwächeren Sinne zu benutzen, d.h. $N \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit, falls N eine Mannigfaltigkeit ist und eine injektive Immersion $i : N \rightarrow M$ existiert. Im Allgemeinen existieren keine Integral-Mannigfaltigkeiten (noch nicht einmal lokal). Als Beispiel betrachtet man folgende 2-dimensionale Distribution auf $\mathbb{R}^3$.

Beispiel: In $p = (a, b, c)$ sei die Distribution Δ gegeben als:

$$\Delta_p := \text{span}\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + b\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p\right\} = \left\{r\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + s\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p + br\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p \mid r, s \in \mathbb{R}\right\} .$$

Für den Beweis, dass zu Δ keine Integral-Mannigfaltigkeiten existieren, sei auf das Buch von Spivak verwiesen.

4.2. Integrable Distributionen. Sei $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und seien X, Y zwei Vektorfelder auf M . Durch Einschränkung auf N erhält man zwei Vektorfelder auf N . Es soll zunächst gezeigt werden, dass der Kommutator dieser eingeschränkten Vektorfelder gleich der Einschränkung von $[X, Y]$ auf N ist. Das ist nicht offensichtlich, da der Kommutator auf M mehr Ableitungen enthält.

Definition 4.3. Sei $f : N \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung. Zwei Vektorfelder $X \in \chi(N)$ und $Y \in \chi(M)$ nennt man f -verknüpft, falls

$$Y_{f(p)} = df(X_p)$$

für alle $p \in N$ erfüllt ist.

Bemerkung: Zwei Vektorfelder $X \in \chi(N), Y \in \chi(M)$ sind genau dann f -verknüpft, wenn

$$Y(\phi) \circ f = X(\phi \circ f)$$

für alle Funktionen (bzw. Funktionskeime) ϕ auf M gilt.

Lemma 4.4. Sei $f : N \rightarrow M$ eine Immersion und $Y \in \chi(M)$ ein Vektorfeld mit

$$Y_{f(p)} \in \text{Im}(df_p) .$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld X auf N , so dass X und Y f -verknüpft sind.

Beweis: Man definiert X_p durch die Gleichung $Y_{f(p)} = df(X_p)$. Der Vektor X_p ist wohldefiniert nach Voraussetzung und eindeutig bestimmt, da f eine Immersion, d.h. df injektiv ist.

Da f eine Immersion ist existieren Karten (U, x) bzw. (V, y) um p bzw. $f(p)$ mit

$$y \circ f \circ x^{-1}(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0) .$$

In diesen Karten gilt dann für $i = 1, \dots, n$:

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{f(p)} .$$

Sei nun $Y = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ mit glatten, auf V definierten, Funktionen a_i . Dann ist notwendigerweise $X = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, mit $b_i := a_i \circ f$. Dann sind die b_i wieder glatte Funktionen und X damit ein glattes Vektorfeld. $\square$

Beispiel: Sei N eine Untermannigfaltigkeit von M und $i : N \rightarrow M$ die Inklusionsabbildung, weiter sei $Y \in \chi(M)$ ein Vektorfeld mit $Y_p \in \text{di}(T_p N)$ für alle $p \in N$. Das wie oben beschriebene, eindeutig bestimmte Vektorfeld $X \in \chi(N)$ mit $\text{di}(X) = Y$, ist dann genau die Einschränkung von Y auf N .

Lemma 4.5. *Sei $f : N \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung und seien $X_i \in \chi(N)$ bzw. $Y_i \in \chi(M)$, $i = 1, 2$ zwei Paare von f -verknüpften Vektorfeldern. Dann sind die Kommutatoren $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ ebenfalls f -verknüpft, d.h. $df([X_1, X_2]_p) = [Y_1, Y_2]_{f(p)}$.*

Beweis: Sei g eine Funktion (bzw. Funktionskeim) auf M . Dann gilt nach Voraussetzung für $i = 1, 2$:

$$Y_i(g) \circ f = X_i(g \circ f)$$

Damit berechnet man

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2](g) \circ f &= Y_1(Y_2(g)) \circ f - Y_2(Y_1(g)) \circ f \\ &= X_1(Y_2(g) \circ f) - X_2(Y_1(g) \circ f) \\ &= X_1(X_2(g \circ f)) - X_2(X_1(g \circ f)) \\ &= [X_1, X_2](g \circ f) \end{aligned}$$

□

Anwendung: Sei $N \subset M$ eine Integral-Mannigfaltigkeit einer Distribution Δ und seien X, Y zwei Vektorfelder in Δ . Wie oben beschrieben existieren eindeutig bestimmte Vektorfelder $\bar{X}, \bar{Y}$ auf N mit $X_p = di(\bar{X}_p)$, $Y_p = di(\bar{Y}_p)$, d.h. $\bar{X} = X|_N$, $\bar{Y} = Y|_N$. Damit folgt:

$$di([\bar{X}, \bar{Y}]_p) = [X, Y]_p \quad \text{d.h.} \quad [X|_N, Y|_N] = [X, Y]|_N .$$

Da $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ Vektorfelder auf N sind, gilt dies auch für ihren Kommutator $[\bar{X}, \bar{Y}]$. Nach Voraussetzung, da N eine Integral-Mannigfaltigkeit ist, folgt daraus $di([\bar{X}, \bar{Y}]) \in \Delta_p$. Also, wie oben gezeigt, auch $[X, Y]_p \in \Delta_p$. Damit ist gezeigt: existiert eine Integral-Mannigfaltigkeit für die Distribution Δ , dann liegt mit zwei Vektorfeldern X, Y in Δ auch deren Kommutator in Δ . Man erhält also eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Integral-Mannigfaltigkeit.

Definition 4.6. *Eine Distribution Δ heißt integrabel (oder auch involutiv), falls für je zwei Vektorfelder X, Y in Δ auch $[X, Y]$ ein Vektorfeld in Δ ist.*

Lemma 4.7. *Seien $X_1, \dots, X_k$ Vektorfelder definiert in einer Umgebung U von p mit $\Delta_q = \text{span}\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$ für alle $q \in U$. Dann ist Δ integrabel genau dann, wenn Funktionen $c_{ij}^r \in \mathcal{C}^\infty(U)$ existieren mit*

$$[X_i, X_j] = \sum_r c_{ij}^r X_r .$$

Beweis: Ist die Distribution integrabel, dann ist die obige Bedingung trivialerweise erfüllt. Sei nun die Bedingung erfüllt und X, Y zwei beliebige Vektorfelder in Δ , dann existieren

lokal Funktionen a_i und b_i mit: $X = \sum a_i X_i$ und $Y = \sum b_i X_i$. Berechnet man nun den Kommutator, so folgt:

$$[X, Y] = \sum_{i,j} [a_i X_i, b_j X_j] = \sum_{i,j} (a_i b_j [X_i, X_j] + a_i X_i(b_j) X_j - b_j X_j(a_i) X_i) .$$

Unter der Voraussetzung, dass sich der Kommutator $[X_i, X_j]$ für alle $1 \leq i, j \leq k$ als Linearkombination der Vektorfelder X_i schreiben lässt, folgt damit, dass dies auch für $[X, Y]$ gilt, d.h. der Kommutator $[X, Y]$ liegt wieder in der Distribution Δ . $\square$

Die Anwendung von Lemma 4.5 besagt also, dass aus der Existenz von Integralmannigfaltigkeiten folgt, dass die Distribution integrabel ist. Der Satz von Frobenius besagt nun, dass auch die Umkehrung gilt.

4.3. Satz von Frobenius für Distributionen.

Satz 4.8. *Sei Δ eine k -dimensionale integrable Distribution auf M . Dann existieren für jeden Punkt $p \in M$ Karten (U, x) mit*

$$x(p) = 0, \quad x(U) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \dots \times (-\varepsilon, \varepsilon) ,$$

so dass für alle $a_{k+1}, \dots, a_n$ mit $|a_i| < \varepsilon$ für $i = k+1, \dots, n$ die Menge

$$N_a := \{q \in U \mid x_{k+1}(q) = a_{k+1}, \dots, x_n(q) = a_n\}$$

eine Integral-Mannigfaltigkeit von Δ ist. Jede zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit von Δ eingeschränkt auf U ist in einer dieser Mengen enthalten.

Beweis: Da es um eine lokale Aussage geht, kann man o.B.d.A. annehmen, dass $M = \mathbb{R}^n, p = 0$ und $\Delta_0 = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial t_1}\Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial t_k}\Big|_0\right\} \subset T_0\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$. Sei $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Projektion $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$. Dann ist nach Voraussetzung $d\pi : \Delta_0 \rightarrow T_0\mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus. Aus Stetigkeitsgründen ist dann auch $d\pi : \Delta_q \rightarrow T_q\mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus für alle q in einer Umgebung U der Null. Damit existieren eindeutig bestimmte Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \chi(U)$ mit $X_1(q), \dots, X_k(q) \in \Delta_q$ und

$$d\pi(X_i(q)) = \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{\pi(q)} \quad \text{für } i = 1, \dots, k .$$

d.h. die Vektorfelder X_i und $\frac{\partial}{\partial t_i}$ für $i = 1, \dots, k$ sind π -verknüpft auf der Umgebung U . Da $\frac{\partial}{\partial t_i}$ Koordinatenvektorfelder sind folgt mit Lemma 4.5 die Gleichung

$$d\pi([X_i, X_j]_q) = \left[\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}\right] = 0 .$$

Da nun $d\pi$ ein Isomorphismus auf Δ_q ist (für alle $q \in U$) und da aufgrund der Integrabilität $[X_i, X_j]_q \in \Delta_q$ gilt folgt $[X_i, X_j] = 0$. Nach Satz 3.24 findet man also ein Koordinatensystem (U, x) um Null mit

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, k .$$

Man überzeugt sich nun, dass (U, x) das gesuchte Koordinatensystem ist. Sei dazu $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ die Abbildung $q \mapsto (x_{k+1}(q), \dots, x_n(q))$. Als Teil einer Kartenabbildung ist Φ eine Submersion und jeder Punkt im Bild von Φ ist ein regulärer Wert. Nach dem Satz vom regulären Wert ist also $N_a = \Phi^{-1}(a_{k+1}, \dots, a_n)$ eine Untermannigfaltigkeit mit

$$T_q N_a = \ker d\Phi_a = \text{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}_q = \text{span}\{X_1(q), \dots, X_k(q)\} = \Delta_q ,$$

d.h. wie behauptet ist N_a eine Integral-Mannigfaltigkeit der Distribution Δ .

Sei N eine zusammenhängende Integral-Mannigfaltigkeit von Δ eingeschränkt auf U . Sei $i : N \rightarrow U$ die Inklusionsabbildung. Man betrachtet $d(x^m \circ i)$ für $k+1 \leq m \leq n$. Dann gilt für einen Tangentialvektor X_q an N :

$$d(x^m \circ i)(X_q) = X_q(x^m \circ i) = di(X_q)(x^m) = 0 .$$

Denn $di(X_q) \in \Delta_q$ und Δ_q wird aufgespannt von $\frac{\partial}{\partial x_i}$ für $i = 1, \dots, k$. Es folgt also $d(x^m \circ i) = 0$, d.h. die Funktionen $x^m \circ i$ für $m = k+1, \dots, n$ sind konstant auf der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit N . $\square$

Bemerkung: Sei $\Delta \subset TM$ eine integrable Distribution. Dann ist M eine disjunkte Vereinigung von maximalen zusammenhängenden Integral-Mannigfaltigkeiten. Jeder Punkt $p \in M$ liegt in einer eindeutig bestimmten maximalen zusammenhängenden Integral-Mannigfaltigkeit $I(p)$, die gegeben ist durch

$$I(p) := \{q \in M \mid \exists c : [0, 1] \rightarrow M, \text{ stückweise glatt } c(0) = p, c(1) = q, \dot{c}(t) \in \Delta_{c(t)}, t \in [0, 1]\} .$$

Für Einzelheiten sei auf das Buch von Spivak verwiesen.

4.4. Immersierte Untermannigfaltigkeiten. Im Zusammenhang mit Integral-Mannigfaltigkeiten sieht man zum ersten Mal, dass es nötig ist, einen etwas allgemeineren Begriff von Untermannigfaltigkeiten zu benutzen. Man unterscheidet eingebettete und immersierte Untermannigfaltigkeiten.

Eine Teilmenge $N \subset M^n$ ist eine k -dimensionale *eingebettete Untermannigfaltigkeit*, wenn zu jedem Punkt $p \in N$ eine Karte (U, X) von M um p existiert, so dass $x(U \cap N) = x(U) \cap \mathbb{R}^k$ gilt. In diesem Fall ist N mit der Teilraum-Topologie eine topologische Mannigfaltigkeit und es existiert eine eindeutig bestimmte differenzierbare Struktur auf N , so dass die Inklusionsabbildung $i : N \hookrightarrow M$ eine Einbettung ist. Dabei ist eine Einbettung eine injektive Immersion, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist. Man sieht Bilder von Einbettungen sind eingebettete Untermannigfaltigkeiten (und umgekehrt).

Allgemeiner nennt man eine Teilmenge $N \subset M$ eine *immersierte Untermannigfaltigkeit*, falls N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist (die differenzierbare Struktur kann ganz unabhängig von der auf M sein) und die Inklusionsabbildung $i : N \hookrightarrow M$ eine Immersion ist.

Immersierte Untermannigfaltigkeiten erhält man oft durch folgende Konstruktion: Sei N eine Mannigfaltigkeit und $F : N \rightarrow M$ eine injektive Immersion. Dann existiert auf dem

Bild $F(N) \subset M$ eine eindeutig bestimmte Topologie und differenzierbare Struktur, für die $F : N \rightarrow F(N)$ ein Diffeomorphismus ist: eine Menge $U \subset F(N)$ ist genau dann offen, wenn $F^{-1}(U) \subset N$ offen ist. Sei (V, x) eine Karte auf N , dann definiert man durch $(F(V), x \circ F^{-1})$ eine Karte auf $F(N)$. Es folgt dann, dass die Inklusionsabbildung $i : F(N) \hookrightarrow M$ eine injektive Immersion ist. Denn $i = F \circ F^{-1}$ ist die Komposition eines Diffeomorphismus und einer Immersion.

Analog zu den eingebetteten Untermannigfaltigkeiten zeigt man, dass immersierte Untermannigfaltigkeiten genau die Bilder injektiver Immersionen sind.

Immersierte Untermannigfaltigkeiten tragen im Allgemeinen nicht die Teilraumtopologie. Es kann z.B. sein, dass man eine differenzierbare Abbildung $f : P \rightarrow M$ mit $f(P) \subset N$ hat, die aber nicht stetig als Abbildung nach N ist. Wenn aber die Abbildung $f : P \rightarrow N$ stetig ist, so ist sie auch differenzierbar.

Den Tangentialraum einer immersierten Untermannigfaltigkeit $i : N \hookrightarrow M$ in einem Punkt $p \in N$ identifiziert man mit $di(T_p N) \subset T_p M$. Man schreibt dafür oft einfach wieder $T_p N$.

Ein Beispiel für eine immersierte aber nicht eingebettete Untermannigfaltigkeit ist die Linie auf dem Torus $T^2 = S^1 \times S^1$, die definiert ist durch eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit irrationalem Anstieg. Das Bild solch einer Geraden liegt dann dicht in T^2 .

Zur Erinnerung: injektive Immersionen $F : N \rightarrow M$ von kompakten Mannigfaltigkeiten N sind immer Einbettungen.

5. LIE-GRUPPEN

Definition 5.1. *Ein Gruppe G heißt Lie-Gruppe, falls G eine Mannigfaltigkeit ist und die Abbildung $G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$ differenzierbar ist.*

Bemerkung: Die zweite Bedingung ist dazu äquivalent, dass die Gruppenoperationen, also die Abbildungen $g \mapsto g^{-1}$ und $(g, h) \mapsto gh$ differenzierbar sind.

Beispiele: Die klassischen Matrizen Gruppen sind Lie-Gruppen, z.B. $GL(n, \mathbb{R}), O(n)$ oder $U(n)$. Auch $\mathbb{R}^n$ mit der Vektoraddition ist eine Lie-Gruppe.

Definition 5.2. *Die Links- bzw. Rechtstranslation auf G sind für jedes fixiertes $g \in G$ definiert durch:*

$$l_g(h) = g \cdot h, \quad r_g(h) = h \cdot g.$$

Bemerkung: Die Abbildungen $l_g, r_g : G \rightarrow G$ sind Diffeomorphismen. Tatsächlich sind r_g und l_g nach Definition für alle $g \in G$ differenzierbar und es gilt $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$ (analog für r_g).

Definition 5.3. *Ein Vektorfeld $X \in \chi(G)$ heißt links-invariant, falls für alle $g \in G$:*

$$l_{g*}X = X,$$

d.h. X ist l_g -verknüpft zu sich selbst.

Bemerkungen:

- (1) Ein Vektorfeld X ist links-invariant genau dann, wenn $dl_g(X_h) = X_{gh}$ für alle $g, h \in G$. Denn nach der Definition des push-forwards folgt

$$(l_{g*}X)_h = dl_g(X_{l_g^{-1}(h)}) = dl_g(X_{g^{-1}h}).$$

- (2) Links-invariante Vektorfelder sind bestimmt durch den Wert in einem Punkt:

$$X_g = dl_g(X_e).$$

dabei ist e das Einselement der Gruppe G . Die Abbildung $X \in T_e G \mapsto \tilde{X} \in \chi(G)$ mit $\tilde{X}_g = dl_g(X)$ definierte eine Bijektion zwischen $T_e G$ und dem Raum der links-invarianten Vektorfelder. Insbesondere ist das so definierte $\tilde{X}$ ein differenzierbares Vektorfeld auf G . Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $\tilde{X} \mapsto \tilde{X}_e$.

- (3) Lie-Gruppen G sind parallelisierbar, d.h. es existiert die maximal mögliche Anzahl von $\dim G$ punktweise linear unabhängigen Vektorfeldern: Man setzt eine Basis in $T_e G$ fort zu links-invarianten Vektorfeldern auf G . Insbesondere sind Lie-Gruppen orientierbar. Die Sphären $S^1 = SO(2) = U(1)$ und $S^3 = SU(2) = Sp(1)$ sind Lie-Gruppen.
- (4) Analog zu links-invarianten kann man auch rechts-invariante Vektorfelder definieren.

(5) Sind G, H Lie-Gruppen, so auch $G \times H$.

Es war schon gezeigt worden, dass der Raum $\chi(M)$ der Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M eine Lie-Algebra ist. Neben dieser unendlich-dimensionalen Lie-Algebra gibt es auch endlich-dimensionale Beispiele, z.B. $\text{End}(V)$ mit $[A, B] := A \circ B - B \circ A$ oder $\mathbb{R}^3$ mit $[v, w] := v \times w$, wobei $\times$ das Vektorkreuzprodukt bezeichnet. Es soll nun gezeigt werden, dass zu jeder Lie-Gruppe eine eindeutig bestimmte Lie-Algebra gehört. Die letzten beiden Beispiele sind dann Spezialfälle davon.

Satz 5.4. *Sei G eine Lie-Gruppe und es bezeichne $\mathfrak{g} := T_e G$. Dann gilt:*

- (1) *Die Menge der links-invarianten Vektorfelder auf G ist ein reeller Vektorraum, der isomorph zu $\mathfrak{g} = T_e G$ ist. Insbesondere gilt $\dim G = \dim \mathfrak{g}$.*
- (2) *Der Kommutator zweier links-invarianten Vektorfelder ist links-invariant. Damit ist die Menge der links-invarianten Vektorfelder mit der Einschränkung des Kommutators von Vektorfeldern eine Lie-Algebra. Auf $\mathfrak{g} = T_e M$ ist die Lie-Algebren Struktur definiert durch $[X, Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e$, für $X, Y \in T_e G$. Insbesondere gilt: $\widetilde{[X, Y]} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$.*

Beweis: Die erste Aussage, also die Isomorphie zwischen dem Raum der links-invarianten Vektorfelder und $T_e G$ wurde schon gezeigt. Zum Beweis der zweiten Aussage bemerkt man zuerst, dass sich jedes links-invariante Vektorfeld als $\tilde{X}$ für ein $X \in T_e G$ schreiben lässt. Wie schon bemerkt sind links-invariante Vektorfelder l_g -verknüpft zu sich selbst. Damit sind auch die entsprechenden Kommutatoren l_g -verknüpft und es folgt

$$dl_g([\tilde{X}, \tilde{Y}]_e) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_g = \widetilde{[X, Y]}_g.$$

Der Kommutator von $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ ist also wieder links-invariant und es gilt die behauptete Gleichung, denn nach Definition ist $dl_g(Z) = \tilde{Z}_g$ für ein $Z \in \mathfrak{g}$.

□

Definition 5.5. *Die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ einer Lie-Gruppe G ist definiert als der Raum der links-invarianten Vektorfelder bzw. der Tangentialraum an G in e . Die Lie-Klammer ist definiert durch den Kommutator von Vektorfeldern bzw. wie in Satz 5.4.*

Beispiel: Sei $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, dann ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$. Die Lie-Klammer auf $\mathfrak{g}$ stimmt mit dem üblichen Kommutator von Matrizen überein: $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$.

5.1. Die Lie-Algebra - Lie-Gruppe Korrespondenz. Sei $H \subset G$ eine Lie-Untergruppe, d.h. eine Untergruppe von G , die auch eine Untermannigfaltigkeit von G ist. Hier betrachtet man Untermannigfaltigkeiten im schwachen Sinne, d.h. H ist selbst eine Lie-Gruppe und die Inklusionsabbildung $i : H \rightarrow G$ ist eine Immersion. Dann identifiziert man $T_e H$ mit dem Unterraum $di(T_e H)$ von $T_e G$. Jeder Vektor $X \in T_e H$ definiert ein links-invariantes Vektorfeld

X_G auf G und ebenso ein links-invariantes Vektorfeld X_H auf H . Diese beiden Vektorfelder sind i -verknüpft und da $i \circ l_a^H = l_a^G \circ i$ folgt:

$$diX_H(a) = di \circ dl_a^H(X) = dl_a^G \circ di(X) = X_G(a) .$$

Sind nun $X, Y \in T_e H$, dann sind auch die Kommutatoren i -verknüpft, d.h. es gilt

$$[X_G, Y_G]_e = di[X_H, Y_H]_e .$$

Damit ist $T_e H \subset T_e G$ eine Lie-Unteralgebra, d.h. ein Untervektorraum, der abgeschlossen unter der Lie-Klammer ist. Außerdem ist $T_e H$ mit der induzierten Lie-Klammer von G genau die Lie-Algebra von H . Insbesondere ist die Lie-Klammer auf der Lie-Algebra einer beliebigen Lie-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ immer die Einschränkung des üblichen Kommutators von Matrizen.

Zu jeder Untergruppe $H \subset G$ gehört also eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Es zeigt sich nun, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz 5.6. *Sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Dann existiert eine eindeutig bestimmte zusammenhängende Lie-Untergruppe $H \subset G$ mit $\text{Lie}(H) = \mathfrak{h}$. D.h. man hat eine bijektive Beziehung zwischen zusammenhängenden Lie-Untergruppen von G und Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{g}$.*

Beweis: Man definiert durch $\Delta_a = \{\tilde{X}_a = dl_a(X) \mid X \in \mathfrak{h}\} \subset T_a G$ eine Distribution auf G . Die Schnitte in Δ sind also genau die links-invarianten Vektorfelder $\tilde{X}$ zu Vektoren $X \in \mathfrak{h}$. Nach Satz 5.4 gilt aber $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$. Da $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra ist, muß mit $X, Y \in \mathfrak{h}$ auch der Kommutator $[X, Y]$ in $\mathfrak{h}$ liegen und damit ist $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ wieder ein Schnitt in Δ . Die Distribution Δ ist also integrabel. Man definiert H als die eindeutig bestimmte maximale Integral-Mannigfaltigkeit von Δ durch e , die nach dem Satz von Frobenius existiert. Es bleibt nun zu zeigen, dass $H \subset G$ eine Untergruppe ist und dass die Gruppenoperationen glatt sind.

Sei $b \in G$ dann folgt $dl_b(\Delta_a) = \Delta_{ba}$ aus der Definition von Δ . Daher permutiert die Links-Translation l_b die verschiedenen maximalen Integral-Mannigfaltigkeiten von Δ . Ist zum Beispiel c eine Kurve durch a in der Integral-Mannigfaltigkeit durch a . Dann ist $\dot{c}(t) \in \Delta_{c(t)}$ und $l_b(c)$ ist eine Kurve durch ba mit Tangentialvektoren $dl_b(\dot{c}(t)) \in dl_b(\Delta_{c(t)}) = \Delta_{bc(t)}$. Damit muß die Kurve $bc(t)$ aber in der Integral-Mannigfaltigkeit durch ba liegen.

Sei $b \in H$ ein beliebiges Gruppenelement, dann ist $l_{b^{-1}}(H)$ die maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch $l_{b^{-1}}(b) = e$, also $l_{b^{-1}}(H) = H$. Daraus für alle $a \in H$ auch $b^{-1} \cdot a \in H$ und somit ist $H \subset G$ eine Untergruppe.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ eine glatte Abbildung von $H \times H$ nach H ist. Das ergibt sich daraus, dass sie glatt als Abbildung nach G ist und dass H definiert ist als Blatt einer Blätterung auf G (siehe Spivak). $\square$

Bemerkung:

- (1) Nach dem Theorem von Ado ist jede Lie-Algebra isomorph zu einer Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra von $GL(n, \mathbb{R})$. Nach dem letzten Satz ist also jede Lie-Algebra isomorph zur Lie-Algebra einer Lie-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$. Für Lie-Algebren mit trivialem Zentrum folgt die Aussage trivialerweise aus der Existenz der adjungierten Darstellung.
- (2) Nach dem *Cartan-Kriterium* ist eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ automatisch eine Lie-Untergruppe von G , d.h. H mit der Teilraum-Topologie besitzt eine differenzierbare Struktur, die H zu einer Lie-Untergruppe von G macht.

5.2. Homomorphismen.

Definition 5.7. Ein Homomorphismus von Lie-Gruppen ist ein Gruppen-Homomorphismus, der auch eine differenzierbare Abbildung ist. Ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist eine lineare Abbildung, die die Lie-Klammern erhält.

Lemma 5.8. Sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen, dann ist $d\varphi$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus, d.h. es gilt

$$d\varphi([X, Y]) = [d\varphi(X), d\varphi(Y)]$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g} = T_e G$.

Beweis: Nach Definition der Lie-Klammer auf den Lie-Algebren von G bzw. H hat man für beliebige $X, Y \in \mathfrak{g} = T_e G$ die folgende Gleichung zu zeigen

$$d\varphi([\tilde{X}, \tilde{Y}]_e) = [\widetilde{d\varphi(X)}, \widetilde{d\varphi(Y)}]_e ,$$

dabei bezeichnet $\tilde{X}$ das links-invariante Vektorfeld zum Vektor $X \in T_e G$, d.h. das Vektorfeld $\tilde{X}$ ist definiert durch $\tilde{X}_g = dl_g(X)$. Da φ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt $\varphi \circ l_g = l_{\varphi(g)} \circ \varphi$. Nach Übergang zum Differential folgt daraus

$$d\varphi \circ dl_g = dl_{\varphi(g)} \circ d\varphi .$$

Diese Gleichung wendet man auf $X \in T_e G$ an und erhält

$$d\varphi(\tilde{X}_g) = \widetilde{d\varphi(X)}_{\varphi(g)} ,$$

d.h. die links-invarianten Vektorfelder $\tilde{X}$ und $\widetilde{d\varphi(X)}$ sind φ -verknüpft. Seien X, Y beliebige Vektoren in $T_e G$ dann sind auch die entsprechenden Kommutatoren φ -verknüpft und es folgt

$$d\varphi([\tilde{X}, \tilde{Y}]_e) = [\widetilde{d\varphi(X)}, \widetilde{d\varphi(Y)}]_e ,$$

Das ist aber genau die Gleichung, die zu zeigen war, d.h. $d\varphi$ ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus. □

Beispiel: Sei $G = H = \mathbb{R}$, mit der Addition als Gruppenoperation. Dann ist jeder differenzierbare Homomorphismus (tatsächlich ist stetig ausreichend) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von der Form $\varphi(t) = ct$ für ein geeignetes c . Denn leitet man $\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t)$ nach s in $s = 0$ ab, dann folgt $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(0)$, also $\varphi(t) = ct$ mit $c = \dot{\varphi}(0)$. Jeder differenzierbare Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist von der Form $\varphi(t) = e^{ict}$. In beiden Fällen ist das Differential $d\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Multiplikation mit c .

Bemerkung: Es existiert kein nicht-trivialer Lie-Gruppen-Homomorphismus $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Denn $\varphi(S^1)$ wäre eine kompakte Untergruppe in $\mathbb{R}$, was nicht möglich ist: Sei $G \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Untergruppe, dann ist G beschränkt, aber mit jedem $g \in G$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $ng \in G$, was aber der Beschränktheit von G widerspricht. Man sieht also, dass es Lie-Algebren-Homomorphismen $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ gibt, die sich nicht als Differential eines Lie-Gruppen-Homomorphismus $G \rightarrow H$ ergeben. Mit dem folgenden Satz hat man aber wenigstens ein lokales Resultat.

Satz 5.9. *Seien G, H Lie-Gruppen und sei $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Dann existiert eine Umgebung U von $e \in G$ und eine glatte Abbildung $\varphi : U \rightarrow H$ mit*

- (1) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ falls $a, b, a \cdot b \in U$
- (2) $d\varphi(X) = \Phi(X)$ für alle $X \in \mathfrak{g} = T_e G$
- (3) Sind $\varphi, \psi : G \rightarrow H$ zwei Lie-Gruppen-Homomorphismen mit $d\varphi = d\psi = \Phi$ und ist G zusammenhängend, dann folgt $\varphi = \psi$.

Beweis: (nach Spivak) Die Idee des Beweises ist, dass man eine Abbildung durch ihren Graphen beschreiben kann. Dieser ist für Homomorphismen eine Untergruppe bzw. Unteralgebra.

Man definiert $\mathfrak{k} := \{(X, \Phi(X)) \mid X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = \text{Lie}(G \times H)$, d.h. $\mathfrak{k}$ ist der Graph von Φ und die Voraussetzung, dass Φ ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist, ist äquivalent dazu, dass $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ eine Unteralgebra ist:

$$[(X_1, \Phi(X_1)), (X_2, \Phi(X_2))] = ([X_1, X_2], [\Phi(X_1), \Phi(X_2)]) = ([X_1, X_2], \Phi([X_1, X_2])) \in \mathfrak{k}.$$

Nach Satz 5.6 existiert eine eindeutig bestimmte Lie-Untergruppe $K \subset G \times H$ mit $\mathfrak{k} = \text{Lie}(K)$.

Sei $\pi_1 : G \times H \rightarrow G$ die Projektion auf den 1. Faktor. Dann ist $\omega := \pi_1|_K : K \rightarrow G$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus und

$$d\omega(X, \Phi(X)) = X.$$

Damit ist $d\omega : T_{e,e}K \rightarrow T_e G$ ein Isomorphismus. Es folgt, dass eine Umgebung V von (e, e) existiert, auf der ω ein Diffeomorphismus ist. Sei $U := \omega(V)$, dann ist U eine Umgebung von $e \in G$.

Sei $\pi_2 : G \times H \rightarrow H$ die Projektion auf den 2. Faktor. Dann definiert man auf U :

$$\varphi := \pi_2 \circ \omega^{-1}.$$

Die Bedingung (1) ist erfüllt, da π_2 und ω^{-1} Gruppen-Homomorphismen sind. Auch die Bedingung (2) ist erfüllt, da

$$d\varphi(X) = \pi_2(X, \Phi(X)) = \Phi(X) .$$

Bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien also $\varphi, \psi : G \rightarrow H$ zwei Homomorphismen mit $d\varphi = d\psi = \Phi$. Man definiert den injektiven Gruppen-Homomorphismus

$$\theta : G \rightarrow G \times H, \quad a \mapsto (a, \psi(a)) .$$

Sei $\hat{G} = \theta(G) \subset G \times H$ das Bild von θ , also der Graph von ψ . Dann ist $\hat{G}$ eine zusammenhängende Lie-Untergruppe von $G \times H$ mit Lie-Algebra $\text{Lie}(\hat{G}) = \mathfrak{k}$. Es gilt nämlich $d\theta(X) = (X, \Phi(X))$. Aus Satz 5.6 folgt nun $\hat{G} = K$. Die Untergruppe K ist eindeutig durch Φ bestimmt. Somit stimmen die Graphen von φ und ψ überein, d.h. $\varphi = \psi$. $\square$

Bemerkung: Der Gruppen-Homomorphismus aus Satz 5.9 ist auf ganz G definiert, falls G einfach-zusammenhängend ist. Unter dieser Voraussetzung hat man also eine bijektive Beziehung zwischen Lie-Gruppen-Homomorphismen von G nach H und Lie-Algebren-Homomorphismen von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{h}$.

Folgerung 5.10. *Zwei Lie-Gruppen mit isomorphen Lie-Algebren sind lokal isomorph. Die Isomorphie ist global, falls beide Gruppen einfach-zusammenhängend sind.*

Folgerung 5.11. *Eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit abelscher Lie-Algebra ist abelsch. Dabei heißt eine Lie-Algebra abelsch, falls alle Lie-Klammern Null sind.*

Beweis: Eine abelsche Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$. Nach Folgerung 5.10 ist G dann lokal isomorph zu $\mathbb{R}^n$. Es gilt also $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b in einer hinreichend kleinen Umgebung von $e \in G$. Jede solcher Umgebungen erzeugt aber die ganze Gruppe, d.h. jedes Gruppenelement läßt sich als Produkt von Elementen aus dieser Umgebung schreiben. Damit ist die ganze Gruppe G abelsch. $\square$

Bemerkung:

- (1) Alle zusammenhängenden Lie-Gruppen mit der gleichen Lie-Algebra werden von der gleichen einfach-zusammenhängenden Lie-Gruppe überlagert.
- (2) Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G ist gleich der Lie-Algebra der Zusammenhangskomponente der Eins in G . Zum Beispiel ist $\text{Lie}(O(n)) = \text{Lie}(SO(n))$.

5.3. Die Exponential-Abbildung.

Satz 5.12. *Links-invariante Vektorfelder sind vollständig, d.h. für ein links-invariantes Vektorfeld X auf einer Lie-Gruppe G ist der Fluß φ_t für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert. Weiter gilt $\varphi_t(g) = g \cdot \varphi_t(e)$ für alle $g \in G$ und $t \in \mathbb{R}$, d.h. die Kurve $a(t) := g \cdot \varphi_t(e)$ ist die maximale Integralkurve von X durch g .*

Beweis: Sei X ein links-invariantes Vektorfeld auf G , dann gilt $X = l_{g*}X$ und das bedeutet für die Flüsse $\varphi_t = l_g \circ \varphi_t \circ l_g^{-1}$ für beliebige Gruppenelemente g . Angewandt auf das Gruppenelement g folgt die Gleichung $\varphi_t(g) = g \cdot \varphi_t(e)$. Damit genügt es zu zeigen, dass die Integralkurve von X durch e für alle Zeiten definiert ist.

Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $\varphi_t(e)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Es gilt

$$(2) \quad \varphi_{s+t}(e) = \varphi_s(\varphi_t(e)) = \varphi_t(e) \cdot \varphi_s(e)$$

für alle s, t klein genug. Man schreibt $s = k\frac{\varepsilon}{2} + t$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$ und definiert zum Beispiel im Fall $k > 0$:

$$c(s) := (\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(e))^k \cdot \varphi_t(e)$$

Die Behauptung ist nun, dass c die Integralkurve von X durch e ist. Das ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=k\frac{\varepsilon}{2}+t_0} c(s) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} c(k\frac{\varepsilon}{2} + t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(e))^k \cdot \varphi_t(e) \\ &= d_{(\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(e))^k} (X_{\varphi_{t_0}(e)}) = X_{c(s)} . \end{aligned}$$

□

Folgerung 5.13. *Sei $c_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ die Integralkurve durch e eines links-invarianten Vektorfeldes X . Dann ist c_X ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, d.h.*

$$c_X(0) = e \quad \text{und} \quad c_X(s+t) = c_X(s) \cdot c_X(t)$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt

$$c_{sX}(t) = c_X(st) .$$

Beweis: Es ist $c_X(t) = \varphi_t(e)$ und damit folgt die Homomorphismeigenschaft von c_X aus Gleichung (2), d.h. aus den Eigenschaften des Flusses eines Vektorfeldes.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $t \mapsto c(t) := c_X(st)$ die Integralkurve des links-invarianten Vektorfeldes sX ist. Dazu berechnet man:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} c(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} c_X(st) = s \dot{c}_X(st_0) = s X_{c_X(st_0)} = s X_{c(t_0)} .$$

□

Definition 5.14. Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Abbildung

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad \exp(X) := c_X(1),$$

heißt Exponentialabbildung der Lie-Gruppe G . Hierbei ist c_X wieder die maximale Integralkurve von X mit $c_X(0) = e$.

Bemerkung:

- (1) Es gilt für alle t die Gleichung $\exp(tX) = c_{tX}(1) = c_X(t) = \varphi_t(e)$.
- (2) Homomorphismen $\mathbb{R} \rightarrow G$ nennt man auch *1-parametrische Untergruppen* von G .
- (3) Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow G, t \mapsto \exp tX$ ist der eindeutig bestimmte glatte Gruppenhomomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ mit $\dot{\gamma}(0) = X$.

Beweis: Der Homomorphismus $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ definiert eine glatte Kurve in G mit $\gamma(0) = e$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Zu zeigen ist, dass γ die Integralkurve des links-invarianten Vektorfeldes $\tilde{X}$ ist. Auf Grund der Eindeutigkeit der Integralkurven folgt dann die Gleichung $\gamma(t) = \exp tX$. Man berechnet den Tangentialvektor an γ zu einer beliebigen Zeit s :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \gamma(t) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(s+t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} l_{\gamma(s)} \gamma(t) \\ &= dl_{\gamma(s)} \dot{\gamma}(0) = dl_{\gamma(s)} X = \tilde{X}_{\gamma(s)}. \end{aligned}$$

□

Beispiel: Die Exponential-Abbildung für $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Man definiert für eine beliebige Matrix $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$:

$$\exp tA = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Damit ist $\exp tA$ wohl-definiert. Dabei nutzt man, dass für die Endomorphismen-Norm auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Abschätzung $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ gilt.

Auf Grund der Gleichung

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$$

folgt, dass das Bild der Abbildung $A \mapsto e^A$ in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ in der Menge der invertierbaren Matrizen liegt. Die Gleichung zeigt man zuerst für diagonalisierbare Matrizen und benutzt dann, dass die Menge der diagonalisierbaren Matrizen dicht liegt in der Menge aller Matrizen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $A \mapsto e^A$ die Exponential-Abbildung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ beschreibt. Dafür sei $c(t) = e^{tA}$. Zu zeigen ist, dass c die Integralkurve durch e des links-invarianten Vektorfeldes $\tilde{A}$ ist. Man berechnet

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} c(t) = A e^{t_0 A} = e^{t_0 A} A = l_{c(t_0)} A = dl_{c(t_0)} A = \tilde{A}_{c(t_0)},$$

wobei die für Matrixgruppen richtige Beziehung $dl_g X = g \cdot X$ benutzt wurde.

Für die Exponential-Abbildung für $GL(n, \mathbb{R})$ kann man folgende Eigenschaften unmittelbar aus der Reihen-Definition ableiten:

- (1) Für alle $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ folgt aus $AB = BA$ die Gleichung $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.
- (2) Für alle $B \in GL(n, \mathbb{R})$ und $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ gilt: $B e^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$

Aus der ersten Eigenschaft folgt auch noch mal, dass $t \mapsto e^{tA}$ ein Gruppen-Homomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ ist und damit wirklich die Exponential-Abbildung von $GL(n, \mathbb{R})$ beschreibt. Im folgenden Abschnitt werden beide Aussagen auf beliebige Lie-Gruppen verallgemeinert.

Satz 5.15. *Die Exponential-Abbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ist beliebig oft differenzierbar und ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathfrak{g}$. Weiter gilt:*

- (1) $\exp(0) = e$
- (2) $\exp((t+s)X) = \exp(sX) \exp(tX)$
- (3) $\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$ für alle $X \in \mathfrak{g}$

Beweis: Die Glattheit der Abbildung $X \mapsto \exp(X)$ folgt aus den Standardsätzen über die glatte Abhängigkeit der Lösungen linearer DGLs von den Anfangswerten.

Die Aussagen 1. und 2. folgen direkt aus der Homomorphismus-Eigenschaft der Exponential-Abbildung. Zusammen ergeben sie Aussage 3., wenn man in 2. s durch $-t$ ersetzt.

Noch zu zeigen bleibt, dass die Exponential-Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathfrak{g}$ ist. Dazu zeigt man $d\exp_0 = \text{id}_{T_e G}$. Sei $X \in \mathfrak{g}$ ein links-invariantes Vektorfeld, dann folgt

$$d\exp_0(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) = X.$$

□

Bemerkung: Mit Hilfe der Exponential-Abbildung lassen sich spezielle Koordinaten definieren. Sei $V(0) \subset \mathfrak{g}$ eine bzgl. 0 sternförmige Umgebung, auf der $\exp$ ein Diffeomorphismus ist. Dann definiert man

$$W(e) := \exp(V(0)), \quad W(g) := l_g(W(e)), \quad x_g := \exp^{-1} \circ l_{g^{-1}} : W(g) \rightarrow V(0) \subset \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$$

Offensichtlich ist dann $(W(g), x_g)$ eine Karte um g . Man nennt $W(g)$ eine *Normalenumgebung* von g und x_g die *Normalkoordinaten* um g .

Bemerkung: Im Allgemeinen ist die Exponential-Abbildung nicht surjektiv. Man kann zeigen, dass die Exponential-Abbildung auf kompakten zusammenhängenden Lie-Gruppen surjektiv ist.

Sei $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ die Menge der Matrizen mit Determinante Eins. Die Lie-Algebra ist die Menge der spurfreien 2×2 -Matrizen. Für diese Gruppe ist die Exponential-Abbildung nicht surjektiv. Zum Beispiel liegt $B = \mathrm{diag}(-\frac{1}{2}, -2)$ nicht im Bild der Exponential-Abbildung. Denn wäre $B = \exp X$, so würde folgen

$$B = \exp X = \exp(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X) = \exp \frac{1}{2}X \cdot \exp \frac{1}{2}X = (\exp \frac{1}{2}X)^2 .$$

Es existiert aber keine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $B = A^2$: aus dem Satz von Cayley-Hamilton

$$A^2 - \mathrm{tr} A \cdot A + E = 0 .$$

Nimmt man die Spur von dieser Gleichung erhält man $\mathrm{tr} A^2 \geq -2$. Die Spur von B ist aber kleiner als -2 .

Satz 5.16. *Sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann gilt*

$$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X))$$

für alle $X \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, d.h. man hat das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

Beweis: Sei $c(t) = \varphi(\exp tX)$. Dann ist $c(0) = \varphi(e_G) = e_H$ und da $\varphi \circ l_g = l_{\varphi(g)} \circ \varphi$ folgt:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= d\varphi(X_{\exp tX}) = d\varphi \circ dl_{\exp tX}(X_{e_G}) \\ &= dl_{\varphi(\exp tX)} \circ d\varphi(X_{e_G}) \\ &= \widetilde{d\varphi(X_{e_G})}_{c(t)} , \end{aligned}$$

d.h. $c(t)$ ist eine Integralkurve von $\widetilde{d\varphi(X_{e_G})}$ durch e_H und somit folgt

$$c(1) = \varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X)) .$$

□

Folgerung 5.17. *Jeder injektive glatte Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ ist eine Immersion und $\varphi(G) \subset H$ ist damit eine Lie-Untergruppe von H .*

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g} = T_e G$ und sei $\tilde{X}$ das dazugehörige Vektorfeld, d.h. $\tilde{X}_g = dl_g(X)$. Ist nun für ein g das Differential von φ nicht injektiv, also z.B. $d\varphi(\tilde{X}_g) = 0$, dann folgt

$$0 = d\varphi \circ dl_g(X) = dl_{\varphi(g)} d\varphi(X)$$

und da dl_g ein Isomorphismus ist erhält man $d\varphi(X) = 0$. Wendet man darauf die Exponential-Abbildung an, so ergibt sich

$$e = \exp d\varphi(tX) = \varphi(\exp tX) ,$$

was aber im Widerspruch steht zur Annahme, dass φ injektiv ist. Damit muss also $d\varphi$ auch injektiv sein, d.h. φ ist eine Immersion. $\square$

6. TRANSFORMATIONSGRUPPEN UND HOMOGENE MANNIGFALTIGKEITEN

Definition 6.1. Eine Lie-Gruppe G wirkt, oder auch operiert, von links auf einer Mannigfaltigkeit M , falls eine glatte Abbildung

$$\Phi : G \times M \rightarrow M, \quad (g, p) \mapsto g \cdot p := \Phi(g, p)$$

existiert, die die folgenden Eigenschaften hat:

- (1) Für alle $p \in M$ und $g, h \in G$ gilt: $(g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$,
- (2) Für alle $p \in M$ gilt: $e \cdot p = p$.

Bemerkung:

- (1) Es folgt sofort, dass die Links-Translation $l_g : M \rightarrow M, p \mapsto g \cdot p$ ein Diffeomorphismus ist: $l_g^{-1} = l_{g^{-1}}$. Manchmal ist dies auch Teil der Definition einer Gruppenwirkung von G auf M .
- (2) Äquivalent kann man eine Gruppenwirkung auf M definieren, als eine Darstellung $\Phi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$, $g \mapsto l_g$, wobei $\text{Diff}(M)$ die Gruppe der Diffeomorphismen von M bezeichnet.
- (3) Jede Darstellung einer Gruppe G auf einem Vektorraum V definiert eine Wirkung von G auf V .

Definition 6.2. Sei G eine Lie-Gruppe, die von links auf einer Mannigfaltigkeit M wirkt. Dann definiert man:

- (1) Die Bahn (auch Orbit) von G durch $p \in M$: $\mathcal{O}_p := G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}$.
- (2) Die Standgruppe (auch Isotropiegruppe oder Stabilisator genannt) von $p \in M$: $G_p := \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$.
- (3) G wirkt transitiv auf M , wenn für alle Punkte $p, q \in M$ ein Gruppenelement $g \in G$ existiert mit $q = g \cdot p$. Äquivalent dazu ist, dass M aus einer Bahn besteht: $M = \mathcal{O}_p$ für ein und damit für alle $p \in M$.
- (4) G wirkt frei auf M , wenn für alle $g \in G, g \neq e$ die Links-Translation l_g fixpunktfrei ist.
- (5) G wirkt effektiv auf M , wenn $l_g = \text{id}_M$ nur für $g = e$ erfüllt ist, d.h. die Darstellung $\Phi : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ ist treu.

Definition 6.3. Eine Mannigfaltigkeit M , auf der eine Lie-Gruppe G transitiv wirkt nennt man homogen. Man sagt auch M ist ein homogener Raum.

Beispiele:

- (1) Eine Lie-Gruppe G wirkt durch Gruppen-Multiplikation auf sich. Diese Wirkung ist transitiv. Damit sind Lie-Gruppen eine spezielle Klasse von homogenen Räumen.
- (2) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ wirkt auf $\mathbb{R}^n$: $(A, v) \mapsto A \cdot v$. Diese Wirkung ist transitiv auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- (3) $\mathrm{O}(n)$ wirkt transitiv auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ mit der Standgruppe $\mathrm{O}(n)_{e_1} \cong \mathrm{O}(n-1)$, dabei ist e_1 der erste Vektor der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$. Damit sind Sphären homogene Mannigfaltigkeiten.

Im Weiteren soll gezeigt werden, dass der Raum der Nebenklassen G/H eine homogene Mannigfaltigkeit ist und dass jeder homogene Raum sich so darstellen lässt. Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Auf G definiert man die Äquivalenzrelation: $g_1 \sim g_2 \leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$. Die Äquivalenzklassen der Relation $\sim$ sind die Nebenklassen

$$[g] = \{gh \mid h \in H\} = gH \subset G.$$

Der *Faktorraum* G/H ist dann der Raum der Nebenklassen: $G/H = \cup_{g \in G} [g] = G/\sim$. Die Topologie auf G/H wird so definiert, dass genau die Mengen offen sind, deren Urbild unter π offen in G ist. Die natürliche Projektion

$$\pi : G \rightarrow G/H, \quad g \mapsto gH$$

wird damit eine stetige Abbildung. Darüber hinaus ist die Projektion π eine offene Abbildung, d.h. das Bild offener Mengen ist wieder offen. Denn ist $W \subset G$ eine offene Menge, dann ist auch

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{h \in H} W \cdot h$$

als Vereinigung von offenen Mengen wieder offen. Die so definierte Topologie auf G/H ist hausdorff, d.h. man kann je zwei Punkte durch offene Mengen trennen. Um dies einzusehen, betrachtet man die durch die Relation $\sim$ definierte Menge

$$R := \{(\sigma, \tau) \in G \times G \mid \exists h \in H : \sigma = \tau \cdot h\} = \alpha^{-1}(H) \subset G \times G,$$

wobei $\alpha : G \times G \rightarrow G$ definiert ist durch $\alpha(\sigma, \tau) = \tau^{-1} \cdot \sigma$. Da α stetig und $H \subset G$ abgeschlossen ist, folgt, dass R abgeschlossen und $G \times G \setminus R$ somit offen ist. Seien σH und τH zwei verschiedenen Punkte in G/H . Dann sind die Gruppenelemente σ und τ nicht äquivalent, d.h. $(\sigma, \tau) \in (G \times G) \setminus R$. Also existiert eine offene Umgebung V von σ und W von τ mit

$$V \cap W = \emptyset \quad \text{und} \quad V \times W \subset (G \times G) \setminus R.$$

Es folgt, dass $\pi(V)$ und $\pi(W)$ die gesuchten disjunkten, offenen Umgebungen von σH und τH sind. Angenommen $gH \in \pi(V) \cap \pi(W)$, dann existiert ein $v \in V$ und ein $w \in W$ mit $gH = vH = wH$ und somit $(v, w) \in (V \times W) \cap R$, was aber ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Mit Hilfe der kanonischen Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ projiziert sich eine abzählbare Basis der Topologie von G zu einer abzählbaren Basis der Topologie von G/H . Damit ist G/H eine

topologische Mannigfaltigkeit. Es bleibt noch zu zeigen, dass sich auf G/H eine differenzierbare Struktur einführen lässt.

Satz 6.4. *Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe G . Dann existiert auf dem Faktorraum G/H eine eindeutig bestimmte Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit*

- (1) *Die natürliche Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ ist eine glatte Submersion.*
- (2) *Der Faktorraum G/H ist ein homogener Raum bzgl. der G -Wirkung*

$$G \times G/H \rightarrow G/H, \quad (g, [a]) \mapsto [ga] .$$

- (3) *Zu jeder Äquivalenzklasse $[a] \in G/H$ existiert eine Umgebung $W([a]) \subset G/H$ und eine glatte Abbildung $s_{[a]} : W([a]) \rightarrow G$ mit*

$$\pi \circ s_{[a]} = \text{id}_{W([a])} .$$

Man sagt die Abbildungen $s_{[a]}$ sind lokale Schnitte der Faserung $\pi : G \rightarrow G/H$.

zum Beweis: Hier sollen nur einige Anmerkungen zum Beweis gemacht werden. Einen vollständigen Beweis findet man bei H. Baum oder F. Warner.

Wie schon gezeigt, ist G/H mit der Faktorraum-Topologie ein Hausdorff-Raum mit einer abzählbaren Basis der Topologie. Es soll nun erklärt werden, wie man Karten um jeden Punkt $[g] \in G/H$ konstruiert. Dazu sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, wobei $\mathfrak{m}$ ein Vektorraum-Komplement von $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ ist. Sei Φ definiert durch

$$\Phi : \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} \rightarrow G, \quad X + Y \mapsto \exp X \cdot \exp Y .$$

Man zeigt, dass Φ ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung $W = W_{\mathfrak{m}} \times W_{\mathfrak{h}}$ von $0 \in \mathfrak{g}$ ist, dabei ist $W_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ und $W_{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}$ jeweils eine Umgebung der Null in $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{h}$. Offensichtlich gilt $\exp(W_{\mathfrak{m}} \setminus \{0\}) \cap H = \emptyset$. Ausserdem kann man durch eventuelle Verkleinerung der Umgebung W erreichen, dass Φ^{-1} auch auf $(\exp W)^{-1} \cdot \exp W$ definiert (und ein Diffeomorphismus) ist. Damit zeigt man, dass die Abbildung

$$\varphi_{[g]} := \pi \circ l_g \circ \exp : W_{\mathfrak{m}} \rightarrow G \rightarrow G/H$$

ein Homöomorphismus auf das Bild ist. Denn es gilt $\varphi_{[g]}(X) = \varphi_{[g]}(Y)$ für $X, Y \in W_{\mathfrak{m}}$ genau dann, wenn $[g \cdot \exp X] = [g \cdot \exp Y]$ erfüllt ist, also genau dann, wenn die Gleichung $(g \cdot \exp X)^{-1} \cdot g \cdot \exp Y = (\exp X)^{-1} \cdot \exp Y \in H$ gilt. Es folgt $(\exp X)^{-1} \cdot \exp Y = \exp Z$ für ein $Z \in \mathfrak{h}$ und $Y = X + Z$, d.h. $X = Y$, da $X, Y \in \mathfrak{m}$. Damit ist $\varphi_{[g]}$ injektiv, also ein Homöomorphismus auf das Bild.

Als Karte um $[g] \in G/H$ wählt man nun $(\varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}}), \varphi_{[g]}^{-1})$. Die Kartenwechsel sind glatt, denn man kann leicht überprüfen, dass

$$\varphi_{[a]}^{-1} \circ \varphi_{[b]}(X) = \text{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \Phi^{-1} \circ l_{a^{-1}b} \exp X$$

für alle $X \in W_{\mathfrak{m}}$ gilt. In der Tat muß man dafür folgende Gleichung zeigen:

$$[b \cdot \exp X] = [a \cdot \exp(\operatorname{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \Phi^{-1} \circ l_{a^{-1}b} \exp X)] .$$

Man schreibt zunächst $l_{a^{-1}b} \exp X = \exp X_{\mathfrak{m}} \cdot \exp X_{\mathfrak{h}}$ für gewisse $X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$ und $X_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$. Es folgt $\exp(\operatorname{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \Phi^{-1} \circ l_{a^{-1}b} \exp X) = \exp X_{\mathfrak{m}}$ und damit

$$\begin{aligned} [a \cdot \exp(\operatorname{pr}_{\mathfrak{m}} \circ \Phi^{-1} \circ l_{a^{-1}b} \exp X)] &= [a \cdot \exp X_{\mathfrak{m}}] \\ &= [a \cdot \exp X_{\mathfrak{m}} \cdot \exp X_{\mathfrak{h}}] \\ &= [a \cdot l_{a^{-1}b} \exp X] \\ &= [b \cdot \exp X] \end{aligned}$$

Um die Glattheit der kanonischen Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ zu zeigen, betrachtet man Karten $(l_g \Phi(W), (l_g \circ \Phi)^{-1})$ um $g \in G$ und $(\varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}}), \varphi_{[g]}^{-1})$ um $[g] \in G/H$. Damit schreibt sich π in lokalen Koordinaten als

$$\varphi_{[g]}^{-1} \circ \pi \circ l_g \circ \Phi(X) = \varphi_{[g]}^{-1}([g \cdot \exp(X_{\mathfrak{m}}) \cdot \exp(X_{\mathfrak{h}})]) = \varphi_{[g]}^{-1}([g \cdot \exp(X_{\mathfrak{m}})]) = X_{\mathfrak{m}} = \operatorname{pr}_{\mathfrak{m}}(X) ,$$

für alle $X \in l_g \mathfrak{g}$. In lokalen Koordinaten ist π also genau die Projektion $\operatorname{pr}_{\mathfrak{m}}$ von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{m}$ und damit glatt. Insbesondere sieht man auch, dass π eine Submersion ist. Analog zeigt man auch, dass die G -Wirkung auf G/H glatt ist. Offensichtlich ist die G -Wirkung transitiv.

Zum Schluß müssen noch die lokalen Schnitte $s_{[g]}$ auf $W([g]) = \varphi_{[g]}(W_{\mathfrak{m}})$ definiert werden. Man setzt

$$s_{[g]} := l_g \circ \exp \circ \varphi_{[g]}^{-1} .$$

In lokalen Koordinaten ist $s_{[g]}$ gegeben als $X \mapsto (X, 0)$ bzgl. der Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, d.h. die Abbildung $s_{[g]}$ ist glatt. Nun bleibt noch zu zeigen, dass $s_{[g]}$ ein lokaler Schnitt ist, also die Beziehung $\pi \circ s_{[g]} = \operatorname{id}$ erfüllt ist. Dazu sei $[a] \in W([g])$, dann existiert ein eindeutig bestimmtes $X_{\mathfrak{m}} \in W_{\mathfrak{m}}$ mit

$$[a] = \varphi_{[g]}(X_{\mathfrak{m}}) = \pi l_g \exp(X_{\mathfrak{m}}) = \pi l_g \exp \varphi_{[g]}^{-1}[a] = \pi \circ s_{[g]}([a]) .$$

□

Bemerkungen:

- (1) $\dim G/H = \dim G - \dim H$
- (2) $\ker d\pi = \mathfrak{h}$ und $T_{[e]}G/H = d\varphi_{[e]}(\mathfrak{m}) \cong \mathfrak{m}$
- (3) Eine Abbildung $f : G/H \rightarrow N$ ist genau dann differenzierbar, wenn $f \circ \pi : G \rightarrow N$ differenzierbar ist. Zur Begründung bemerkt man, dass sich f eingeschränkt auf die Umgebung $W([g])$ schreibt als

$$f|_{W([g])} = f \circ \pi \circ s_{[g]} .$$

- (4) Sei $\tau_g : G/H \rightarrow G/H$ die G -Wirkung $\tau_g([a]) = g[a] = [ga]$. Dann gilt $\pi \circ l_g = \tau_g \circ \pi$, d.h. man hat das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{l_g} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/H & \xrightarrow{\tau_g} & G/H \end{array}$$

Es gilt nun auch die Umkehrung von Satz 6.4, d.h. jede homogene Mannigfaltigkeit ist von der Form G/H für geeignete Lie-Gruppen G und H .

Satz 6.5. Sei G eine Lie-Gruppe, die transitiv von links auf einer Mannigfaltigkeit M wirkt. Für jedes $p \in M$ ist die Abbildung

$$\Psi : G/G_p \rightarrow M, \quad [a] \mapsto a \cdot p$$

ein G -äquivarianter Diffeomorphismus, d.h. es gilt für alle $g \in G$ und $[a] \in G/G_p$ die Gleichung

$$\Psi(g \cdot [a]) = g \cdot \Psi([a]) .$$

Insbesondere ist die Bahn $\mathcal{O}_p$ diffeomorph zu G/G_p und jeder G -homogene Raum M schreibt sich als $M = G/H$ für eine abgeschlossene Lie-Untergruppe $H \subset G$.

Beweis: Zunächst zeigt man, dass Ψ wohldefiniert ist. Denn aus $[a] = [b]$ folgt $a^{-1}b \in G_p$ und somit $a \cdot p = b \cdot p$. Die Äquivarianz folgt direkt aus der Definition von Ψ bzw. der G -Wirkung auf G/G_p .

Sei $\beta := \Psi \circ \pi$, d.h. $\beta : G \rightarrow M, \beta(g) = g \cdot p$. Die Abbildung β ist offensichtlich glatt, als Teil der G -Wirkung auf M und nach Bemerkung 4 ist damit auch Φ glatt.

Es bleibt zu zeigen, dass $d\Psi : T_{[a]}G/G_p \rightarrow T_{\Psi([a])}M$ ein Isomorphismus ist. Dafür genügt es, $d\Psi$ in $[e]$ zu berechnen, denn $d\Psi \circ dl_a = dl_a \circ d\Psi$. Der Tangentialraum an G/G_p in $[e]$ ist gegeben als

$$T_{[e]}G/G_p = d\varphi_{[e]}(\mathfrak{m}) .$$

Sei $X \in \mathfrak{m}$ dann berechnet man

$$d\Psi(d\varphi_{[e]}(X)) = d(\Psi \circ \pi \circ \exp)(X) = d(\beta \circ \exp)X = d\beta(X)$$

Der Tangentialvektor $d\varphi_{[e]}(X)$ liegt also genau dann im Kern von $d\Psi$, wenn $X \in \ker d\beta$ also, wie man leicht sieht, wenn $X \in \text{Lie}(G_p) = \mathfrak{h}$. Damit liegt aber X im Durchschnitt $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}$ und muß damit verschwinden. Man hat also gezeigt, dass $d\Psi$ injektiv ist. Da aber $\dim G/G_p = \dim \mathfrak{m}$ gilt, ist $d\Psi$ auch surjektiv und somit ein Isomorphismus. $\square$

6.1. Beispiele homogener Mannigfaltigkeiten.

- (1) Jede Lie-Gruppe G ist ein homogener Raum: $G = G \times G/G = G/\{e\}$.
- (2) Die Gruppe $\mathrm{SO}(n+1)$ wirkt durch Matrizenmultiplikation transitiv auf der Einheitskugel $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die Standgruppe von e_1 (und von jedem anderen Punkt auf der Sphäre) ist isomorph zu $\mathrm{SO}(n)$. Damit hat man folgende Darstellung von S^n als homogenen Raum:

$$S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n) .$$

- (3) Auf der Einheitskugel $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ wirkt $\mathrm{SU}(n+1)$ transitiv. Die Standgruppe von e_1 (und von jedem anderen Punkt) ist isomorph zu $\mathrm{SU}(n)$. Damit hat die Sphäre S^{2n+1} eine weitere Möglichkeit als homogener Raum geschrieben zu werden:

$$S^{2n+1} = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(n) .$$

- (4) Auf der Einheitskugel $S^{4n+3} \subset \mathbb{H}^{n+1}$ wirkt $\mathrm{Sp}(n+1)$ transitiv. Die Standgruppe von e_1 (und von jedem anderen Punkt) ist isomorph zu $\mathrm{Sp}(n)$. Damit hat die Sphäre S^{4n+3} eine weitere Möglichkeit als homogener Raum geschrieben zu werden:

$$S^{4n+3} = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n) .$$

- (5) Die (effektiven) transitiven Wirkungen von Lie-Gruppen auf den Sphären wurden von Montgomery/Samelson bzw. Borel klassifiziert. Es sind die oben genannten Beispiele und

$$S^6 = \mathrm{G}_2/\mathrm{SU}(3), \quad S^7 = \mathrm{Spin}(7)/\mathrm{G}_2, \quad S^{15} = \mathrm{Spin}(9)/\mathrm{Spin}(7) .$$

Dabei ist G_2 die 14-dimensionale exzeptionelle einfache Lie-Gruppe und $\mathrm{Spin}(n)$ bezeichnet die Spin-Gruppe, eine zweifache Überlagerung der speziellen orthogonalen Gruppe.

- (6) Die einzigen Sphären mit der Struktur einer Lie-Gruppe sind

$$S^1 = \mathrm{SO}(2) = \mathrm{U}(1), \quad S^3 = \mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2) = \mathrm{Spin}(3) .$$

- (7) Auf dem komplex projektiven Raum $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, wobei $\sim$ definiert ist durch $z \sim \lambda z, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{C}^{n+1}$ wirkt die Gruppe $\mathrm{SU}(n+1)$ transitiv, durch $A[z] = [Az]$. Die Standgruppe von $[1 : 0 : \dots : 0]$ ist isomorph zu der Gruppe $S(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)) = \{(\lambda, A) \mid \lambda \in \mathrm{U}(1), A \in \mathrm{U}(n), \lambda \det A = 1\}$. Der komplex projektive Raum hat daher folgende Darstellung als homogener Raum

$$\mathbb{CP}^n = \mathrm{SU}(n+1)/S(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)) = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n) .$$

Die Gruppe $\mathrm{SU}(n+1)$ wirkt nicht effektiv. Der Nichteffektivitätskern, also die Menge der Gruppenelemente, die als Identität wirken, berechnet sich als

$$\mathbb{Z}_{n+1} = Z(\mathrm{SU}(n+1)) = \{\mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda) \mid \lambda^{n+1} = 1\} .$$

Damit wirkt die projektive unitäre Gruppe $\mathrm{PSU}(n+1) = \mathrm{SU}(n+1)/\mathbb{Z}_{n+1}$ effektiv auf dem komplex projektiven Raum.

- (8) Folgende S^1 - bzw. S^3 -Faserungen werden als Hopf-Faserungen bezeichnet:

$$S^{2n+1} = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(n) \longrightarrow \mathbb{CP}^n = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n) ,$$

$$S^{4n+3} = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n) \longrightarrow \mathbb{HP}^n = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) .$$

- (9) Allgemeiner seien H und K abgeschlossene Untergruppen in G mit $H \subset K \subset G$. Dann erhält man eine Faserung $\pi : G/H \rightarrow G/K$ mit Faser K/H , d.h. das Urbild unter π von Punkten in der Basis G/K ist diffeomorph zu K/H .
- (10) Sei $G = \mathrm{U}(n)$ die Gruppe der unitären Matrizen mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A + \bar{A}^T = 0\} \cong \mathbb{R}^{n^2} .$$

Die Gruppe G wirkt durch die adjungierte Darstellung auf ihrer Lie-Algebra, d.h. für Matrizen-Gruppen durch

$$G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (g, A) \mapsto \mathrm{Ad}(g)A = g A g^{-1} .$$

Matrizen in $\mathfrak{u}(n)$ sind schief-hermitesch und insbesondere normal, lassen sich also diagonalisieren. Sei $A \in \mathfrak{u}(n)$, dann existiert ein $g \in \mathrm{U}(n)$ mit $g A g^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, d.h. der Orbit $\mathcal{O}_A$ durch A enthält die Matrix $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und besteht aus der Menge aller schief-hermiteschen Matrizen mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Sei G_D die Standgruppe der Diagonalmatrix D , dann findet man

$$G_D = \mathrm{U}(r_1) \times \dots \times \mathrm{U}(r_k)$$

mit $r_1 + \dots + r_k = n$. Damit hat man bewiesen

Satz 6.6. *Sei $A \in \mathfrak{u}(n)$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit den geometrischen Vielfachheiten $r_1, \dots, r_k$. Dann gilt für den Orbit durch A :*

$$\mathcal{O}_A = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(r_1) \times \dots \times \mathrm{U}(r_k) .$$

7. DIFFERENTIALFORMEN

7.1. Der Vektorraum der k -Formen. Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und sei $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ der Dualraum von V , d.h. der Raum der linearen Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{R}$. Später wird V ersetzt durch $T_p M$.

Definition 7.1. Eine k -Form auf V ist eine multilineare, alternierende Abbildung

$$\omega : V \times \dots \times_k V \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Die Zahl k nennt man die Grad der k -Form ω . Dabei ist ω alternierend genau dann, wenn eine der folgenden vier äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1) $\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(X_1, \dots, X_k)$ für alle $\sigma \in S_k$,
- (2) $\omega(\dots, X_i, \dots, X_j, \dots) = -\omega(\dots, X_j, \dots, X_i, \dots)$ für alle $i \neq j$,
- (3) $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$ falls es i, j gibt mit $i \neq j$ und $X_i = X_j$,
- (4) $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$ falls $X_1, \dots, X_k$ linear abhängig sind.

Bemerkung: Die Menge der k -Formen auf V bildet einen reellen Vektorraum. Dieser wird bezeichnet mit

$$\Lambda^k V^* .$$

Man setzt $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ und für $k > n = \dim V$ gilt offensichtlich $\Lambda^k V^* = \{0\}$. Denn in V sind dann k Vektoren für $k > n$ immer linear abhängig. Addition und skalare Multiplikation sind definiert durch

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2)(X_1, \dots, X_k) &= \omega_1(X_1, \dots, X_k) + \omega_2(X_1, \dots, X_k) , \\ (\lambda \omega)(X_1, \dots, X_k) &= \lambda \cdot \omega(X_1, \dots, X_k) . \end{aligned}$$

Beispiele:

- (1) *1-Formen:* $\Lambda^1 V^* = V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$. Insbesondere gilt $\dim \Lambda^1 V^* = n$, falls V ein n -dimensionaler Vektorraum ist.
- (2) *2-Formen:* $\Lambda^2 V^* =$ Menge der schief-symmetrischen bilinearen Abbildungen $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. es gilt $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X)$ für alle Vektoren $X, Y \in V$.

Lemma 7.2. $\Lambda^2 V^* \cong \mathfrak{so}(V) \cong \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$

Beweis: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V . Man definiert die Identifikation durch $\Lambda^2 V^* \rightarrow \text{End}^-(V), \omega \mapsto \hat{\omega}$ mit $\langle \hat{\omega}(X), Y \rangle = \omega(X, Y)$. $\square$

Folgerung 7.3. $\dim \Lambda^2 V^* = \binom{n}{2}$

- (3) Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und sei ω eine n -Form auf V . Sei $e_1, \dots, e_n$ eine fixierte Basis in V , bzgl. der man Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ als Spaltenvektoren betrachtet. Dann gilt:

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n) \omega(e_1, \dots, e_n)$$

Damit folgt $\Lambda^n V^* = \mathbb{R} \cdot \det \cong \mathbb{R}$.

Definition 7.4. Die äußere Algebra von V ist definiert als $\Lambda(V^*) := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V^*$, d.h. als die Menge der Formen von beliebigem Grad auf V . Die Vektorraumstruktur kommt von den einzelnen Summanden $\Lambda^k V^*$, die Produktstruktur ist definiert durch das Dachprodukt:

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \longrightarrow \Lambda^{k+l} V^*, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

dabei ist $\wedge$ definiert durch

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{k! l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \cdot \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})$$

Bemerkung: Der Raum der $(0, k)$ -Tensoren auf V ist definiert als der Vektorraum der k -fach multilinenaren Abbildungen:

$$T^{(0,k)} V^* := \{ \lambda : V \times \dots \text{ k mal } \dots \times V \rightarrow \mathbb{R} \mid \lambda \text{ multilinear} \} .$$

Das *Tensorprodukt* auf der Tensoralgebra $T(V^*) = \bigoplus_k T^{(0,k)}(V^*)$ ist definiert durch

$$(\lambda \otimes \mu)(X_1, \dots, X_{k+l}) = \lambda(X_1, \dots, X_k) \cdot \mu(X_{k+1}, \dots, X_{k+l}) .$$

Das Dach-Produkt der äußeren Algebra ergibt sich als Projektion des Tensorproduktes auf den Unterraum $\Lambda^k V^* \subset T^{(0,k)} V^*$. Man definiert die Abbildung $\text{Alt} : T^{(0,k)} V^* \rightarrow \Lambda^k V^*$ durch

$$\text{Alt}(\lambda)(X_1, \dots, X_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \lambda(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) .$$

Für eine Bilinearform $\lambda \in T^{(0,2)} V^*$ gilt also: $\text{Alt}(\lambda)(X, Y) = \lambda(X, Y) - \lambda(Y, X)$. In dieser Notation kann man für das Dachprodukt von $\alpha \in \Lambda^k V^*$ und $\beta \in \Lambda^l V^*$ auch schreiben:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k! l!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta) .$$

Beispiele:

(1) Seien α und β zwei 1-Formen auf V dann gilt:

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X) \beta(Y) - \alpha(Y) \beta(X)$$

(2) Sei α eine 1-Form und β eine 2-Form auf V , dann gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(X, Y, Z) &= \alpha(X) \beta(Y, Z) - \alpha(Y) \beta(X, Z) + \alpha(Z) \beta(X, Y) \\ &= \alpha(X) \beta(Y, Z) + \alpha(Y) \beta(Z, X) + \alpha(Z) \beta(X, Y) . \end{aligned}$$

Allgemeiner sei α eine 1-Form und β eine k -Form, dann gilt

$$(\alpha \wedge \beta)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \alpha(X_i) \beta(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) .$$

Dabei bedeutet $\widehat{X}_i$, dass der entsprechende Eintrag weggelassen wird.

Lemma 7.5. *Das Dachprodukt von Formen hat folgende Eigenschaften:*

- (1) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha$ für alle $\alpha \in \Lambda^k V^*, \beta \in \Lambda^l V^*$,
- (2) $\omega \wedge \omega = 0$ für alle Formen ω von ungeradem Grad,
- (3) $(\lambda\alpha + \mu\beta) \wedge \gamma = \lambda\alpha \wedge \gamma + \mu\beta \wedge \gamma$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(V^*)$,
- (4) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(V^*)$

7.2. Das Verhalten unter Abbildungen. Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W . Man definiert

$$f^* = \Lambda^k(f) : \Lambda^k W^* \longrightarrow \Lambda^k V^*, \quad (f^* \omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(fv_1, \dots, fv_k) .$$

für Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$ und $\omega \in \Lambda^k W^*$. Man nennt die von f induzierte Abbildung f^* das *Zurückziehen* von Formen. Die Zuordnung $V \mapsto \Lambda^k V^*, f \mapsto f^*$ definiert also einen kontravarianten Funktor auf der Kategorie der Vektorräume.

Lemma 7.6. *Das Zurückziehen hat folgende Eigenschaften:*

- (1) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- (2) $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^* \alpha) \wedge (f^* \beta)$
- (3) $\det(f) = f^* : \Lambda^n V^* \longrightarrow \Lambda^n V^*$, falls $\dim V = n$

7.3. Eine Basis im Raum der Formen. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis in V und sei $e^1, \dots, e^n$ die dazugehörige duale Basis in V^* , d.h. es gilt $e^i(e_j) = \delta_{ij}$, bzw. $e^i(v) = v_i$ falls $v = \sum v_i e_i$. Dann ist

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

eine Basis in $\Lambda^k V^*$, d.h. zu jeder k -Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ existieren reelle Zahlen $\omega_{i_1, \dots, i_k}$ mit

$$\omega = \sum \omega_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} .$$

Insbesondere gilt $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$ und $\Lambda^k V^* \cong \Lambda^{n-k} V^*$.

Lemma 7.7. *Seien $\omega_1, \dots, \omega_k \in V^*$ und $v_1, \dots, v_k \in V$, dann gilt*

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \dots & \omega_k(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(v_k) & \dots & \omega_k(v_k) \end{pmatrix} .$$

Insbesondere gilt $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$ falls die Linearformen $\omega_1, \dots, \omega_k$ in V^ linear abhängig sind.*

Beispiel: Seien ω_1, ω_2 zwei 1-Formen auf V und $X, Y \in V$. Dann gilt

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X, Y) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(X) & \omega_2(X) \\ \omega_1(Y) & \omega_2(Y) \end{pmatrix} = \omega_1(X) \omega_2(Y) - \omega_1(Y) \omega_2(X) .$$

7.4. Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten. Man überträgt nun die lineare Algebra der k -Formen punktweise auf Mannigfaltigkeiten.

Definition 7.8. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Das Bündel der k -Formen auf M ist definiert als

$$\Lambda^k(T^*M) = \dot{\bigcup}_{p \in M} \Lambda^k T_p^* M$$

dabei ist $T_p^* M = (T_p M)^*$ und $\dot{\bigcup}$ bezeichnet die disjunkte Vereinigung. Die kanonische Projektion ist definiert als die Fußpunktabbildung

$$\pi : \Lambda^k(T^*M) \rightarrow M, \quad \pi(\omega) = p \quad \text{falls} \quad \omega \in \Lambda^k T_p^* M,$$

d.h. die Faser über $p \in M$ ist der Raum der k -Formen auf $T_p M$, also $\pi^{-1}(p) = \Lambda^k T_p^* M$.

Bemerkungen: Die Menge $\Lambda^k(T^*M)$ trägt die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit (analog zu TM): Sei (U, x) eine Karte um $p \in M$. Dann definiert man

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow x(U) \times \Lambda^k \mathbb{R}^n, \quad \omega \mapsto (x(\pi(\omega)), (dx^{-1})^* \omega).$$

Mit den Karten $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ wird $\Lambda^k(T^*M)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n + \binom{n}{k}$. Mit der kanonischen Projektion $\pi : \Lambda^k T^* M \rightarrow M$ erhält man ein reelles Vektorbündel vom Rang $\binom{n}{k}$ über M .

Definition 7.9. Eine Differentialform vom Grad k auf M ist eine differenzierbare Abbildung

$$\omega : M \longrightarrow \Lambda^k T^* M \quad \text{mit} \quad \pi \circ \omega = \text{id}_M,$$

d.h. ω ist ein Schnitt im Vektorbündel $\Lambda^k T^* M$. Den unendlich-dimensionalen Vektorraum der k -Formen auf M bezeichnet man mit $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^* M)$. Insbesondere gilt für den Raum der 0-Formen: $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.

Beispiel: Jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ definiert eine Differentialform vom Grad 1, nämlich das Differential, also die 1-Form $df \in \Omega^1(M)$.

Der Raum $\Omega^*(M)$ aller Differentialformen auf M ist eine reelle Algebra. Man definiert für Differentialformen $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^*(M)$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ in $p \in M$:

$$(\omega_1 + \omega_2)(p) := \omega_1(p) + \omega_2(p), \quad (\lambda\omega)(p) := \lambda\omega(p), \quad (\omega_1 \wedge \omega_2)(p) := \omega_1(p) \wedge \omega_2(p)$$

Offensichtlich ist aber der Raum $\Omega^*(M)$ auch ein Modul über dem Ring der Funktionen $\mathcal{C}^\infty(M)$, d.h. für eine glatte Funktion f und eine Differentialform ω definiert man das Produkt $f \cdot \omega := f \wedge \omega$, also

$$(f \cdot \omega)(p) := f(p) \cdot \omega(p).$$

Jede Differentialform $\hat{\omega} \in \Omega^k(M)$ induziert eine $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare, alternierende Abbildung

$$\omega : \chi(M) \times \dots \times \chi(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

man definiert für Vektorfelder $X_1, \dots, X_k$ auf M die entsprechende Funktion in $p \in M$ durch $\omega(X_1, \dots, X_k)(p) := \hat{\omega}(p)(X_1(p), \dots, X_k(p))$. Es stellt sich heraus, dass auch die Umkehrung gilt und man eine äquivalente Definition von Differentialformen erhält:

Lemma 7.10. *Jede $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare, alternierende Abbildung*

$$\omega : \chi(M) \times \dots_{k\text{-mal}} \dots \times \chi(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

definiert eine k -Form $\hat{\omega}$ auf M .

Beweis: Seien $X_1, \dots, X_k \in T_p M$ mit Fortsetzungen $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$ zu lokal um p definierten Vektorfeldern. Dann definiert man die k -Form $\hat{\omega}$ durch

$$\hat{\omega}(p)(X_1, \dots, X_k) := \omega(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)(p) .$$

Zu zeigen bleibt jetzt, dass $\omega(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)(p)$ nur von dem Wert der Vektorfelder $\tilde{X}_i$ im Punkt p , also den Tangentialvektoren X_i abhängt. Es reicht den Beweis für $k = 1$ zu führen. Hier bleibt zu zeigen, dass $\omega(X)(p) = 0$ gilt, falls X ein Vektorfeld ist mit $X(p) = 0$.

Sei (U, x) eine Karte um p , dann schreibt sich das Vektorfeld X auf U als $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ für gewisse glatte Funktionen $a_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ mit $a_i(p) = 0, i = 1, \dots, n$. Man wählt nun eine Abschneidefunktion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\text{supp}(\varphi) \subset U$ und $\varphi \equiv 1$ auf einer kleinen Umgebung von p . Dann folgt

$$\varphi^2 X = \sum \varphi a_i \cdot \varphi \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dabei sind $\varphi a_i, i = 1, \dots, n$ global definierte Funktionen und $\varphi \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$ global definierte Vektorfelder auf M . Das Vektorfeld X schreibt sich also als

$$X = X - \varphi^2 X + \sum \varphi a_i \cdot \varphi \frac{\partial}{\partial x_i} = (1 - \varphi^2)X + \sum \varphi a_i \cdot \varphi \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Wendet man hierauf die $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare Abbildung ω an und benutzt die Voraussetzungen $\varphi(p) = 1$ und $a_i(p) = 0$, so ergibt sich

$$\omega(X)(p) = (1 - \varphi^2)(p)\omega(X)(p) + \sum \varphi a_i \cdot \omega(\varphi \frac{\partial}{\partial x_i}) = 0 .$$

□

7.5. Differentialformen in lokalen Koordinaten. Sei (U, x) eine Karte um $p \in M$. Dann sind für jeden Punkt $p \in M$ die Vektoren $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$, $i = 1, \dots, n$ eine Basis in $T_p M$. Die dazu duale Basis in $T_p^* M$ bezeichnet man mit $dx_i(p)$. Über U hat man also

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(U), \quad dx_i \in \Omega^1(U) \quad \text{mit} \quad dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}.$$

Damit schreibt sich jede Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ lokal über U als:

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

wobei $\omega_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ glatte Funktionen sind, die sich berechnen lassen durch

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right).$$

7.6. Das Zurückziehen von Differentialformen. Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung und sei $\omega \in \Omega^k(N)$. Dann erhält man mittels Zurückziehen eine k -Form $f^*\omega$ auf M , die definiert ist durch

$$(f^*\omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{f(p)}(df(X_1), \dots, df(X_k))$$

für Tangentialvektoren $X_i \in T_p M$, d.h. $(f^*\omega)_p = ((df)^*\omega)_p$. Es übertragen sich nun die Eigenschaften, die für das Zurückziehen mittels linearer Abbildungen von Formen auf Vektorräumen gelten. Insbesondere:

Lemma 7.11. *Seien α, β Differentialformen auf M und seien $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow P$ zwei differenzierbare Abbildungen, dann gilt*

- (1) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- (2) $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$

Bemerkung: Sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : M \hookrightarrow N$ die Inklusionsabbildung. Dann ist die Einschränkung einer Differentialform $\omega \in \Omega^*(N)$ auf M genau die Zurückziehung von ω durch f , d.h. es gilt $\omega|_M = f^*\omega$.

7.7. Das Differential. Jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, also jede 0-Form auf M , definiert eine 1-Form df , die sich in lokalen Koordinaten schreibt als

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass sich das Differential von Funktionen eindeutig fortsetzen lässt zu einer Folge linearer Abbildungen:

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Dazu definieren wir das Differential zunächst lokal und zeigen dann die Unabhängigkeit von den gewählten Koordinaten. Sei (U, x) eine beliebige Karte auf M und $\omega \in \Omega^k(M)$. Dann schreibt sich ω lokal auf U als

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_I \omega_I dx_I$$

für gewisse glatte Funktionen $\omega_I = \omega_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U)$, wobei $I = (i_1, \dots, i_k)$ einen Multiindex bezeichnet und $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Das Differential der k -Form ω wird definiert als die $(k+1)$ -Form, die auf U gegeben ist durch

$$(3) \quad d\omega := \sum_I d\omega_I \wedge dx_I = \sum_I \sum_k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I.$$

Die Unabhängigkeit von den gewählten Koordinaten kann man dann direkt zeigen. Seien (U, x) und (V, y) zwei Karten um $p \in M$. Eine 1-Form ω schreibe sich lokal als $\omega = \sum_i f_i dx_i = \sum_j h_j dy_j$. Dann gilt $dy_j = \sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i$ und daraus folgt $f_i = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} h_j$. Setzt man dies in die Definition von $d\omega$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_i df_i \wedge dx_i &= \sum_{k,i} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i = \sum_{i,k,j} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k} h_j dx_k \wedge dx_i + \sum_{i,k,j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial h_j}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \\ &= \sum_j dh_j \wedge dy_j. \end{aligned}$$

Hierbei verschwindet der Summand mit den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, da $\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k}$ nach dem Satz von Schwarz symmetrisch in i und k ist, während $dx_k \wedge dx_i$ schiefsymmetrisch in i und k ist. Für Formen beliebigen Grades kann man ähnlich argumentieren.

Die Koordinatenunabhängigkeit läßt sich auch noch etwas eleganter zeigen (siehe M. Spivak). Wir definieren das Differential bzgl. eines fixierten Koordinatensystems und beweisen zuerst einige Eigenschaften von d , die dann, wie sich herausstellt, d eindeutig charakterisieren.

Lemma 7.12. *Sei d nach der Formel (3) für Formen beliebigen Grades definiert. Dann gilt für Formen α, β auf M*

- (1) $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$,
- (2) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ für $\alpha \in \Omega^k(M)$,
- (3) $d(d\alpha) = 0$, kurz $d^2 = 0$.

Beweis: Die Eigenschaft (1) und damit die Linearität von d ist unmittelbar klar. Mit (1) genügt es, die Eigenschaft (2) für Formen $\alpha = f dx_I$ und $\beta = g dx_J$ zu zeigen. In diesem Fall gilt auf einer Kartenumgebung U : $\alpha \wedge \beta = fg dx_I \wedge dx_J$ und nach der Definition von d folgt:

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J = g df \wedge dx_I \wedge dx_J + f dg \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k f dx_I \wedge dg \wedge dx_J \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (3) reicht es eine Form $\alpha = f dx_I$ zu betrachten. Dann ist

$$d\alpha = \sum_{r=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_I$$

und damit

$$d(d\alpha) = \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} dx_s \wedge dx_r \wedge dx_I = \sum_{r < s} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r} \right) dx_s \wedge dx_r \wedge dx_I = 0 ,$$

da nach dem Satz von Schwarz partielle Ableitungen vertauschen. $\square$

Es soll jetzt gezeigt werden, dass diese Eigenschaften das Differential d eindeutig auf U festlegen.

Lemma 7.13. *Sei d' ein Operator, der k -Formen auf U überführt in $(k+1)$ -Formen auf U , für alle k , und der die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- (1) $d'(\alpha + \beta) = d'\alpha + d'\beta$,
- (2) $d'(\alpha \wedge \beta) = d'\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d'\beta$
- (3) $d'(d'f) = 0$, für Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$
- (4) $d'f = df$,

wobei df das schon definierte Differential von Funktionen bezeichnet. Dann gilt $d' = d$ auf U .

Beweis: Nach den eben bewiesenen Eigenschaften von d ist es ausreichend, die Gleichung $d\alpha = d'\alpha$ zu zeigen für Formen $\alpha = f dx_I$. Aus den Eigenschaften (2) und (4) folgt:

$$d'(f dx_I) = d'f \wedge dx_I + f \wedge d'(dx_I) = df \wedge dx_I + f \wedge d'(dx_I) .$$

Zu zeigen bleibt also $d'(dx_I) = 0$, wobei man aus Eigenschaft (4) folgern kann, dass

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = d'x_{i_1} \wedge \dots \wedge d'x_{i_k} .$$

Man zeigt $d'(dx_I) = 0$ induktiv, wobei Eigenschaft (3) den Induktionsanfang für $k = 1$ bildet. Unter Annahme der Aussage für $k - 1$ folgt aus den Eigenschaften (2) und (3), dass

$$\begin{aligned} d'(dx_I) &= d'(d'x_{i_1} \wedge \dots \wedge d'x_{i_k}) \\ &= d'(d'x_{i_1}) \wedge \dots \wedge d'x_{i_k} - d'x_{i_1} \wedge d'(dx_{i_2} \dots \wedge d'x_{i_k}) = 0 . \end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 7.14. *Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M existiert eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$, das Differential, eindeutig bestimmt durch die folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Es gilt $df(X) = X(f)$ für alle $f \in \Omega^0(M)$ und $X \in \chi(M)$.*
- (ii) *$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ für $k = 0, 1, \dots$*
- (iii) *$d^2 = 0$*

(iv) Die Abbildung d ist eine Anti-Derivation, d.h.

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$$

für $\alpha \in \Omega^k(M), \beta \in \Omega^*(M)$.

Beweis: Auf jeder Karte (U, x) ist ein eindeutig bestimmtes Differential d_U definiert nach (3). Man definiert dann das Differential d durch: $(d\omega)|_U := d_U(\omega|_U)$ $\square$

Das Differential kann man auch durch eine explizite Formel definieren, die mit dem oben definierten Differential übereinstimmt und somit auch die Koordinatenunabhängigkeit zeigt. Im Fall von 1-Formen hat man die wichtige Formel

Satz 7.15. Sei ω eine 1-Form und X, Y beliebige Vektorfelder, dann gilt:

$$(4) \quad d\omega(X, Y) = L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) .$$

Beweis: Zunächst gilt die Gleichung für 1-Formen $\omega = df$. Linke Seite: $d\omega = d(df) = 0$. Rechte Seite:

$$L_X(df(Y)) - L_Y(df(X)) - df([X, Y]) = L_X(L_Y(f)) - L_Y(L_X(f)) - L_{[X, Y]}(f) = 0 ,$$

nach Definition des Kommutators $[X, Y]$. Die Gleichung (4) gilt dann auch für alle 1-Formen $\omega = g\alpha$, wobei g eine beliebige Funktion und α eine 1-Form ist, für die die Gleichung erfüllt ist. Linke Seite:

$$\begin{aligned} d(g\alpha)(X, Y) &= (dg \wedge \alpha + g \wedge d\alpha)(X, Y) = dg(X)\alpha(Y) - dg(Y)\alpha(X) + gd\alpha(X, Y) \\ &= L_X(g)\alpha(Y) - L_Y(g)\alpha(X) + gd\alpha(X, Y) . \end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} L_X(g\alpha(Y)) - L_Y(g\alpha(X)) - g\alpha([X, Y]) &= L_X(g)\alpha(Y) + gL_X(\alpha(Y)) - L_Y(g)\alpha(X) \\ &\quad - gL_Y(\alpha(X)) - g\alpha([X, Y]) \\ &= g(L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])) + L_X(g)\alpha(Y) - L_Y(g)\alpha(X) \\ &= gd\alpha(X, Y) + L_X(g)\alpha(Y) - L_Y(g)\alpha(X) . \end{aligned}$$

Damit gilt Gleichung (4) für alle 1-Formen. Denn das Differential d ist linear und lokal schreibt sich jede 1-Form ω als Linearkombination als $\omega = \sum \omega_i dx_i$, wobei für die einzelnen Summanden die Gleichung schon bewiesen wurde. $\square$

Die Formel (4) ist Spezialfall der folgenden allgemeinen Gleichung.

Satz 7.16. Sei ω eine k -Form und seien $X_1, \dots, X_{k+1}$ beliebige Vektorfelder, dann gilt:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

dabei bedeutet $\hat{X}_i$, dass dieser Vektor weggelassen wird.

Beweis: (siehe M. Spivak) Man zeigt zuerst, dass der Ausdruck auf der rechten Seite $\mathcal{C}^\infty(M)$ linear in den Einträgen $X_1, \dots, X_{k+1}$ ist und damit eine wohl-definierte $(k+1)$ -Form auf M liefert. Als nächstes zeigt man, dass diese $(k+1)$ -Form auf einer Kartenumgebung U genau der lokalen Definition (3) von $d\omega$ auf U entspricht, womit dann der Satz bewiesen ist. $\square$

Eine weitere wichtige Eigenschaft des Differentials ist seine Verträglichkeit mit dem Zurückziehen. Der Spezialfall der Inklusionsabbildung einer Karte $U \subset M$ liefert die definierende Gleichung: $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$. Allgemeiner gilt

Satz 7.17. Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung und ω eine k -Form auf N , dann gilt: $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

7.8. Lie-Ableitung von Differentialformen. Sei X ein Vektorfeld mit lokalem Fluss φ_t , d.h. $\varphi_t : U \subset M \rightarrow M$ definiert durch

$$\varphi_t(p) = c_p(t), \quad \varphi_0(p) = p, \quad \dot{\varphi}_t(p) = X_{\varphi_t(p)}.$$

Die Lie-Ableitung einer Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist gegeben durch

$$L_X(f)_p = df(X_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* f(p),$$

wobei $\varphi_t^* f(p) = f \circ \varphi_t(p)$. Die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes $Y \in \chi(M)$ ist gegeben durch

$$(L_X Y)_p = [X, Y]_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* Y)_p,$$

wobei $\varphi_t^* Y_p = d\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(p)})$.

Definition 7.18. Die Lie-Ableitung einer Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ nach einem Vektorfeld $X \in \chi(M)$ ist definiert durch

$$L_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \omega,$$

wobei $(\varphi_t^* \omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{\varphi_t(p)}(d\varphi_t X_1, \dots, d\varphi_t X_k)$.

Lemma 7.19. *Die Lie-Ableitung von Formen hat die folgenden elementaren Eigenschaften:*

(1) Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ und $X, Y \in \chi(M)$, dann gilt

$$(L_X \omega)Y = L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y).$$

(2) Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $X, X_1, \dots, X_k \in \chi(M)$, dann gilt

$$(L_X \omega)(X_1, \dots, X_k) = L_X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_i \omega(\dots, L_X X_i, \dots)$$

(3) $L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X \beta)$, d.h. L_X ist eine Derivation.

(4) $L_X(d\omega) = dL_X \omega$.

Beweis: Zu (1):

$$\begin{aligned} L_X(\omega(Y)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^*(\omega(Y)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega(Y) \circ \varphi_t \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega(d\varphi_t \circ d\varphi_{-t} Y) \circ \varphi_t \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega(d\varphi_t(\varphi_t^* Y)) \circ \varphi_t \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* \omega)(\varphi_t^* Y) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* \omega)(Y) + \omega \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* Y \right) \\ &= (L_X \omega)Y + \omega(L_X Y). \end{aligned}$$

Zu (2): Der Beweis geht analog zu (1).

Zu (3):

$$\begin{aligned} L_X(\alpha \wedge \beta) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^*(\alpha \wedge \beta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^*(\alpha) \wedge \varphi_t^*(\beta) \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^*(\alpha) \right) \wedge \beta + \alpha \wedge \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^*(\beta) \right) \\ &= (L_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X \beta). \end{aligned}$$

Zu (4):

$$L_X d\omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* d\omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(\varphi_t^* \omega) = d \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \omega \right) = dL_X \omega.$$

□

Definition 7.20. Sei $\omega \in \Omega^k(M)$, $X \in \chi(M)$, dann ist die Kontraktion (oder inneres Produkt) von ω mit X folgendermaßen definiert

$$(i_X \omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

Man schreibt auch $i_X \omega = X \lrcorner \omega$, d.h. man hat eine Abbildung $i_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$.

Bemerkung: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann definiert das Skalarprodukt einen Isomorphismus $V \rightarrow V^*$, $v \mapsto v^*$, definiert durch $v^*(u) = \langle v, u \rangle$. Für jeden Vektor $v \in V$ ist dann $i_v : \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^{k-1} V^*$ die zum Dachprodukt mit v , also zu $u \mapsto v \wedge u$, adjungierte Abbildung, d.h.

$$\langle i_v \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, v^* \wedge \beta \rangle.$$

Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\Lambda^k V^*$ ist durch die Wahl folgender Orthonormal-Basis festgelegt:

$$(5) \quad e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*, \quad \text{für } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

wobei $\{e_i\}$ eine fixierte Orthonormal-Basis von V ist. Für die Vektoren e_i^* der dualen Basis schreibt man auch e^i .

Lemma 7.21. Das innere Produkt hat die folgenden elementaren Eigenschaften:

- (1) $i_X(f\omega) = f i_X \omega$, für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$
- (2) $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X \beta$ für $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^*(M)$.
- (3) $i_X(df) = df(X)$, für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
- (4) $i_X^2 = 0$.

Satz 7.22 (Cartan-Formel). Sei $\omega \in \Omega^*(M)$ und $X \in \chi(M)$. Dann gilt

$$(*) \quad L_X \omega = i_X d\omega + d i_X \omega.$$

Beweis: $(*)$ gilt auf 0-Formen: Sei also $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann ist $L_X f = df(X)$ und $i_X f = 0$. Somit gilt

$$i_X df + d i_X f = i_X df = df(X) = L_X f.$$

$(*)$ gilt auf 1-Formen: Sei also $\omega \in \Omega^1(M)$, dann ist

$$\begin{aligned} (i_X d\omega + d i_X \omega)(Y) &= d\omega(X, Y) + (d\omega(X))(Y) \\ &= L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) + L_Y(\omega(X)) \\ &= L_X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) = (L_X \omega)(Y). \end{aligned}$$

Sei nun $P_X := i_X d\omega + d i_X \omega$. Wir zeigen, dass P_X eine Derivation ist, d.h.

$$P_X(\alpha \wedge \beta) = P_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge P_X(\beta).$$

Da $P_X = L_X$ auf 0- und 1-Formen, folgt daraus dann die Behauptung.

Sei also $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^*(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_X(\alpha \wedge \beta) &= i_X d(\alpha \wedge \beta) + d i_X(\alpha \wedge \beta) \\ &= i_X((d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)) + d((i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X \beta) \\ &= (i_X d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1} d\alpha \wedge i_X \beta + (-1)^k i_X \alpha \wedge d\beta + (-1)^{2k} \alpha \wedge i_X d\beta \\ &\quad + (d i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^{k-1} (i_X \alpha) \wedge d\beta + (-1)^k d\alpha \wedge i_X \beta + (-1)^{2k} \alpha \wedge d i_X \beta \\ &= ((i_X d\alpha) + (d i_X \alpha)) \wedge \beta + \alpha \wedge (i_X d\beta + d i_X \beta) \\ &= P_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge P_X(\beta). \end{aligned}$$

□

Für eine k -Form ω haben wir somit nach obigem Satz

$$d\omega(X, X_1, \dots, X_k) = (L_X \omega)(X_1, \dots, X_k) - d(i_X \omega)(X_1, \dots, X_k).$$

Iteration dieses Arguments liefert einen weiteren Beweis für die Formel

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} L_{X_i}(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

wobei $X_1, \dots, X_{k+1}$ Vektorfelder auf M sind und $\hat{X}_i$ bedeutet, dass der entsprechende Eintrag ausgelassen wird.

Beispiele:

(1) Sei $\omega \in \Omega^1(M)$, so ist

$$d\omega(X, Y) = L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

(2) Sei $\omega \in \Omega^2(M)$, so ist

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= L_X(\omega(Y, Z)) - L_Y(\omega(X, Z)) + L_Z(\omega(Y, Z)) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X) \\ &= \sigma_{XYZ} (L_X(\omega(Y, Z)) - \omega([X, Y], Z)) \end{aligned}$$

wobei σ_{XYZ} die zyklische Summe über X, Y, Z bezeichnet.

7.9. Symplektische Mannigfaltigkeiten. Eine symplektische Mannigfaltigkeit ist eine gerade-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer geschlossenen, nicht ausgearteten 2-Form. Wir betrachten zunächst nicht ausgeartete 2-Formen auf Vektorräumen.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und ω eine 2-Form auf V . Für ω gibt es eine (nicht eindeutige) ausgezeichnete Basis von V : Wir definieren einen Unterraum $U \subset V$ durch

$$U = \{u \in V \mid \omega(u, v) = 0 \text{ für alle } v \in V\}.$$

Sei W ein komplementärer Unterraum zu U , so dass $V = U \oplus W$.

Lemma 7.23. *Der Unterraum W ist gerade-dimensional und hat eine Basis aus Vektoren $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$, so dass*

$$\begin{aligned}\omega(e_i, e_j) &= 0 = \omega(f_i, f_j) \\ \omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

für alle i, j .

Beweis: Sei $e_1 \in W$ ungleich Null. Dann gibt es ein $f_1 \in V$, so dass $\omega(e_1, f_1) = 1$. OBdA können wir annehmen, dass f_1 keine U -Komponente hat und deshalb in W liegt. Sei W_1 der Spann von e_1 und f_1 und

$$W_1^\omega = \{u \in W \mid \omega(u, v) = 0 \text{ für alle } v \in W_1\}.$$

Es gilt $W = W_1 \oplus W_1^\omega$: Die Zerlegung eines beliebigen Elements $u \in W$ in die Komponenten ist gegeben durch

$$u = \omega(e_1, u)f_1 + \omega(u, f_1)e_1 + (u - \omega(e_1, u)f_1 - \omega(u, f_1)e_1).$$

Wir wenden jetzt das gleiche Argument auf W_1^ω an. Induktiv bekommen wir so die Basis e_i, f_j . $\square$

Definition 7.24. *Sei V ein reeller Vektorraum. Eine 2-Form ω auf V heißt nicht ausgeartet, falls der oben definierte Unterraum $U \subset V$ nur aus der Null besteht.*

Insbesondere ist dann $V = W$. Damit können nicht-ausgeartete 2-Formen nur auf gerade-dimensionalen Vektorräumen existieren.

Lemma 7.25. *Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $2n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) *Eine 2-Form ω ist nicht ausgeartet.*
- (2) *Für jeden Vektor $u \neq 0$ in V gibt es einen Vektor v , so dass $\omega(u, v) \neq 0$.*
- (3) *ω ist von der Form*

$$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \wedge \beta_i$$

für eine geeignete Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ von V^ .*

- (4) $\omega^n := \omega \wedge \dots \wedge \omega$ ist eine nicht-verschwindende $2n$ -Form.
 (5) ω definiert einen Isomorphismus $I: V \rightarrow V^*$, durch $I(v) = \omega(v, \cdot)$.

Definition 7.26. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine k -Form $\eta \in \Omega^k(M)$ heißt geschlossen, falls $d\eta = 0$. Eine 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$ heißt nicht ausgeartet, falls $\omega_p \in \Lambda^2 T_p^* M$ für alle $p \in M$ nicht ausgeartet ist.

Bemerkung: Eine Differentialform η heißt exakt, falls $\eta = d\theta$ für eine Differentialform θ . Jede exakte Form ist geschlossen wegen $d^2 = 0$, die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Definition 7.27. Eine symplektische Form auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$, die geschlossen und nicht ausgeartet ist.

Bemerkung: Existiert auf M eine nicht ausgeartete oder symplektische 2-Form, dann muß die Dimension von M gerade sein.

Definition 7.28. Zwei symplektische Mannigfaltigkeiten (M, ω_M) und (N, ω_N) heißen symplektomorph, falls es einen Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ gibt mit $f^* \omega_N = \omega_M$.

Beispiel: Auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ betrachtet man die Koordinaten $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Die kanonische symplektische Form auf $\mathbb{R}^{2n}$ ist definiert durch

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i.$$

Die 2-Form ω_0 ist offensichtlich geschlossen und nicht ausgeartet. Die 2-Form ω_0 ist auch exakt, denn es gilt $\omega_0 = d\theta$ mit $\theta = \sum q_i dp_i$.

Der Satz von Darboux besagt, dass jede symplektische Mannigfaltigkeit lokal symplektomorph zu $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ist:

Theorem 7.29 (Darboux). Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$. Dann gibt es um jeden Punkt eine Karte (U, x) mit den Koordinaten gegeben durch $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, so dass

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i.$$

Diese Koordinaten heißen Darboux-Koordinaten.

Beispiel: Sei X eine beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann ist $M := T^*X$ eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Auf $M = T^*X$ existiert eine kanonische symplektische Form ω . Diese Form ist exakt, d.h. es gilt $\omega = d\theta$ für eine gewisse 1-Form θ . Sei

$\pi : T^*X \rightarrow X$ die kanonische Projektion und sei $\xi \in T_\lambda T^*X$, dann definiert man die 1-Form θ durch $\theta_\lambda(\xi) := \lambda(\pi_*\xi)$. Man nennt θ *tautologische* 1-Form oder auch *Liouville-Form*.

Bemerkung: Auf geschlossenen, d.h. kompakten Mannigfaltigkeiten ohne Rand, sind symplektische Formen nie exakt.

Beispiel: Das Produkt $M \times N$ von symplektischen Mannigfaltigkeiten (M, ω_M) und (N, ω_N) ist symplektisch: Mit den kanonischen Projektionen π_M und π_N auf die Faktoren definiert man

$$\omega = \pi_M^* \omega_M + \pi_N^* \omega_N.$$

Dann ist ω eine symplektische Form auf der Produkt-Mannigfaltigkeit $M \times N$.

Beispiel: Sei Σ_g eine orientierbare Fläche vom Geschlecht g . Wir werden später sehen, dass Σ_g eine Volumenform ω hat, d.h. eine 2-Form, die in jedem Punkt ungleich Null ist. Da $d\omega = 0$ aus Gradgründen gilt, ist ω eine symplektische Form. Also sind alle orientierbaren Flächen und beliebige Produkte von ihnen symplektisch. Das gilt insbesondere für $S^2 \times \dots \times S^2$ und $T^{2n} = T^2 \times \dots \times T^2$.

Beispiel: Die komplex projektiven Räume $\mathbb{CP}^n$ sind für alle $n \geq 1$ symplektisch. Allgemeiner sind alle glatten algebraischen Varietäten in $\mathbb{CP}^n$ symplektisch.

Man kann die klassische Hamiltonmechanik durch symplektische Geometrie beschreiben. Der Phasenraum eines klassischen Systems ist eine symplektische Mannigfaltigkeit und die (q, p) -Koordinaten sind die Orts- und Impulskoordinaten.

Definition 7.30. Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Wir definieren das Hamilton-Vektorfeld X_H zu einer Funktion $H \in C^\infty(M)$ durch die Gleichung

$$\omega(X_H, \cdot) = dH.$$

Unter dem Isomorphismus $I: TM \rightarrow T^*M$ gilt $I(X_H) = dH$ und damit

$$\omega(X_H, Y) = dH(Y) = L_Y H.$$

für Vektorfelder $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Die Funktion H heißt Hamilton-Funktion.

Die Zeitentwicklung des Zustands eines klassischen Systems ist gegeben durch die Integralkurven des Hamilton-Vektorfeldes.

Satz 7.31. Sei (M^{2n}, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und sei $H \in C^\infty(M)$, dann gilt in Darboux-Koordinaten (U, x) mit $x = (q, p)$ für das Hamilton-Vektorfeld:

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

Sei $\gamma: I \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit

$$x(\gamma(t)) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)).$$

Dann ist γ genau dann eine Integralkurve von X_H , wenn

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n \quad \text{erfüllt ist.}$$

Beweis: In den Darboux-Koordinaten (U, x) mit $x = (q, p)$ gilt $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$ und damit

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = -\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_j}, \frac{\partial}{\partial q_i}\right) = \delta_{ij}.$$

Auf U existieren glatte Funktionen a_i und $b_i, i = 1, \dots, n$ mit

$$X_H = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Aus der Definition des Hamilton-Vektorfeldes X_H folgt

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \omega(X_H, \frac{\partial}{\partial q_i}) = -b_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega(X_H, \frac{\partial}{\partial p_i}) = a_i.$$

Daraus folgt die Formel für das Hamilton-Vektorfeld X_H . In den Darboux-Koordinaten (U, x) gilt außerdem $\dot{\gamma}(t) = \sum \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i}$. Vergleicht man das mit der gerade bewiesenen Formel für X_H , dann sieht man, dass $\dot{\gamma}(t) = X_H$ genau dann gilt, wenn die beiden angegebenen Differentialgleichungen erfüllt sind. $\square$

Bemerkung: Die kanonischen Bewegungsgleichungen der Hamiltonschen Mechanik sind genau die Gleichungen der Integralkurven des Hamilton-Vektorfeldes X_H (Satz von Hamilton).

Zur Erinnerung: Im vorigen Abschnitt wurde die Lie-Ableitung einer Differentialform α nach einem Vektorfeld X definiert. Man hat $L_X \alpha = \frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha$, wobei φ_t der Fluß von X ist und es gilt die fundamentale Cartan Formel

$$L_X \alpha = d(\alpha(X, \cdot)) + (d\alpha)(X, \cdot).$$

Im ersten Summanden steht das Differential der $(k-1)$ -Form $\alpha(X, \cdot)$ und im zweiten Summanden steht die k -Form, die man erhält, wenn man X in die $(k+1)$ -Form $d\alpha$ einsetzt.

Die durch den Fluß von X_H gegebenen Diffeomorphismen von M , sind Symplektomorphismen:

Satz 7.32 (Satz von Liouville). *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und die Funktion $H \in C^\infty(M)$ habe ein vollständiges Hamilton-Vektorfeld X_H , d.h. der Fluß φ_t von X_H sei für alle Zeiten t definiert. Dann gilt*

$$\varphi_t^* \omega = \omega,$$

d.h. φ_t ist für alle t ein Symplektomorphismus. Das Tripel (M, ω, H) nennt man Hamilton-System.

Beweis: Nach der Cartan Formel gilt

$$L_{X_H}\omega = d(\omega(X_H, \cdot)) + (d\omega)(X_H, \cdot).$$

Die Gleichung $\varphi_t^*\omega = \omega$ gilt nun für alle t genau dann, wenn $L_{X_H}\omega = 0$. Die eine Richtung ist klar. Für die andere Richtung nutzt man die Definition der Lie-Ableitung und die Tatsache, dass φ_t eine 1-parametrische Gruppe ist. Wegen der Cartan-Formel und da ω geschlossen ist, gilt damit $\varphi_t^*\omega = \omega$ genau dann, wenn $d(\omega(X_H, \cdot)) = 0$, bzw. nach der Definition von X_H , genau dann, wenn $d(dH) = 0$, was aber wegen $d^2 = 0$ immer erfüllt ist. $\square$

Bemerkung: Die kanonische Volumenform einer symplektischen Mannigfaltigkeit ist gegeben durch $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$. Aus dem Satz von Liouville folgt, dass der Fluß des Hamilton-Vektorfeldes das Volumen im Phasenraum erhält.

Auf symplektischen Mannigfaltigkeiten besitzt der Raum der glatten Funktionen die Struktur einer Lie-Algebra. Diese soll im Folgenden beschrieben werden.

Definition 7.33. Für Funktionen $f, g \in C^\infty(M)$ auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) definiert man die Poisson-Klammer $\{f, g\}$ durch

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g).$$

Satz 7.34. Die Poisson-Klammer hat folgende Eigenschaften:

- (1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- (2) $\{\cdot, \cdot\}$ ist $\mathbb{R}$ -bilinear
- (3) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$
- (4) $\{f, g \cdot h\} = g \cdot \{f, h\} + h \cdot \{f, g\}$
- (5) Die Abbildung $H \mapsto X_H$ ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren, d.h. es gilt

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}$$

- (6) In Darboux-Koordinaten gilt:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

Definition 7.35. Eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ heißt Erhaltungsgröße des Hamiltonsystems (M, ω, H) , falls f konstant ist auf den Integralkurven von X_H . Erhaltungsgrößen nennt man auch erste Integrale. Der Raum der Erhaltungsgrößen eines Hamiltonsystems (M, ω, H) wird mit $\mathcal{E}(H)$ bezeichnet.

Satz 7.36. *Sei (M, ω, H) ein Hamiltonsystem. Dann gilt für den Raum der Erhaltungsgrößen:*

- (1) *Der Raum der Erhaltungsgrößen $\mathcal{E}(H)$ ist ein reeller Vektorraum.*
- (2) *$f \in \mathcal{E}(H)$ genau dann, wenn $\{f, H\} = 0$ gilt.*
- (3) *Sind $f, g \in \mathcal{E}(H)$ dann gilt auch $\{f, g\} \in \mathcal{E}(H)$ d.h. der Raum der Erhaltungsgrößen ist eine Lie-Algebra, genauer eine Unterálgebra von $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$*

Beweis: Die erste Aussage ist offensichtlich. Sei $c_p(t) = \varphi_t(p)$ die Integralkurve von X_H durch p . Dann gilt $f \in \mathcal{E}(H)$ genau dann, wenn $f(c_p(t)) = f(p)$ für alle p und alle t gilt. Bildet man die Ableitung, so findet man, dass diese Gleichung genau dann gilt, wenn $L_{X_H}f = 0$ gilt und damit genau dann, wenn $\{f, H\} = 0$ erfüllt ist. Denn nach Definition hat man $L_{X_H}f = df(X_H) = \omega(X_f, X_H) = \{H, f\}$. Das beweist die zweite Aussage.

Nun zur dritten Aussage. Seien $f, g \in \mathcal{E}(H)$, d.h. wie gerade gezeigt $\{f, H\} = 0 = \{g, H\}$. Dann folgt aus Gleichung (3) in Satz 7.34

$$\{f, g\} \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow \{\{f, g\}, H\} = 0 \Leftrightarrow \{\{g, H\}, f\} + \{\{H, f\}, g\} = 0,$$

was aber nach Voraussetzung erfüllt ist. □

Der Satz von Noether besagt, dass zu jeder Symmetrie eines Hamiltonsystems eine Erhaltungsgröße gehört. Genauer gesagt gilt

Satz 7.37 (Satz von Noether). *Sei (M, ω, H) ein Hamiltonsystem mit $\omega = d\theta$, für eine geeignete 1-Form θ und sei $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ein vollständiges Vektorfeld, dessen Fluß φ_t das Hamiltonsystem erhält, d.h. es gelte $\varphi_t^*\theta = \theta$ und $\varphi_t^*H = H$. Dann gilt*

$$\theta(Y) \in \mathcal{E}(H).$$

Beweis: Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt zunächst $L_Y\theta = 0$ und $L_YH = 0$. Setzt man das in die Formel für die Lie-Ableitung $L_Y\theta$ ein, so folgt mit $f = \theta(Y)$

$$\begin{aligned} 0 &= (L_Y\theta)(X_H) \\ &= (d\theta)(Y, X_H) + d(\theta(Y))(X_H) \\ &= \omega(Y, X_H) + df(X_H) \\ &= -L_YH + \omega(X_f, X_H) \\ &= \{H, f\}, \end{aligned}$$

d.h. $f = \theta(Y) \in \mathcal{E}(H)$. □

7.10. Die de Rahm - Kohomologie. Die Eigenschaft $d^2 = 0$ des Differentials d entspricht der Aussage, dass man partiellen Ableitungen vertauschen kann (Satz von Schwarz). Eine andere Interpretation führt auf die de Rham Kohomologie.

Definition 7.38. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\alpha \in \Omega^*(M)$.

- (1) α heißt geschlossen, falls $d\alpha = 0$.
- (2) α heißt exakt, falls $\alpha = d\beta$ für ein $\beta \in \Omega^*(M)$.

Bemerkung: Es gilt im $(d : \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k) \subset \ker(d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1})$ und somit ist jede exakte Form geschlossen. Die Bedingung $d\omega = 0$ ist also notwendig für die Lösbarkeit der Gleichung

$$\omega = d\eta, \quad \eta \in \Omega^*(M).$$

Beispiel: Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\omega = \sum_i \omega_i dx_i$ mit $\omega_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Gesucht ist nun eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\omega = df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Dann ist $\omega = df$ äquivalent zu

$$(*) \quad \omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $\omega = df$ ist $d\omega = d^2f = 0$,

$$(**) \quad d\omega = \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

Bemerkung: Aus dem Satz von Frobenius aus der Analysis folgt: $(*) \Leftrightarrow (**)$, d.h. auf $\mathbb{R}^n$ ist jede geschlossene 1-Form bereits exakt.

Beispiele:

- (1) Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ mit $\omega = f dx + g dy$ geschlossen. Es gilt also

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Gesucht ist nun $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\omega = d\alpha$. Setzen wir

$$\alpha(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y g(x, t) dt,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy = \left(f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \partial_x g(x, t) dt \right) dx + g(x, y) dy \\ &= \left(f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \partial_y f(x, t) dt \right) dx + g(x, y) dy \\ &= f(x, y) dx + g(x, y) dy = \omega, \end{aligned}$$

nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

(2) Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

dann ist ω geschlossen. Um dies einzusehen führen wir Polarkoordinaten ein

$$dx = d(r \cos \varphi) = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi,$$

$$dy = d(r \sin \varphi) = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi.$$

Dann ist $\omega = d\varphi$ und offensichtlich geschlossen. ω ist jedoch nicht exakt, denn

$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi, \quad \text{für } \gamma \text{ die Kreislinie.}$$

Und das Integral über exakte Formen entlang geschlossener Kurven verschwindet.

Definition 7.39. Die de Rahm-Kohomologie ist definiert durch

$$\begin{aligned} H_{dR}^k(M) &= \ker(d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}) / \operatorname{im}(d : \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k) \\ &= \text{Menge der Äquivalenzklassen geschlossener Formen.} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (1) Alle $H_{dR}^k(M)$ sind Vektorräume.
- (2) $H_{dR}^k(M) = \{0\}$, falls $k > \dim M$.
- (3) $H_{dR}^k(M) = \{0\}$ genau dann, wenn jede geschlossene k -Form auch exakt ist.
- (4) $H_{dR}^0(M) = \{f \mid df = 0\} = \{f \mid f \text{ lokal konstant}\} = \mathbb{R}^r$, falls r die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M ist.
- (5) Jede Abbildung $f : M \rightarrow N$ induziert eine Abbildung $f^* : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M)$. Man definiert $f^*[\alpha] := [f^*\alpha]$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da das Zurückziehen von Formen mit dem Differential vertauscht. Für zwei Abbildungen $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow X$ gilt: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Ausserdem gilt $\operatorname{id}^* = \operatorname{id}$. Insbesondere induzieren damit Diffeomorphismen Isomorphismen auf der Kohomologie. Die deRham-Kohomologie ist also eine differenzierbare Invariante einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

- (6) $H_{dR}^k(M)$ sind topologische Invarianten.
- (7) $H_{dR}^k(S^n) = \{0\}$ für $0 < k < n$.
- (8) $H_{dR}^1(T^2) = \mathbb{R}^2$, $H_{dR}^1(S^2) = \{0\}$ und folglich ist $T^2 \neq S^2$.
- (9) Ist M kompakt, zusammenhängend und orientierbar, so ist $H_{dR}^n(M) = \mathbb{R}$.
- (10) $\{H_{dR}^k(M)\}$ ist ein Spezialfall folgender Situation: Man hat eine Folge von Vektorräumen (V_k) mit linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} d_k : V_k &\rightarrow V_{k+1}, & d_k \circ d_{k-1} &= 0. \\ \dots &\rightarrow V_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} V_k \xrightarrow{d_k} V_{k+1} \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (V)$$

Man definiert nun die Kohomologie des Komplexes (V) als

$$H^k(V) = \ker d_k / \operatorname{im} d_{k-1}.$$

Definition 7.40. Eine Mannigfaltigkeit M heißt kontrahierbar auf $p_0 \in M$, falls eine differenzierbare Abbildung

$$H : M \times I \rightarrow M, \quad I = [0, 1]$$

existiert mit

- (1) $H(p, 1) = p, \quad \forall p \in M,$
- (2) $H(p, 0) = p_0, \quad \forall p \in M.$

Damit gibt es eine differenzierbare Homotopie zwischen der Identität auf M und der konstanten Abbildung $p \mapsto p_0$. Die Mannigfaltigkeit M hat den Homotopietyp eines Punktes.

Lemma 7.41 (Lemma von Poincaré). Sei M eine kontrahierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist jede geschlossene Form exakt, d.h. es gilt

$$H_{dR}^k(M) = \{0\}, \quad k > 0.$$

Beispiele: (1) Sternförmige Mengen sind kontrahierbar. (2) $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar.

Im Spezialfall von offenen Kugeln im $\mathbb{R}^n$ (und etwas allgemeiner für sternförmige Mengen) läßt sich das Lemma von Poincaré leicht beweisen (siehe Warner).

Lemma 7.42. Sei U eine offene Kugel in $\mathbb{R}^n$. Dann existieren auf U lineare Abbildungen $h_k : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$ mit

$$\operatorname{id} = h_{k+1} \circ d + d \circ h_k.$$

Beweis: Sei $X := \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ das radiale Vektorfeld auf U . Für das Vektorfeld X gilt insbesondere: $L_X dx_i = d i_X dx_i = dx_i$.

Man definiert eine lineare Abbildung $\alpha_k : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(U)$ durch

$$\alpha_k(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) := \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tp) dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

und setzt α_k dann linear fort auf ganz $\Omega^k(U)$.

Behauptung: $\alpha_k \circ L_X = \text{id}$

Beweis: Man nutzt aus, dass L_X eine Derivation ist und macht folgende Rechnung in $p \in M$:

$$\begin{aligned} \alpha_k \circ L_X(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) &= \alpha_k((kf + X(f)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \\ &= \left[\int_0^1 (t^{k-1}(kf(tp) + \sum x_i(tp) \frac{\partial f}{\partial x_i}) dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \left[\int_0^1 \frac{d}{dt}(t^k f(tp)) dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= f(p) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Man beachte, dass $x_i(tp) = tp_i$, da $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$.

Behauptung: $\alpha_k \circ d = d \circ \alpha_{k-1}$

Beweis:

$$\begin{aligned} \alpha_k(d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}})) &= \alpha_k\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}\right) \\ &= \left[\int_0^1 t^{k-1} \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tp) dt \right] dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \\ &= d \left(\left[\int_0^1 t^{k-2} f(tp) dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \right) \\ &= d \circ \alpha_{k-1}(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}) \end{aligned}$$

Aus den beiden Behauptungen und der Cartan-Formel folgt damit:

$$\text{id} = \alpha_k \circ L_X = \alpha_k \circ i_X \circ d + \alpha_k \circ d \circ i_X = (\alpha_k \circ i_X) \circ d + d \circ (\alpha_{k-1} \circ i_X).$$

Damit kann man die gesuchten linearen Abbildungen h_k definieren durch $h_k := \alpha_{k-1} \circ i_X$. $\square$

Folgerung 7.43. Sei U eine offene Kugel in $\mathbb{R}^n$, dann ist jede geschlossene Form auf U schon exakt und damit gilt $H_{dR}^k(U) = 0$ für $k \geq 1$.

Bemerkung: Die gleiche Aussage mit analogen Beweis gilt auch für sternförmige Gebiete in $\mathbb{R}^n$. Allgemeiner gilt der folgende Satz

Satz 7.44. *Seien $f, g : M \rightarrow N$ zwei glatte Abbildung, die zueinander (glatt) homotop sind. Dann gilt:*

$$f^* = g^* : H_{dR}^k(N) \longrightarrow H_{dR}^k(M)$$

zum Beweis: Man zeigt, dass es lineare Abbildungen $h_k : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ gibt mit:

$$f^* - g^* = h_{k+1} \circ d + d \circ h_k.$$

Man nennt $\{h_k\}$ einen Homotopie-Operator zwischen f und g . Es folgt, dass die Differenz $f^* - g^*$ angewandt auf geschlossene Formen exakte Formen liefert und damit auf den Kohomologieklassen verschwindet.

Im Beweis von Lemma 7.42 wurde ein Homotopie-Operator zwischen $f = \text{id}$ und der konstanten Abbildung konstruiert.

7.11. Bemerkungen zu rot , grad und div .

Definition 7.45. *Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Das Gradientenvektorfeld von f ist definiert als*

$$(6) \quad \text{grad } f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Bemerkungen:

- (1) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Dieses überträgt sich auf $T_p \mathbb{R}^n$ und es ist

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = df(X).$$

Man definiert nun mit Hilfe des Skalarproduktes (später werden wir dieses durch die Metrik ersetzen) folgende Abbildung

$$* : \chi(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^n), \quad X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto X^* := \sum a_i dx_i,$$

wobei $X^*(Y) = \langle X, Y \rangle$. Insbesondere ist dann $(\text{grad } f)^* = df$.

- (2) Allgemeiner definiert jede Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M durch (6) ein Vektorfeld $\text{grad } f$, das Gradienten-Vektorfeld von f . Ist auf M eine Riemannsche Metrik gegeben, dann kann man TM mit T^*M identifizieren und $\text{grad } f$ entspricht dann dem Differential df .

- (3) Sei nun $n = 3$, dann definiert man den *Hodge-Operator*

$$* : \Omega^k(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^{3-k}(\mathbb{R}^3).$$

Für $k = 0$ ist $*$ gegeben als

$$\begin{aligned} * : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow \Omega^3(\mathbb{R}^3), \\ f &\longmapsto *f = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Für $k = 1$ ist $*$ gegeben als

$$* : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^3),$$

$$\omega = \sum a_i dx_i \longmapsto *\omega = a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2$$

- (4) Der Hodge-Operator ist ein Isomorphismus und es gilt: $*^2 = \text{id}$.
- (5) Der Hodge-Operator lässt sich auf beliebigen Mannigfaltigkeiten definieren, wenn man eine Riemannsche Metrik und eine Orientierung gegeben hat.
- (6) Sei $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$, dann definiert man die Rotation als Abbildung $\text{rot} : \chi(\mathbb{R}^3) \rightarrow \chi(\mathbb{R}^3)$ und die Divergenz als Abbildung $\text{div} : \chi(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ durch:

$$\text{rot}(X) = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\text{div}(X) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

Im Weiteren beschränken wir uns auf den $\mathbb{R}^3$.

Lemma 7.46. *Zwischen rot , grad und div gelten die folgenden Beziehungen*

- (1) $(\text{grad } f)^* = df$.
- (2) $dX^* = *(\text{rot } X)^*$.
- (3) $d(*X^*) = *(\text{div } X)$.

Beweis: (1) folgt direkt aus der Definition von $\text{grad } f$ und der Charakterisierung von $(\text{grad } f)^*$.

Zu (2): Sei $X = \sum a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ mit $a_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann ist

$$\begin{aligned} dX^* &= d\left(\sum a_j dx_j\right) = \sum da_j \wedge dx_j = \sum_{i,j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \\ &= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Zu (3): Man rechnet direkt nach

$$\begin{aligned} d(*X^*) &= d(a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = *(\text{div } X). \end{aligned}$$

□

Folgerung 7.47. *Für alle Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $X \in \chi(\mathbb{R}^3)$ gilt*

$$(1) \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0,$$

$$(2) \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0.$$

Beweis: (1): Es genügt zu zeigen, dass $*((\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f))^*) = 0$, aber

$$*((\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f))^*) = d(\operatorname{grad} f)^* = d^2 f = 0.$$

(2): Es genügt zu zeigen, dass $*(\operatorname{div}(\operatorname{rot} X)) = 0$, aber

$$*(\operatorname{div}(\operatorname{rot} X)) = d(*(\operatorname{rot} X)^*) = d^2 X^* = 0.$$

□

Bemerkung: $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ ist der *Laplace-Operator* von f .

Folgerung 7.48. Sei X ein Vektorfeld auf einer kontrahierbaren offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

(1) Ist $\operatorname{rot} X = 0$, so existiert eine glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X = \operatorname{grad} f$.

(2) Ist $\operatorname{div} X = 0$, so existiert ein Vektorfeld $Y \in \chi(U)$ mit $X = \operatorname{rot} Y$.

Beweis: (1): Ist $\operatorname{rot} X = 0$, so folgt $dX^* = 0$. Nach dem Lemma von Poincaré existiert nun eine glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $X^* = df$ und folglich $X = \operatorname{grad} f$.

(2): Ist $\operatorname{div} X = 0$, so ist $d(*X^*) = 0$ und folglich existiert eine Form $\eta \in \Omega^1(U)$

$$\eta = Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + Y_3 dx_3,$$

so dass $*X^* = d\eta = dY^* = *(\operatorname{rot} Y)^*$. Somit ist $X = \operatorname{rot} Y$.

□

7.12. Beispiel: Die Maxwell Gleichungen. Mit Hilfe einer 2-Form F auf $\mathbb{R}^4$, kann man das elektro-magnetische Feld beschreiben. Das elektrische Feld $E = (E_1, E_2, E_3)$ und das magnetische Feld $H = (H_1, H_2, H_3)$ sind zwei Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$. Eine allgemeine 2-Form auf $\mathbb{R}^4$ schreibt sich als $F = \sum_{i < j} F_{ij} dx_i \wedge dx_j$, wobei $0 \leq i, j \leq 3$. Man definiert jetzt: $F_{0a} := -E_a$, $a = 1, 2, 3$ und $F_{23} = H_1, F_{13} = -H_2$ und $F_{12} = H_3$. Es gilt also

$$F = - \sum_a E_a dx_0 \wedge dx_a + H_1 dx_2 \wedge dx_3 - H_2 dx_1 \wedge dx_3 + H_3 dx_1 \wedge dx_2 .$$

Die Gleichung $dF = 0$ entspricht nun einem System partieller Differentialgleichungen. Man berechnet

$$\begin{aligned} dF &= \sum_{i < j} dF_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j = \sum_{i < j, k} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \\ &= \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \sum_{i < j} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_0} dx_0 \wedge dx_i \wedge dx_j \\ &\quad + \sum_{j, k} \frac{\partial F_{0j}}{\partial x_k} dx_0 \wedge dx_j \wedge dx_k \\ &= \left(\frac{\partial H_3}{\partial x_3} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{02}}{\partial x_1} \right) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_{13}}{\partial x_0} - \frac{\partial F_{03}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x_3} \right) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_{23}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x_3} - \frac{\partial F_{03}}{\partial x_2} \right) dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial H_3}{\partial x_3} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial H_3}{\partial x_0} + \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1} \right) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad - \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_0} + \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \right) dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_0} + \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \right) dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Substituiert man hier die Definition der Divergenz eines Vektorfeldes H als

$$\operatorname{div}(H) = \frac{\partial H_3}{\partial x_3} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_1}{\partial x_1}$$

und der Definition der Rotation eines Vektorfeldes E als

$$\operatorname{rot}(E) = \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

folgt, dass die Gleichung $dF = 0$ äquivalent ist zum 1. Teil der Maxwell-Gleichungen:

$$(i) \quad \operatorname{div}(H) = 0, \quad \text{und} \quad (ii) \quad \operatorname{rot}(E) = -\frac{\partial H}{\partial x_0} .$$

7.13. Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten.

Definition 7.49. (1) Das Bündel der (r, s) -Tensoren auf einer Mannigfaltigkeit M ist definiert als die disjunkte Vereinigung:

$$T^{(r,s)}(TM) := \bigcup_{p \in M} T^{(r,s)}(T_p M),$$

wobei

$$\begin{aligned} T^{(r,s)}(T_p M) &:= \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{s\text{-mal}} \\ &= \text{Raum der multi-linearen Abbildungen} \\ &\quad \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{s\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2) Tensoren vom Typ (r, s) sind Schnitte im Bündel $T^{(r,s)}(TM)$, d.h. differenzierbare Abbildungen $R : M \rightarrow T^{(r,s)}(TM)$,

$$\pi \circ R = \text{id}_M,$$

Äquivalent sind (r, s) -Tensoren $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineare Abbildungen,

$$\underbrace{\Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\chi(M) \times \dots \times \chi(M)}_{s\text{-mal}} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M).$$

Bemerkungen:

- (1) Als *tensorielles Verhalten* bezeichnet man folgende Eigenschaft: Der Wert eines (r, s) -Tensors auf den r betrachteten 1-Formen und den s Vektorfeldern in $p \in M$ hängt nur von deren Wert in p ab.
- (2) Lokal auf einer Umgebung U von p schreiben sich (r, s) -Tensoren als

$$R = \sum_{i,j} R_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \otimes dx_{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{j_s},$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x_i}(dx_j) = dx_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \delta_{ij}$ und $R_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

- (3) Sind zum Beispiel λ und μ zwei 1-Formen auf U dann ist $\lambda \otimes \mu$ der $(0, 2)$ -Tensor definiert auf Vektorfeldern X, Y durch

$$\lambda \otimes \mu(X, Y) = \lambda(X)\mu(Y) .$$

- (4) Endomorphismen des Tangentialbündels sind $(1, 1)$ -Tensoren, denn für Vektorräume V und W gilt $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$. Der Raum der k -Formen ist ein Unterraum im Raum der $(0, k)$ -Tensoren.

8. ORIENTIERUNGEN

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass eine Orientierung auf einem reellen Vektorraum V die Auswahl einer Äquivalenzklasse von Basen ist. Dabei sind zwei Basen äquivalent, falls die Übergangsmatrix positive Determinante hat. Alternativ kann man sagen, dass zwei Basen $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{w_1, \dots, w_n\}$ von V äquivalent sind, falls

$$v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^* = \lambda w_1^* \wedge \dots \wedge w_n^*$$

für eine positive reelle Zahl λ gilt. Dabei ist $v^* = \langle v, \cdot \rangle$ die zu v gehörende Linearform, definiert bzgl. eines fixierten Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V . Zueinander äquivalente Basen nennt man *gleichorientiert*. Die Basen in einer fixierten Äquivalenzklasse nennt man *positiv orientiert*.

Die Menge aller Basen auf einem reellen Vektorraum V zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen, man hat also genau zwei Äquivalenzklassen. Diese Zerlegung entspricht der Tatsache, dass die Gruppe $GL(V)$ zwei Zusammenhangskomponenten hat, die Mengen der Matrizen mit positiver bzw. negativer Determinante.

Die *Standardorientierung* or_{stand} auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch die Äquivalenzklasse der kanonischen Basis.

Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen zwei orientierten Vektorräumen V und W heißt *orientierungs-erhaltend* falls f Basen der fixierten Orientierung auf V in Basen der fixierten Orientierung auf W überträgt, was äquivalent ist zu $\det(f) > 0$.

Definition 8.1. Eine Orientierung auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Familie $\{or_p\}_{p \in M}$ von Orientierungen auf den Tangentialräumen $T_p M$, so dass ein Atlas $\mathcal{A}$ existiert mit

$$dx_p : (T_p M, or_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, or_{stand})$$

orientierungs-erhaltend für alle $p \in U$ und alle Karten $(U, x) \in \mathcal{A}$. Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, falls eine Orientierung existiert und orientiert, falls eine Orientierung fixiert ist.

Definition 8.2. Eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei orientierten Mannigfaltigkeiten heißt *orientierungs-erhaltend*, falls

$$df_p : (T_p M, or_p) \longrightarrow (T_{f(p)} N, or_{f(p)})$$

für alle $p \in M$ orientierungs-erhaltend ist.

Für die Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit gibt es nun verschiedene äquivalente Kriterien, die im Folgenden vorgestellt werden sollen.

Satz 8.3. Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn ein Atlas existiert, so dass die Jacobi-Matrix aller Kartenwechsel eine positive Determinante hat.

Beweis: Sei zunächst M orientierbar und seien $(U, x), (V, y)$ zwei orientierungs-erhaltende Karten, d.h. die linearen Abbildungen dx_p und dy_p sind orientierungs-erhaltend. Daher ist $dy \circ dx^{-1} = J(y \circ x^{-1})$ eine orientierungs-erhaltende Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Standard-Orientierung. Es folgt, dass die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels positive Determinante hat.

Umgekehrt sei ein Atlas $\mathcal{A}$ gegeben, so dass $\det J(y \circ x^{-1}) > 0$ für alle Karten $(U, x), (V, y)$ in $\mathcal{A}$ gilt. Man definiert die Orientierung in einem Punkt $p \in M$ durch

$$or_p := \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right],$$

d.h. dx ist nach Definition orientierungs-erhaltend. Zu zeigen bleibt, dass diese Orientierung wohldefiniert ist. Sei also (V, y) eine weitere Karte in dem fixierten Atlas $\mathcal{A}$, mit $p \in V$. Dann gilt $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_j = \det J(y \circ x^{-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Nach Voraussetzung ist $\det J(y \circ x^{-1}) > 0$ und damit sind die beiden Basen $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ und $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \right\}$ gleich-orientiert. $\square$

Beispiele: Als einfache Anwendung dieses ersten Kriteriums erhält man die folgenden drei Beispiele orientierter Mannigfaltigkeiten.

- (1) Die Sphäre S^n ist orientierbar.
- (2) Der Totalraum TM einer Mannigfaltigkeit M ist orientierbar.
- (3) Sind zwei Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 orientierbar, so auch $M_1 \times M_2$.
- (4) Komplexe Mannigfaltigkeiten sind orientierbar.

Komplexe Mannigfaltigkeiten sind dabei topologische Mannigfaltigkeiten, die Karten in $\mathbb{C}^n$ haben, für die die Kartenwechsel biholomorphe Abbildungen sind. Die komplex projektiven Räume sind Beispiele kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten.

Ein weiteres, besonders praktisches, Kriterium für Orientierbarkeit lässt sich mit Hilfe von n -Formen formulieren.

Definition 8.4. Eine Volumenform auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine n -Form $\omega \in \Omega^n(M)$ ohne Nullstellen, d.h. $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$.

Ein Geradenbündel ist genau dann trivial, wenn ein Schnitt ohne Nullstellen existiert. Die Existenz einer Volumenform, lässt sich also äquivalent auch folgendermassen formulieren.

Lemma 8.5. Auf M^n existiert genau dann eine Volumenform, wenn das Geradenbündel $\Lambda^n T^*M$ trivial ist, d.h. isomorph ist zum trivialen Geradenbündel $M \times \mathbb{R}$.

Beweis: Das Geradenbündel $\Lambda^n T^*M$ sei trivial und $\Phi : \Lambda^n T^*M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ sei ein entsprechender Bündelisomorphismus. Dann definiert man eine Volumenform ω auf M durch $\omega(p) := \Phi^{-1}(p, 1)$. Umgekehrt sei ω eine Volumenform auf M , dann definiert man den trivialisierenden Isomorphismus Φ durch $\Phi(\alpha) := (p, f(p))$, wobei $\alpha \in \Lambda^n T_p^*M$ und $\alpha = f(p)\omega$. $\square$

Satz 8.6. *Eine Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn auf M eine Volumenform existiert.*

Beweis: Sei ω eine Volumenform auf M . Dann existiert für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U, x) mit $p \in U$ und

$$(7) \quad \omega|_U = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{mit} \quad f \in C^\infty(U), f > 0.$$

Sei (U, x) eine beliebige Karte um p , o.B.d.A. kann man annehmen, dass U zusammenhängend ist. Die Volumenform $\omega|_U$ schreibt sich als $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ für eine glatte Funktion f . Da ω auf U keine Nullstellen hat, gilt dies auch für f . Damit gilt $f > 0$ oder $f < 0$ auf ganz U . Im zweiten Fall definiert man eine neue Karte $(U, \tilde{x})$ mit $\tilde{x}(p) := (x_2(p), x_1(p), x_3(p), \dots, x_n(p))$. Bzgl. der neuen Karte hat ω dann eine positive Koeffizientenfunktion auf U .

Seien nun (U, x) und (V, y) zwei Karten um p , die die Bedingung aus (7) erfüllen, dann hat die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels eine positive Determinante. Um das zu zeigen, betrachtet man die Form ω auf $U \cap V$. Dann gilt

$$\omega|_{U \cap V} = f_1 dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = f_2 dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \quad \text{mit} \quad f_1, f_2 > 0.$$

Ausserdem gilt: $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = \det J(y x^{-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{f_1}{f_2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ und es folgt, dass die Determinante der Jacobi-Matrix des Kartenwechsels positiv ist. Damit ist die Mannigfaltigkeit M orientierbar.

Sei jetzt umkehrt M eine orientierbare Mannigfaltigkeit und $\{U_i, \Psi_i\}$ ein Atlas für M mit $\det J(\Psi_i \Psi_j^{-1}) > 0$. Auf jeder offenen Menge $\Psi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ betrachtet man die Standard-Volumenform $\omega_0 := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Sei $\{\varphi_i\}$ eine der Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, d.h. φ_i sind glatte Funktionen auf M mit

- (1) $\varphi_i(x) \in [0, 1]$ für alle i und alle $x \in M$
- (2) $\text{supp}(\varphi_i) \subset U_i$
- (3) Für alle $x \in M$ existiert eine Umgebung V_x von x , so dass φ_i eingeschränkt auf V_x nur für endlich viele i nicht identisch Null ist.
- (4) $\sum \varphi_i \equiv 1$

Dann definiert man eine n -Form ω durch $\omega := \sum \varphi_i \Psi_i^* \omega_0$. Diese Form ist die gesuchte Volumenform. Offensichtlich ist ω global definiert. Um zu zeigen, dass ω keine Nullstellen hat, betrachtet man ω auf einer Kartenumgebung U_k . Dort berechnet man

$$\begin{aligned} (\Psi_k^{-1})^* \omega &= \sum \varphi_i \circ \Psi_k^{-1} \cdot (\Psi_k^{-1})^* \Psi_i^* \omega_0 = \sum \varphi_i \circ \Psi_k^{-1} \cdot (\Psi_i \Psi_k^{-1})^* \omega_0 \\ &= \sum \varphi_i \circ \Psi_k^{-1} \cdot \det J(\Psi_i \Psi_k^{-1}) \omega_0 \\ &= f \omega_0 \quad \text{mit} \quad f > 0, \end{aligned}$$

denn die Koeffizienten $\det J(\Psi_i \Psi_k^{-1})$ sind nach Voraussetzung positiv und die Koeffizienten $\varphi_i \circ \Psi_k^{-1}$ sind nicht-negativ, wobei wenigstens der Term $\varphi_k \circ \Psi_k^{-1}$ nicht identisch Null ist, da $\text{supp } \varphi_k \subset U_k$. Insgesamt folgt also, dass $f = \sum \varphi_i \circ \Psi_k^{-1} \cdot \det J(\Psi_i \Psi_k^{-1})$ positiv ist. $\square$

Beispiele: Als Anwendung des zweiten Kriteriums zeigt man zum Beispiel die Orientierbarkeit folgender Mannigfaltigkeiten.

- (1) Jede Lie Gruppe ist orientierbar. Man wählt eine Basis $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ in $\mathfrak{g}^* = T_e^*G$ und definiert dann in $g \in G$ eine n -Form durch

$$\omega_g := r_g^*(\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_n) .$$

Offensichtlich ist ω eine global definierte Form ohne Nullstellen, also eine Volumenform, die eine Orientierung auf G definiert.

- (2) Parallelisierbare Mannigfaltigkeiten, also Mannigfaltigkeiten mit trivialem Tangentialbündel sind orientierbar. Ist das Tangentialbündel trivial so ist es offensichtlich auch jedes k -Formenbündel und damit existiert wieder eine Volumenform.
- (3) Auf der Sphäre läßt sich leicht eine explizite Volumenform hinschreiben. Ist $p \in S^n$ und $v_1, \dots, v_n \in T_p S^n = p^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Dann definiert man

$$\Omega_p(v_1, \dots, v_n) := \det(p, v_1, \dots, v_n) .$$

Wählt man die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ als Ergänzung von p zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n+1}$, dann ist der Wert von Ω_p auf diesen Vektoren gleich ± 1 und Ω ist damit eine Volumenform auf S^n .

Bemerkung: Seien M, N orientierte Mannigfaltigkeiten mit Volumenformen vol_M und vol_N . Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist genau dann orientierungs-erhaltend wenn

$$f^* vol_N = \lambda vol_M$$

für eine positive Funktion $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Beispiel: Sei Ω die in (3) angegebene Volumenform der Sphäre S^n und sei $\tau : S^n \rightarrow S^n$ die antipodale Abbildung $\tau(x) = -x$. Dann zeigt man $\tau^* \Omega = (-1)^{n+1} \Omega$, d.h. $\tau : S^n \rightarrow S^n$ ist genau dann orientierungs-erhaltend, wenn n ungerade ist.

Es soll nun geklärt werden, welche reell-projektiven Räume orientierbar sind. Dafür betrachtet man folgende etwas allgemeinere Situation. Sei $\tau : N \rightarrow N$ eine fixpunktfreie Involution, d.h. es gilt $\tau(p) \neq p$ für alle $p \in N$ und $\tau^2 = \text{id}_N$. Dann ist der Quotientenraum $M = N/\tau$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Die differenzierbare Struktur ist eindeutig durch die Bedingung bestimmt, dass die kanonische Projektion $\pi : N \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Der Beweis ist analog zur entsprechenden Aussage für den reell projektiven Raum, der ein Spezialfall dieser Situation ist. Hier ist $N = S^n$ und die Involution τ ist die antipodale Abbildung $\tau : S^n \rightarrow S^n, x \mapsto -x$, mit $\mathbb{R}P^n = S^n/\tau$.

Satz 8.7. *Sei N eine orientierbare Mannigfaltigkeit und sei $\tau : N \rightarrow N$ eine fixpunktfreie Involution. Dann ist $M = N/\tau$ genau dann orientierbar, wenn τ orientierungs-erhaltend ist.*

Beweis: Der Quotient $M = N/\tau$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und die kanonische Projektion $\pi : N \rightarrow N/\tau$ ist ein lokaler Diffeomorphismus. Die fixpunktfreie Involution τ induziert eine Involution $\tau^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(N)$. Das liefert eine Aufspaltung

$$\Omega^*(N) = \Omega_+^*(N) \oplus \Omega_-^*(N) ,$$

wobei $\Omega_\pm^*(N)$ die (± 1) -Eigenräume von τ^* sind, d.h. $\Omega_\pm^*(N) := \{\alpha \in \Omega^*(N) \mid \tau^*\alpha = \pm\alpha\}$.

Behauptung: Die induzierte Abbildung $\pi^* : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega_+^*(N)$ ist ein Isomorphismus, wobei $\pi : N \rightarrow M = N/\tau$ die kanonische Projektion ist.

Die Aussage des Satzes ist nun eine direkte Konsequenz dieser Behauptung. Dies soll zunächst gezeigt werden: Sei ω eine Volumenform auf N . Dann ist τ genau dann orientierungs-erhaltend, wenn $\tau^*\omega = \omega$ gilt, d.h. wenn ω in $\Omega_+^*(N)$ liegt. Nach der Behauptung existiert dann eine n -Form $\hat{\omega} \in \Omega^n(M)$ mit $\omega = \pi^*\hat{\omega}$. Da π ein lokaler Diffeomorphismus ist, folgt aus dieser Gleichung, dass ω genau dann keine Nullstellen besitzt, wenn $\hat{\omega}$ keine Nullstellen hat. Die Form ω ist eine Volumenform auf N und damit ist $\hat{\omega}$ eine Volumenform auf M .

Umgekehrt sei $\hat{\omega}$ eine Volumenform auf M . Aus der Behauptung folgt, dass ein $\omega \in \Omega_+^*(N)$ existiert mit $\omega = \pi^*\hat{\omega}$. In diesem Fall hat ω keine Nullstellen, ist also eine Volumenform auf N . Andererseits gilt $\tau^*\omega = \omega$ und damit ist τ orientierungs-erhaltend.

Beweis der Behauptung: Die kanonische Projektion π ist ein lokaler Diffeomorphismus. Weiter ist $\pi^{-1} = \{z, \tau(z)\}$ und $\pi \circ \tau = \pi$. Es folgt, dass $d\pi_z : T_z N \rightarrow T_{\pi(z)} M$ ein Isomorphismus ist, insbesondere ist $d\pi_z$ surjektiv. Damit ist $(d\pi_z)^* : \Lambda^k T_{\pi(z)} M \rightarrow \Lambda^k T_z N$ injektiv, also ist $\pi^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(N)$ injektiv. Es gilt: $\tau^* \circ \pi^* = \pi^*$ und daher $\text{Im}(\pi^*) \subset \Omega_+^k(N)$. Also ist $\pi^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega_+^k(N)$ injektiv.

Zu zeigen bleibt, dass π^* surjektiv ist, d.h. zu einem gegebenen $\Phi \in \Omega_+^k(N)$ muss man ein $\Psi \in \Omega^k(M)$ konstruieren mit $\pi^*\Psi = \Phi$. Zu jedem $x \in M$ existiert ein $\Psi_x \in \Lambda^k T_x M$ mit $(d\pi_z)^*\Psi_x = \Phi_z$. Denn $d\pi$ ist punktweise ein Isomorphismus. Ausserdem gilt die Gleichung $(d\pi_{\tau(z)})^*\Psi_x = \Phi_{\tau(z)}$, d.h. die Form Ψ_x ist wohl-definiert. Tatsächlich folgt aus $\tau^*\Phi = \Phi$ auch die folgende Beziehung

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau(z)} &= (\tau^*\Phi)_{\tau(z)} = (d\tau_{\tau(z)})^*\Phi_z = (d\tau_{\tau(z)})^* \circ (d\pi_z)^*\Psi_x \\ &= (d\pi_z \circ d\tau_{\tau(z)})^*\Psi_x = (d\pi_{\tau(z)})^*\Psi_x . \end{aligned}$$

Da π ein lokaler Diffeomorphismus ist existiert eine offene Menge $V \subset N$, so dass die Einschränkung $\pi|_V : V \subset N \rightarrow U = \pi(V) \subset M$ ein Diffeomorphismus ist. Damit folgt $\Psi = (\pi^*|_V)^{-1}\Phi$ auf U . Also ist Ψ glatt und nach Konstruktion gilt $\pi^*\Psi = \Phi$, d.h. $\Phi \in \text{Im} \pi^*$, womit der Beweis der Behauptung abgeschlossen ist. □

Folgerung 8.8. *Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.*

Beweis: Der reell-projektive Raum ist der Quotient S^n/τ , wobei τ die antipodale Abbildung ist, also eine Involution. Wie gesehen, ist die antipodale Abbildung genau dann orientierungserhaltend, wenn n ungerade ist und nach dem Satz ist das genau der Fall, in dem $\mathbb{R}P^n$ orientierbar ist. $\square$

Zum Schluss dieses Abschnitts soll noch ein drittes Kriterium für Orientierbarkeit bewiesen werden, welches auf eine topologische Bedingung führt.

Satz 8.9. *Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn die Menge $\Lambda^n T^*M \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$ zwei Zusammenhangskomponenten besitzt. Der Nullschnitt eines Vektorbündels ist dabei die Menge aller Nullvektoren der einzelnen Fasern, betrachtet als Teilmenge im Totalraum des Bündels.*

Beweis: Zuerst sei vorausgesetzt, dass $\Lambda^n T^*M \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$ zwei Zusammenhangskomponenten besitzt. Sei Λ eine dieser Komponenten. Man definiert eine Teilmenge $\mathcal{A}$ von Karten dadurch, dass (V, y) genau dann in $\mathcal{A}$ liegt, wenn $(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n)_p \in \Lambda$ für alle $p \in V$. Seien $(U, x), (V, y)$ zwei Karten in $\mathcal{A}$ mit $p \in U \cap V$. Dann gilt

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)_p = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)\right) (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n)_p \quad \text{mit} \quad \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)\right) > 0 .$$

Denn der Durchschnitt $\Lambda \cap \Lambda^n T_p^*M$ ist genau eine der beiden Zusammenhangskomponenten der Menge $\Lambda^n T_p^*M \setminus \{0\}$ und alle n -Formen in der jeweiligen Komponente unterscheiden sich durch ein positives Vielfaches. Daher ist M orientierbar.

Umgekehrt sei jetzt M als orientierbar vorausgesetzt. Dann existiert eine Volumenform ω . Man definiert

$$\Lambda^\pm := \bigcup_{p \in M} \{a \omega_p \mid a \in \mathbb{R}, \pm a > 0\} .$$

Dann ist offensichtlich $\Lambda^n T^*M \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$ die disjunkte Vereinigung der beiden offenen Mengen $\Lambda^\pm$, die dann die beiden Zusammenhangskomponenten von $\Lambda^n T^*M \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$ sind, da $\Lambda^\pm$ offen und zusammenhängend sind.

Alternativ könnte man noch so argumentieren: Ist M orientierbar, dann existiert ein Isomorphismus $\Lambda^n T^*M \cong M \times \mathbb{R}$ und daher $\Lambda^n T^*M \setminus \{\text{Nullschnitt}\} \cong (M \times \mathbb{R}_+) \dot{\cup} (M \times \mathbb{R}_-)$. $\square$

Auf der Menge $\Lambda^n T^*M \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$ führt man eine Äquivalenzrelation ein. Man sagt, zwei n -Formen α und β sind äquivalent falls eine positive reelle Zahl λ existiert mit $\alpha = \lambda\beta$. Insbesondere liegen dann α und β in der gleichen Faser über M . Man definiert dann $\tilde{M}$ als den Quotientenraum

$$\tilde{M} = (\Lambda^n T^*M \setminus \{\text{Nullschnitt}\})/\sim .$$

Satz 8.10. *Die Menge $\tilde{M}$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Weiter gilt:*

- (1) *Die Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ ist orientierbar.*
- (2) *Die kanonische Projektion $\tilde{M} \rightarrow M$ ist eine 2-fache Überlagerung (die Orientierungsüberlagerung von M).*
- (3) *Die Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn die Orientierungsüberlagerung trivial, also $\tilde{M}$ diffeomorph zu $M \times \mathbb{Z}_2$ ist.*

Folgerung 8.11. *Einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten sind orientierbar.*

Beweis: Überlagerungen von einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten sind trivial. □

Bemerkungen:

- (1) Die Orientierungsüberlagerung $\tilde{M}$ ist die Menge aller Orientierungen aller Tangentialräume. Die 2-elementige Menge $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ entspricht den beiden Orientierungen auf dem Vektorraum $T_p M$.
- (2) Eine Orientierung auf M ist ein Schnitt in dem Bündel $\tilde{M} \rightarrow M$, also eine glatte Abbildung $M \rightarrow \tilde{M}$, die jedem p eine Orientierung auf $T_p M$ zuordnet.
- (3) Bis auf Übergang zur Orientierungsüberlagerung $\tilde{M}$, kann man also immer annehmen, dass eine Mannigfaltigkeit orientierbar ist.

Weitere Bemerkungen:

- (1) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dann ist M genau dann orientierbar, wenn ein glattes Normalenfeld N ohne Nullstellen existiert., d.h.

$$T_{f(p)}\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} N_p \oplus df_p(T_p M)\},$$

wobei f die Inklusionsabbildung oder Immersion bezeichnet.

- (2) Sei c ein regulärer Wert einer differenzierbaren Abbildung $f : M \rightarrow N$. Ist M orientierbar, dann ist auch die Mannigfaltigkeit $M_0 := f^{-1}(c)$ orientierbar.

9. INTEGRATION AUF MANNIGFALTIGKEITEN

Man überträgt mittels Karten die übliche Integration von $\mathbb{R}^n$ auf eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dazu sei M eine glatte orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Karten (U, Ψ_U) . Sei $\omega \in \Omega_c^n(M)$ eine n -Form auf M mit kompakten Träger. Es sei zunächst angenommen, dass der Träger von ω ganz in einer Kartenumgebung U liegt. Man schreibt $f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = (\Psi_U^{-1})^* \omega$ für die lokale Form von ω auf $\Psi_U(U) \subset \mathbb{R}^n$, dabei sind $x_1, \dots, x_n$ die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^n$. Man definiert dann

$$\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^n} (\Psi_U^{-1})^* \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Zu zeigen bleibt, dass diese Definition nicht von der Wahl der Karten abhängt. Dazu sei V eine weitere Kartenumgebung, die den Träger von ω enthält und sei $g(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = (\Psi_V^{-1})^* \omega$. Offensichtlich ist $(\Psi_V)^*(g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (\Psi_U)^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$ auf $U \cap V$. Bezeichnet man mit $\Phi = \Psi_V \circ \Psi_U^{-1}$ den Kartenwechsel, dann folgt

$$\begin{aligned} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n &= \Phi^*(g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (g \circ \Phi) d\Phi_1 \wedge \dots \wedge d\Phi_n \\ &= (g \circ \Phi) \det J(\Phi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n . \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite hat man die Transformationsformel für die Integration in $\mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} (g \circ \Phi) |\det J(\Phi)| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Da M als orientierbar vorausgesetzt wurde, kann man einen Atlas finden, in dem die Jacobi-Matrizen der Kartenwechsel positive Determinante haben, dh. man kann $\det J(\Phi) > 0$ voraussetzen und erhält damit: $\int_{\mathbb{R}^n} (\Psi_U^{-1})^* \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\Psi_V^{-1})^* \omega$, was zu zeigen war.

Liegt der Träger von ω nicht in einer Kartenumgebung, braucht man eine Zerlegung der Eins. Sei also $\{\varphi_i\}$ eine Zerlegung der Eins, die der Überdeckung durch die Kartenumgebungen untergeordnet ist. Dann definiert man:

$$\int_M \omega := \sum_i \varphi_i \cdot \omega .$$

Nach der Definition der Zerlegung der Eins und da ω kompakten Träger hat, ist diese Summe endlich. Man zeigt leicht, dass die Definition nicht von der Wahl der Zerlegung der Eins abhängt.

Satz 9.1 (Satz von Stokes). *Sei M eine orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit und sei ω eine $(n-1)$ -Form mit kompakten Träger auf M . Dann gilt*

$$\int_M d\omega = 0 .$$

Beweis: Man betrachtet als erstes den Fall $M = \mathbb{R}^n$ und eine $(n-1)$ -Form ω mit kompaktem Träger in einer Menge der Form $[-N, N]^n$. Lokal schreibt sich jede solche $(n-1)$ -Form ω als $\omega = \sum (-1)^{i+1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Aus dem Satz von Fubini folgt, dass jeder Summand auf der rechten Seite verschwindet, z.B. hat man für $i = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n &= \int_{[-N, N]^{n-1}} \left(\int_{-N}^N \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{[-N, N]^{n-1}} (f_1(N, x_2, \dots, x_n) - f_1(-N, x_2, \dots, x_n)) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt $f_1(\pm N, x_2, \dots, x_n) = 0$, da der Träger der Koeffizientenfunktionen f_j für $j = 1, \dots, n$ in der Menge $[-N, N]^n$ liegt.

Sei nun ω eine Form auf M , deren Träger ganz in einer Kartenumgebung U für eine Karte (U, Φ_U) liegt, dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\Psi_U^{-1})^* d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} d(\Psi_U^{-1})^* \omega = 0 .$$

Dabei kann man die Karten o.B.d.A. so wählen, dass $\Psi_U(U)$ in einer Menge $[-N, N]^n$ liegt.

Im allgemeinen Fall sei nun $\{\varphi_i\}$ eine der Kartenüberdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_i \int_M \varphi_i \cdot d\omega = \sum_i \int_M (d(\varphi_i \cdot \omega) - d\varphi_i \wedge \omega) = - \sum_i \int_M d\varphi_i \wedge \omega \\ &= - \int_M (d \sum_i \varphi_i) \wedge \omega = 0 . \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist Null, da $\sum_i \varphi_i = 1$, also konstant. □

Bemerkungen:

- (1) Eigentlich gilt der Satz von Stokes für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Sei ∂M der Rand einer orientierten Mannigfaltigkeit M . Dann gilt $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.
- (2) Sei M^n eine zusammenhängende, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit, dann gilt:

$$H_{dR}^0(M) \cong H_{dR}^n(M) \cong \mathbb{R} .$$

Denn die lineare Abbildung $H_{dR}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}, [\omega] \mapsto \int_M \omega$ ist nach dem Satz von Stokes wohl-definiert und wegen der Existenz einer Volumenform nicht-trivial

- (3) Sei (M, ω) eine kompakte symplektische Mannigfaltigkeit. Dann kann die symplektische Form ω nicht exakt sein.

10. RIEMANNSCHE METRIKEN

10.1. Definition und Existenz Riemannscher Metriken. Das Vektorbündel $\text{Sym}^2 TM$ der symmetrischen Bilinearformen auf M ist definiert als die punktweise disjunkte Vereinigung der Vektorräume $\text{Sym}^2 T_p M := \{b : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \mid b \text{ symmetrische Bilinearform}\}$, d.h. man definiert:

$$\text{Sym}^2 TM := \bigcup_{p \in M} \text{Sym}^2 T_p M \subset T^{0,2}(TM) .$$

Definition 10.1. Eine Riemannsche Metrik auf M ist ein glatter Schnitt $g \in \Gamma(\text{Sym}^2 TM)$, für den g_p für alle $p \in M$ positiv definit ist. Das Paar (M, g) nennt man *Riemannsche Mannigfaltigkeit*.

Bemerkungen:

- (1) Eine Metrik ist ein symmetrischer $(0, 2)$ -Tensor, d.h. eine symmetrische $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilineare Abbildung:

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) ,$$

die punktweise positiv-definit ist.

- (2) Pseudo-Riemannsche Metriken sind nicht-entartete, symmetrische Bilinearformen mit beliebiger Signatur. Lorentz-Metriken sind Metriken der Signatur $(n, 1)$.
- (3) Lokal, also in einer Karte (U, x) , schreibt sich eine Metrik als

$$g = \sum g_{ij} dx_i \otimes dx_j ,$$

wobei sich die Funktionen $g_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ bestimmen durch: $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, d.h. die Metrik ist lokal beschrieben durch die invertierbare Matrix (g_{ij}) .

Metriken sind $(0, 2)$ -Tensoren, haben also folgendes Transformationsverhalten: Seien $(U, x), (V, y)$ zwei Karten um $p \in M$. Dann schreibt sich eine Metrik g auf $U \cap V$ als:

$$g = \sum g_{ij}^x dx_i \otimes dx_j = \sum g_{ij}^y dy_i \otimes dy_j .$$

Setzt man $\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ in die definierende Gleichung für g_{ij}^y ein, erhält man das Transformationsverhalten

$$g_{ij}^y = g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \sum_{k,l} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial y_j} g_{kl}^x .$$

Eine Riemannsche Metrik läßt sich auch beschreiben, als eine Familie von lokalen Funktionen $\{g_{ij}\}$, die dieses Transformationsverhalten bei Kartenwechsel haben und punktweise Skalarprodukte definieren.

Satz 10.2. *Auf jeder Mannigfaltigkeit existiert eine Riemannsche Metrik g .*

Beweis: Sei $\{(U_k, f_k)\}$ ein Atlas von M und $\{\varphi_k\}$ eine der Überdeckung $\{U_k\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann ist $\{U_k\}$ lokal endlich, d.h. jeder Punkt von M hat eine Umgebung, die nur endlich viele offene Mengen U_k schneidet. Weiterhin sei q ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, dann lässt sich dieses lokal auf M zurückziehen. Man definiert nun global

$$g := \sum_k \varphi_k \cdot f_k^* q,$$

wobei die Zurückziehung $f_k^* q$ der Bilinearform q definiert ist durch

$$f_k^* q(X, Y) = q(df_k(X), df_k(Y)) .$$

Aufgrund der Eigenschaften der Zerlegung der Eins ist g wohldefiniert und glatt. Außerdem ist für jedes $p \in M$ die Bilinearform g_p symmetrisch. Es verbleibt zu zeigen, dass g tatsächlich positiv definit ist. Sei $p \in M$, dann existiert ein k_0 , so dass $\varphi_{k_0}(p) \neq 0$ und folglich, gilt für $0 \neq X \in T_p M$

$$\begin{aligned} g_p(X, X) &= \sum_k \varphi_k(p) q(df_k(X), df_k(X)) \\ &\geq \varphi_{k_0}(p) q(df_{k_0}(X), df_{k_0}(X)) > 0 . \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Auf S^2 existiert keine Lorentz-Metrik. Aus deren Existenz würde nämlich die Existenz eines nullstellenfreien Vektorfeldes auf S^2 folgen. Ob eine Lorentz-Metrik existiert, hängt also von der Topologie auf M ab, während eine Riemannsche-Metrik immer existiert.

10.2. Beispiele Riemannscher Metriken.

(1) Auf $\mathbb{R}^n$ induziert das Standard-Skalarprodukt eine Riemannsche Metrik

$$g = \sum dx_i \otimes dx_i = \sum dx_i^2.$$

Im Spezialfall $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinaten (x, y) ist also $g = dx^2 + dy^2$. Führen wir Polarkoordinaten ein durch die Transformation

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

und folglich ist $g = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus L$, mit $L = \{(x, 0) | x < 0\}$.

- (2) Sei (M, g_M) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und durch $i : N \rightarrow M$ eine Untermannigfaltigkeit gegeben. Dann induziert g_M eine Metrik auf N durch

$$g_N = i^* g_M,$$

d.h. $g_N = g_M|_{TN \times TN}$, wobei $TN \subset TM$ wieder als Unterraum identifiziert wird. Betrachte $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so ist $T_p S^n = p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in T_p S^n \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

d.h. g_p ist die Einschränkung des euklidischen Standard-Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Der *Satz von Nash* besagt allgemein, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)(3n+11)}$ ist.

- (3) Auf dem n -dimensionalen hyperbolischen Raum,

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

ist eine Riemannsche Metrik gegeben durch

$$g = \frac{1}{x_n^2} \sum dx_i \otimes dx_i.$$

Alternativ kann man H^n auch als Poincare-Modell betrachten,

$$H^n \cong \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 < 1 \right\},$$

dann ist die Riemannsche Metrik gegeben durch

$$g = \frac{4}{(1 - r^2)^2} \sum dx_i^2, \quad r^2 = \sum x_i^2.$$

- (4) Seien (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, dann ist $M \times N$ mit der Produktmetrik eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Bezeichnen p_1 bzw. p_2 die Projektionen von $M \times N$ auf M bzw. N , dann definiert man die Produktmetrik auf $M \times N$ durch $g_{M \times N} = p_1^* g + p_2^* h$. Unter der Identifikation $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \oplus T_q N$ ist $g_{M \times N} = g \oplus h$, d.h. es gilt $g_{M \times N}(A + X, B + Y) = g(A, B) + h(X, Y)$.
- (5) Sei G eine Lie-Gruppe und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G) = T_e G$. Dann definiert

$$B_g(X, Y) = \langle dl_{g^{-1}}(X), dl_{g^{-1}}(Y) \rangle,$$

eine glatte Metrik auf G . Außerdem ist B linksinvariant, d.h.

$$l_g^* B = B$$

und folglich $l_g \in \text{Iso}(G, B)$ für alle $g \in G$.

- (6) Sei G kompakt und halbeinfach, dann definiert die Killing-Form ein negativ-definites bi-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$:

$$B(X, Y) = -\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Y)) .$$

Man erhält eine bi-invariante Metrik auf G , d.h. Rechts- und Linkstranslationen sind Isometrien.

10.3. Isometrien.

Definition 10.3. Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten und sei $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Man nennt f eine Isometrie, falls f ein Diffeomorphismus ist mit

$$g = f^*h, \quad \text{d.h.} \quad g_p(X, Y) = h_{f(p)}(df(X), df(Y)),$$

d.h. df_p ist eine Isometrie der euklidischen Vektorräume $(T_p M, g_p)$ und $(T_{f(p)} N, h_{f(p)})$.

Bemerkungen:

- (1) id_M ist eine Isometrie.
- (2) Sind f_1 und f_2 Isometrien, dann auch $f_1 \cdot f_2$ und f_1^{-1} . Die Menge der Isometrien bildet also eine Gruppe – sogar eine Lie-Gruppe, die Isometriegruppe $\operatorname{Iso}(M, g)$ von (M, g) .
- (3) Vektorfelder, deren lokaler Fluß aus lokalen Isometrien besteht, d.h.

$$\varphi_t^* g = g, \quad \text{für alle } t, \text{ für die } \varphi_t \text{ definiert ist,}$$

nennt man *Killing Vektorfelder*. Ein Vektorfeld X ist genau dann ein Killing Vektorfeld, wenn $L_X g = 0$ gilt. Wie für jeden Tensor, ist die Lie-Ableitung von g definiert durch

$$L_X g := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* g .$$

Eine Standard-Rechnung ergibt folgende Formel für die Lie-Ableitung eines $(0, 2)$ -Tensors:

$$(L_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])$$

10.4. Mannigfaltigkeiten als metrische Räume. Für alles Weitere sei (M, g) stets eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Mit Hilfe einer Metrik lassen sich Abstände und Winkel definieren, was nun erklärt werden soll. Isometrien sind dann Abbildungen, die diese Größen erhalten.

Definition 10.4. Die Länge einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ist definiert durch

$$L[\gamma] = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

wobei $\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}$.

Bemerkung: Der Abstand zweier Punkte $p, q \in M$ ist definiert als

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} L[\gamma],$$

wobei das Infimum über alle stückweise glatten Kurven γ zu nehmen ist, die p und q verbinden.

Lemma 10.5. Die Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik, d.h.

- (1) d ist symmetrisch,
- (2) d erfüllt die Dreiecksungleichung,
- (3) d ist positiv definit, d.h. $d(p, q) \geq 0$ und $d(p, q) = 0$ genau dann, wenn $p = q$.

Beweis: 1. und 2. sind klar. Es verbleibt die positive Definitheit zu zeigen. Seien dazu $p, q \in M$ mit $d(p, q) = 0$. Angenommen $p \neq q$, dann wählen wir eine Karte (U, x) um p mit $x(p) = 0$ und $O = x^{-1}(B_r(0))$ mit $\bar{O} \subset U$ und $q \notin O$. Man definiert nun eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(a_1, \dots, a_n, p) = \left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\|_g.$$

Dann ist f eine stetige, nichtnegative Funktion und folglich existiert ein $k > 0$, so dass

$$\frac{1}{k} \leq f|_{S^{n-1} \times \bar{O}} \leq k.$$

Sei $\|\cdot\|'$ die Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann gilt für $(a, p) \in S^{n-1} \times O$,

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\|_g' = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} = 1.$$

Somit ist

$$(*) \quad \frac{1}{k} \left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\|_g' \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\|_g \leq k \left\| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\|_g'$$

Da $(*)$ homogen in a_i , folgt, dass $(*)$ auf ganz $\mathbb{R}^n \times \bar{O}$ gilt.

Sei nun γ eine stückweise glatte Kurve von p nach q und γ' sei der Teil von γ bis zum ersten Schnittpunkt mit ∂O , α sei der Radius von O , dann ist

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \inf_{\gamma} L(\gamma) \geq \inf_{\gamma} L(\gamma') \\ &\geq \frac{1}{k} \inf L(\gamma') \\ &\geq \frac{1}{k} \alpha > 0, \end{aligned}$$

wobei $L(\gamma)'$ die Länge bezüglich der durch das Standardskalarprodukt induzierten Norm $\|\cdot\|'$ bezeichnet. $\square$

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und d die induzierte Metrik auf M . Dann definiert d eine Topologie auf M . Die offenen Mengen sind genau die Vereinigungen von d -Bällen der Form

$$B_{\varepsilon}^d(p) := \{q \in M \mid d(p, q) < \varepsilon\}.$$

Eine direkte Konsequenz aus dem Beweis von Lemma 10.5 und insbesondere Ungleichung (*) ist der folgende Satz.

Satz 10.6. *Die durch d induzierte Topologie stimmt mit der ursprünglichen überein.*

10.5. Das kanonische Volumenelement. Sei (M^n, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert auf M eine kanonische Volumenform $\text{vol}_g \in \Omega^n(M)$.

Definition 10.7. *Das kanonische Volumenelement $\text{vol}_g \in \Omega^n(M)$ einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist definiert durch die Festlegung*

$$\text{vol}_g(e_1, \dots, e_n) = 1$$

für alle positiv orientierten Orthonormal-Basen $(e_1, \dots, e_n)$. Das kanonische Volumenelement ist gegeben durch

$$\text{vol}_g = e^1 \wedge \dots \wedge e^n,$$

wobei $(e^1, \dots, e^n)$ die zu $(e_1, \dots, e_n)$ duale Basis bezeichnet, d.h. $e^i := g(e_i, \cdot)$ für $i = 1, \dots, n$.

Lemma 10.8. *Sei (M^n, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

- (1) *Das kanonische Volumenelement ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Orthonormal-Basis.*
- (2) *Sei (U, x) eine Karte der Orientierung und sei $\bar{g} = \det(g_{ij})$. Dann ist vol_g auf U gegeben durch:*

$$\text{vol}_g = \sqrt{\bar{g}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Beweis: Sei $(f_1, \dots, f_n)$ eine andere Orthonormal-Basis der Orientierung und sei A die Übergangsmatrix zur Basis $(e_1, \dots, e_n)$, d.h. $e_i = \sum_j a_{ij} f_j$, dann gilt

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \det A e^1 \wedge \dots \wedge e^n = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$$

denn $A = (a_{ij})$ ist eine orthogonale Matrix und $\det A > 0$, also $\det A = 1$, d.h. das kanonische Volumenelement ist wohldefiniert.

Sei (U, x) eine Karte der Orientierung und sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine fixierte lokale Orthonormal-Basis. Dann existieren lokale Funktionen C_i^k mit $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_k C_i^k e_k$. Daraus folgt, dass

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k C_i^k C_j^k.$$

also $(g_{ij}) = C \cdot C^T$ und damit $\bar{g} = \det(g_{ij}) = \det C \cdot C^T = (\det C)^2$. Die beiden Basen $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ und $\{e_i\}$ sind gleich orientiert und damit ist $\det C = \sqrt{\bar{g}} > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} (e^1 \wedge \dots \wedge e^n)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) &= \sum_{i_1, \dots, i_n} C_1^{i_1} \cdot \dots \cdot C_n^{i_n} \operatorname{vol}_g(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) C_1^{i_1} \cdot \dots \cdot C_n^{i_n} \operatorname{vol}_g(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det C = \sqrt{\bar{g}}. \end{aligned}$$

Dabei durchläuft σ die Permutationen, die $(1, \dots, n)$ auf $(i_1, \dots, i_n)$ schickt. Aus dieser Rechnung folgt dann die Behauptung $e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \sqrt{\bar{g}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. $\square$

Bemerkung: Das kanonische Volumenelement kann man benutzen um auf orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten eine Integration von Funktionen zu definieren. Sei f eine Funktion mit kompaktem Träger, dann definiert man das Integral von f über M als $\int_M f \operatorname{vol}_g$. Insbesondere kann man damit auch ein L^2 -Skalarprodukt von Formen definieren, was im Folgenden erklärt werden soll.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann überträgt sich das in (5) definierte Skalarprodukt von $(T_x M, g_x)$ auf das Bündel der Formen $\Lambda^* T^* M$. Man schreibt wieder g oder auch $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition 10.9. Seien $\alpha, \beta \in \Omega_c^k(M)$ zwei k -Formen mit kompaktem Träger. Dann definiert man das L^2 -Skalarprodukt von α und β durch

$$(\alpha, \beta) := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle \operatorname{vol}_g.$$

11. DIFFERENTIAL-OPERATOREN AUF RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN

11.1. Der Hodge-Stern-Operator. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \text{or})$ ein n -dimensionaler, orientierter, euklidischer Vektorraum. Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine positiv orientierte Orthonormal-Basis von V mit dualer Basis $(e^1, \dots, e^n)$, definiert durch $e^k := \langle e_k, \cdot \rangle$.

Definition 11.1. Der Hodge-Stern-Operator $*$ ist der eindeutig bestimmte Isomorphismus $*$: $\Lambda^p V^* \rightarrow \Lambda^{n-p} V^*$ mit $\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \text{vol}$ für alle $\alpha, \beta \in \Lambda^p V$ und $\text{vol} = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$.

Bemerkung: Auf Basisvektoren von $\Lambda^p V^*$ lässt sich der Hodge-Stern-Operator (kurz: Hodge-Operator) folgendermassen beschreiben:

$$(1) \quad *(e^1 \wedge \dots \wedge e^p) = e^{p+1} \wedge \dots \wedge e^n$$

$$(2) \quad \text{Sei } I = \{i_1, \dots, i_p\} \text{ und sei } I^c \text{ das komplementäre Indextupel } I^c := \{j_1, \dots, j_{n-p}\} = \{1, \dots, n\} \setminus I. \text{ Dann gilt}$$

$$*(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}) = \text{sgn}(I, I^c) e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-p}},$$

wobei $\text{sgn}(I, I^c)$ das Signum der Permutation bezeichnet, die das n -Tupel $(1, \dots, n)$ auf $(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{n-p})$ schickt.

Satz 11.2. Der Hodge-Stern-Operator hat die folgenden Eigenschaften:

$$(1) \quad *1 = \text{vol} \quad \text{und} \quad *\text{vol} = 1$$

$$(2) \quad *^2 = (-1)^{p(n-p)} \text{ auf } p\text{-Formen}$$

$$(3) \quad *X^* = X \lrcorner \text{vol}$$

$$(4) \quad *(X \lrcorner \alpha) = -(-1)^p X^* \wedge * \alpha \text{ und } *(X^* \wedge \alpha) = (-1)^p X \lrcorner * \alpha \quad \text{für } \alpha \in \Lambda^p V^*$$

$$(5) \quad * \text{ ist eine Isometrie bzgl. des von } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ induzierten Skalarproduktes auf } \Lambda^* V^*.$$

Beweis: Da $*$ offensichtlich eine lineare Abbildung ist, genügt es die Aussagen auf Basis-elementen zu überprüfen. Die Behauptungen folgen dann unmittelbar aus der Definition. $\square$

Sei (M^n, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann erweitert sich der punktweise definierte Hodge-Stern-Operator $*$: $\Lambda^p T_x^* M \rightarrow \Lambda^{n-p} T_x^* M$ zu einem Bündelisomorphismus $*$: $\Lambda^p T^* M \rightarrow \Lambda^{n-p} T^* M$ mit den gleichen Eigenschaften. Mit Hilfe des Hodge-Stern-Operators kann das L^2 -Skalarprodukt von Formen geschrieben werden als $(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta$.

11.2. Der Gradient.

Definition 11.3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann ist das Gradienten-Vektorfeld $\text{grad } f \in \chi(M)$ definiert durch $g(\text{grad } f, X) = df(X)$ für alle Vektorfelder X , d.h. es gilt $df = (\text{grad } f)^*$.

Lemma 11.4. In lokalen Koordinaten (U, x) schreibt sich das Gradienten Vektorfeld als

$$\text{grad } f = \sum_{j,k} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

wobei die Metrik lokal durch $g = (g_{ij})$ gegeben ist, mit inverser Matrix $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$.

Beweis: Das Gradienten Vektorfeld schreibt sich lokal als $\text{grad } f = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ mit Funktionen $a_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Aus der Definition folgt $g(\text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Setzt man hier den Ansatz für $\text{grad } f$ ein, so folgt $\sum_i a_i g_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Multipliziert man mit den Koeffizienten der inversen Matrix (g^{ij}) , so erhält man $a_k = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{jk}$, was die Behauptung beweist. $\square$

11.3. Das Kodifferential.

Definition 11.5. Das Kodifferential ist ein Operator $d^* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$, definiert auf $\Omega^p(M)$ durch

$$d^* := (-1)^{n(p+1)+1} * d *$$

Satz 11.6. Das Kodifferential d^* ist der zum Differential d formal adjungierte Operator auf $\Omega^p(M)$, d.h. es gilt: $(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta)$ für alle Formen $\alpha \in \Omega_c^p(M)$ und $\beta \in \Omega_c^{p+1}(M)$ mit kompaktem Träger.

Beweis: O.B.d.A. sei $\alpha \in \Omega_c^{p-1}(M)$ und $\beta \in \Omega_c^p(M)$, dann gilt

$$d(\alpha \wedge * \beta) = d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d * \beta = d\alpha \wedge * \beta - \alpha \wedge * d^* \beta.$$

Denn $- * d^* \beta = * (-1)^{n(p+1)} *^2 d * = (-1)^{n(p+1)+(n-p+1)(p-1)} d *$ und um das Vorzeichen zu bestimmen rechnet man modulo zwei:

$$n(p+1)+(n-p+1)(p-1) = n(p+1)+(n-p)(p+1)+(p-1) = (2n-p)(p+1)+(p-1) = p-1.$$

Mit dem Satz von Stokes folgt dann nach Integration

$$0 = \int_M d(\alpha \wedge * \beta) = \int_M d\alpha \wedge * \beta - \int_M \alpha \wedge * d^* \beta = (d\alpha, \beta) - (\alpha, d^* \beta).$$

$\square$

Bemerkung: Wie für das Differential d verschwindet auch die Hintereinanderausführung des Kodifferentials, d.h. es gilt $(d^*)^2 = 0$, was direkt aus $d^2 = 0$ und $*^2 = \pm \text{id}$ folgt.

Als einen Spezialfall des Kodifferentials hat man die Divergenz eines Vektorfeldes.

Definition 11.7. Die Divergenz eines Vektorfeldes X ist die Funktion $\operatorname{div} X$, definiert durch

$$\operatorname{div} X = -d^* X^* = * d * X^* .$$

Satz 11.8. Sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei X ein Vektorfeld auf M , dann gilt:

$$L_X \operatorname{vol}_g = \operatorname{div} X \cdot \operatorname{vol}_g .$$

Insbesondere ist der Fluß divergenz-freier Vektorfelder volumen-erhaltend.

Beweis: Aus Gradgründen ist $d\operatorname{vol}_g = 0$ und somit folgt aus der Cartan-Formel:

$$L_X \operatorname{vol}_g = d(X \lrcorner \operatorname{vol}_g) = d * X^* .$$

Wendet man auf diese Gleichung den Hodge-Stern-Operator an und nutzt, dass $*^2 = \operatorname{id}$ auf Λ^n gilt, so folgt

$$* L_X \operatorname{vol}_g = * d * X^* = \operatorname{div} X = *(\operatorname{div} X \cdot \operatorname{vol}_g) ,$$

woraus sich die Behauptung ergibt, da der Hodge-Stern-Operator eine Isometrie ist. $\square$

Folgerung 11.9 (Satz von Green). Sei (M, g) eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gilt für beliebige Vektorfelder X :

$$\int_M \operatorname{div}(X) \operatorname{vol}_g = 0 .$$

Beweis: Aus dem Satz von Stokes und dem Beweis von Satz 11.8 folgt:

$$\int_M \operatorname{div}(X) \operatorname{vol}_g = \int_M d * X^* = 0 .$$

$\square$

Bemerkung: In lokalen Koordinaten (U, x) schreibt sich die Divergenz eines Vektorfeldes X als

$$\operatorname{div} X = \bar{g}^{-\frac{1}{2}} \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\bar{g}} a_i)$$

wobei das Vektorfeld auf U gegeben ist als $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\bar{g} = \det(g_{ij})$.

11.4. Der Laplace Operator.

Definition 11.10. Der Laplace-Operator Δ auf $\Omega^p(M)$ ist definiert durch $\Delta = d d^* + d^* d$.

Bemerkung: Auf Funktionen $f \in C^\infty(M)$ schreibt sich der Laplace-Operator als

$$\Delta f = d^* d f = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

und speziell für $M = \mathbb{R}^n$ mit der Standard-Metrik gilt

$$\Delta f = - \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Lemma 11.11. Der Laplace-Operator kommutiert mit dem Hodge-Stern-Operator, d.h.

$$*\Delta = \Delta*.$$

Beweis: Die Aussage folgt aus der Definition des Kodifferentials mit Hilfe des Hodge-Stern-Operators und der Eigenschaft, dass $*^2 = (-1)^{p(n-p)} \operatorname{id}$ auf p -Formen gilt. $\square$

Satz 11.12. Der Laplace-Operator ist formal selbst-adjungiert, d.h. für Formen $\alpha, \beta \in \Omega_c^p(M)$ mit kompakten Träger gilt

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta).$$

Beweis: Die Behauptung folgt daraus, dass d^* formal-adjungiert zu d ist, denn damit gilt

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha, \beta) &= (d^* d\alpha, \beta) + (d d^* \alpha, \beta) = (d\alpha, d\beta) + (d^* \alpha, d^* \beta) = (\alpha, d^* d\beta) + (\alpha, d d^* \beta) \\ &= (\alpha, \Delta\beta). \end{aligned}$$

$\square$

Satz 11.13. Auf kompakten orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist der Laplace-Operator ein nicht-negativer Operator, d.h. $(\Delta\alpha, \alpha) \geq 0$ für alle α und es gilt $\Delta\alpha = 0$ genau dann, wenn $d\alpha = 0 = d^* \alpha$.

Beweis: Es gilt $(\Delta\alpha, \alpha) = (d^* d\alpha, \alpha) + (d d^* \alpha, \alpha) = \|d\alpha\|^2 + \|d^* \alpha\|^2 \geq 0$, mit Gleichheit genau dann, wenn $\|d\alpha\|^2 = \|d^* \alpha\|^2 = 0$ und damit $d\alpha = 0$ und $d^* \alpha = 0$. $\square$

Bemerkungen:

- (1) Formen im Kern von Δ nennt man *harmonisch*. Man schreibt $\mathcal{H}^p(M)$ für den Raum der harmonischen p -Formen auf M .
- (2) Die einzigen harmonischen Funktionen auf kompakten, zusammenhängenden, orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten sind die Konstanten.
- (3) $\Delta = (d + d^*)^2$ und $\operatorname{Ker} \Delta = \operatorname{Ker}(d + d^*)$ auf kompakten Mannigfaltigkeiten

- (4) Der Laplace-Operator Δ ist ein elliptischer Differential-Operator, d.h. Δ hat ein invertierbares Hauptsymbol.

12. DAS HODGE-THEOREM

In diesem Abschnitt sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Darstellung hier folgt dem Buch von F. Warner, "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups". Die ausgelassenen Beweise sind dort zu finden.

12.1. Schwache Lösungen. Ziel ist es, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung $\Delta\omega = \alpha$ herzuleiten. Sei also ω eine Lösung der Gleichung, also $\Delta\omega = \alpha$, dann folgt für alle Formen $\varphi \in \Omega^p(M)$:

$$(\Delta\omega, \varphi) = (\alpha, \varphi) \quad \text{und damit} \quad (\omega, \Delta\varphi) = (\alpha, \varphi).$$

Lösungen von $\Delta\omega = \alpha$ kann man also auffassen als lineare Funktionale auf $\Omega^p(M)$. Jede Form ω definiert ein beschränktes lineares Funktional $\Phi : \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, durch $\Phi(\beta) := (\omega, \beta)$ und aus der gerade gemachten Rechnung folgt $\Phi(\Delta\varphi) = (\alpha, \varphi)$ für alle $\varphi \in \Omega^p(M)$.

Definition 12.1. Eine schwache Lösung der Gleichung $\Delta\omega = \alpha$ ist ein beschränktes lineares Funktional $\Phi : \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(\Delta\varphi) = (\alpha, \varphi)$ für alle $\varphi \in \Omega^p(M)$.

Zu zeigen ist jetzt, dass eine schwache Lösung eine Lösung im herkömmlichen Sinne ist. Dazu zeigt man, dass schwache Lösung sich darstellen lassen durch glatte Formen, d.h. dass eine Form $\omega \in \Omega^p(M)$ existiert mit $\Phi(\beta) = (\omega, \beta)$ für alle $\beta \in \Omega^p(M)$. In diesem Falle folgt dann, dass ω auch eine Lösung im herkömmlichen Sinne ist. Denn

$$(\Delta\omega, \beta) = (\omega, \Delta\beta) = \Phi(\Delta\beta) = (\alpha, \beta)$$

für alle $\beta \in \Omega^p(M)$ und daher folgt, $\Delta\omega = \alpha$.

Satz 12.2 (elliptische Regularität). Sei $\alpha \in \Omega^p(M)$ und sei Φ eine schwache Lösung von $\Delta\omega = \alpha$. Dann existiert ein $\omega \in \Omega^p(M)$ mit $\Phi(\beta) = (\omega, \beta)$ für alle $\beta \in \Omega^p(M)$. Damit ist ω eine Lösung im herkömmlichen Sinne, d.h. es gilt $\Delta\omega = \alpha$.

Beweis: siehe Warner □

Satz 12.3. Sei $\{\alpha_n\}$ eine Folge in $\Omega^p(M)$ mit $\|\alpha_n\| < c$ und $\|\Delta\alpha_n\| \leq c$ für alle n und ein $c > 0$. Dann existiert eine Teilfolge von $\{\alpha_n\}$, die eine Cauchy-Folge in $\Omega^p(M)$ ist.

Beweis: siehe Warner □

12.2. Die Hodge-Zerlegung.

Satz 12.4 (Hodge-Zerlegung). *Sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist der Raum $\mathcal{H}^p(M)$ der harmonischen p -Formen endlich-dimensional. Weiter gilt die folgende orthogonale direkte Summen-Zerlegung:*

$$\begin{aligned}\Omega^p(M) &= \operatorname{Im}(\Delta) \oplus \operatorname{Ker}(\Delta) = \Delta(\Omega^p(M)) \oplus \mathcal{H}^p(M) \\ &= dd^*(\Omega^p) \oplus d^*d(\Omega^p) \oplus \mathcal{H}^p(M) , \\ &= d(\Omega^{p-1}) \oplus d^*(\Omega^{p+1}) \oplus \mathcal{H}^p(M) .\end{aligned}$$

Insbesondere hat die Gleichung $\Delta\omega = \alpha$, für gegebenes $\alpha \in \Omega^p(M)$, genau dann eine Lösung $\omega \in \Omega^p(M)$, wenn α orthogonal zu $\mathcal{H}^p(M)$ ist. Die Lösung ist dann eindeutig bestimmt.

Beweis: Annahme: der Raum der harmonischen p -Formen $\mathcal{H}^p(M)$ sei unendlich-dimensional. Dann existiert eine ortho-normale Folge in $\mathcal{H}^p(M)$. Nach Satz 12.3 existiert dann aber in dieser Folge eine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist, was nicht möglich ist, also einen Widerspruch liefert.

Es genügt die erste Zerlegung zu beweisen, die anderen beiden folgen dann mit einfachen Argumenten (siehe unten). Sei $\omega_1, \dots, \omega_r$ eine Orthonormal-Basis in $\mathcal{H}^p(M)$. Eine beliebige Form $\alpha \in \Omega^p(M)$ schreibt sich dann als $\alpha = \beta + \sum (\alpha, \omega_i) \omega_i$ mit $\beta \perp \mathcal{H}^p(M)$. Daher hat man eine orthogonale direkte Summen-Zerlegung $\Omega^p(M) = (\mathcal{H}^p(M))^\perp \oplus \mathcal{H}^p(M)$. Es bezeichne $H : \Omega^p(M) \rightarrow \mathcal{H}^p(M)$ die Projektion, d.h. $H(\alpha)$ ist der harmonische Teil von α . Zu zeigen ist, dass $(\mathcal{H}^p(M))^\perp = \operatorname{Im}(\Delta) = \Delta(\Omega^p(M))$ gilt.

Offensichtlich gilt die Inklusion $\operatorname{Im}(\Delta) \subset (\mathcal{H}^p(M))^\perp$. Denn für $\omega \in \Omega^p(M)$ und $\alpha \in \mathcal{H}^p(M)$ gilt: $(\Delta\omega, \alpha) = (\omega, \Delta\alpha) = 0$. Also ist das Bild von Δ enthalten im orthogonalen Komplement des Raumes der harmonischen Formen. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus der folgenden Behauptung, für deren Beweis auf das Buch von Warner verwiesen sei.

Behauptung: Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $\|\beta\| \leq c \|\Delta\beta\|$ für alle Formen $\beta \in (\mathcal{H}^p(M))^\perp$.

Sei $\alpha \in (\mathcal{H}^p(M))^\perp$, dann definiert man ein lineares Funktional Ψ auf $\operatorname{Im}(\Delta)$ durch

$$\Psi(\Delta\varphi) := (\alpha, \varphi) ,$$

für alle $\varphi \in \Omega^p(M)$. Das Funktional Ψ ist wohl-definiert, also unabhängig von der Wahl von φ . Denn aus $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$ folgt $\varphi_1 - \varphi_2 \in \mathcal{H}^p(M)$ und damit $(\alpha, \varphi_1 - \varphi_2) = 0$.

Das Funktional Ψ ist beschränkt. Für $\varphi \in \Omega^p(M)$ sei $\varphi_0 := \varphi - H(\varphi)$. Dann folgt aus der Behauptung und dem Lemma von Cauchy-Schwarz die Abschätzung

$$|\Psi(\Delta\varphi)| = |\Psi(\Delta\varphi_0)| = |(\alpha, \varphi_0)| \leq \|\alpha\| \|\varphi_0\| \leq c \|\alpha\| \cdot \|\Delta\varphi_0\| = c \|\alpha\| \cdot \|\Delta\varphi\| .$$

Das Funktional Ψ ist also beschränkt auf dem Unterraum $\operatorname{Im}(\Delta) \subset \Omega^p(M)$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung von Ψ zu einem beschränkten Funktional auf ganz $\Omega^p(M)$. Damit ist Ψ eine schwache Lösung der Gleichung $\Delta\omega = \alpha$. Aus Satz 12.2 folgt

dann die Existenz einer Form $\omega \in \Omega^p(M)$ mit $\Delta\omega = \alpha$. Damit liegt α im Bild von Δ und die Inklusion $(\mathcal{H}^p(M))^\perp \subset \text{Im}(\Delta)$ ist bewiesen, also schliesslich $\text{Im}(\Delta) = (\mathcal{H}^p(M))^\perp$.

Zum Beweis der anderen Zerlegungen: nach der ersten Zerlegung schreibt sich eine beliebige Form α eindeutig als $\alpha = \Delta\beta + \alpha_0$ mit $\Delta\alpha_0 = 0$ und damit $\alpha = d(d^*\beta) + d^*(d\beta) + \alpha_0$. Das beweist die beiden anderen Summen-Zerlegungen. Zu zeigen bleibt, dass die Summen direkt sind.

Sei zuerst eine Form im Bild von d und im Kern von Δ , d.h. $d\beta \in \text{Ker}\Delta$. Dann folgt $dd^*d\beta = 0$ und damit: $(dd^*d\beta, d\beta) = 0$ also $\|d^*d\beta\| = 0$ und damit wiederum $d^*d\beta = 0$ also auch $(d^*d\beta, \beta) = 0$ und somit $\|d\beta\| = 0$ bzw., was zu zeigen war, $d\beta = 0$. Der Beweis für den Fall einer Form im Bild von d^* und im Kern von Δ , d.h. $d^*\gamma \in \text{Ker}\Delta$ läuft analog.

Sei nun eine Form α gleichzeitig im Bild von d und im Bild von d^* , also $\alpha = d\beta = d^*\gamma$. Dann folgt $d\alpha = 0$ und $d^*\alpha = 0$, also $\Delta\alpha = 0$ und damit $\alpha = 0$. $\square$

Definition 12.5. Der Green-Operator $G : \Omega^p(M) \rightarrow (\mathcal{H}^p(M))^\perp$ bildet eine Form $\alpha \in \Omega^p(M)$ ab auf die eindeutige Lösung von $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$ in $(\mathcal{H}^p(M))^\perp$, d.h. $\alpha = \Delta G(\alpha) + H(\alpha)$.

Lemma 12.6. Der Green-Operator G ist ein beschränkter, selbst-adjungierter, linearer Operator, der beschränkte Folgen in Folgen mit Cauchy Teilfolgen abbildet.

Beweis: siehe Warner $\square$

Satz 12.7. Der Green-Operator G kommutiert mit d, d^*, Δ und allgemeiner mit jedem linearen Operator, der mit Δ kommutiert.

Beweis: siehe Warner $\square$

12.3. Das Hodge-Theorem.

Satz 12.8. Jede deRham-Kohomologieklassse auf einer kompakten orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt einen eindeutig bestimmten harmonischen Repräsentanten.

Beweis: Sei $\alpha \in \Omega^p(M)$. Dann folgt aus der Definition des Green-Operators:

$$\alpha = dd^*G\alpha + d^*dG\alpha + H(\alpha) = dd^*G\alpha + d^*Gd\alpha + H(\alpha) .$$

Als Repräsentant einer deRham-Kohomologieklassse ist α geschlossen, daher folgt

$$\alpha = dd^*G(\alpha) + H(\alpha) .$$

Damit wird die Kohomologieklassse $[\alpha]$ auch durch den harmonischen Teil $H(\alpha)$ repräsentiert, d.h. es gilt die Beziehung $[\alpha] = [H(\alpha)]$.

Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{H}^p(M)$ mit $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, d.h. es existiert eine Form β mit $0 = d\beta + (\alpha_1 - \alpha_2)$. Die Hodge-Zerlegung ist aber eine Zerlegung als direkte Summe. Daraus folgt dann $d\beta = 0$ und somit auch $\alpha_1 = \alpha_2$. $\square$

Bemerkung: Der Beweis von Satz 12.8 zeigt auch, dass der harmonische Repräsentant $H(\alpha)$ einer Kohomologieklassse $[\alpha]$ auch genau der Repräsentant mit der kleinsten L^2 -Norm ist.

Folgerung 12.9 (Hodge-Theorem). *Sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist die deRham-Kohomologie endlich-dimensional und es gilt:*

$$H_{dR}^p(M) \cong \mathcal{H}^p(M).$$

Beweis: Aus Satz 12.8 folgt, dass die Abbildung $H_{dR}^p(M) \rightarrow \mathcal{H}^p(M), [\alpha] \mapsto H(\alpha)$ ein Isomorphismus ist. $\square$

12.4. Die Poincaré-Dualität. Sei M^n eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit, dann definiert man eine Bilinearform durch

$$H_{dR}^p(M) \times H_{dR}^{n-p}(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ([\alpha], [\beta]) \longmapsto b([\alpha], [\beta]) := \int_M \alpha \wedge \beta.$$

Die Bilinearform b ist wohl-definiert nach dem Satz von Stokes. Sei z.B: $[\alpha] = [\alpha_1]$, d.h. $\alpha_1 = \alpha + d\eta$. Dann gilt

$$\int_M \alpha_1 \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge \beta + \int_M d\eta \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge \beta + \int_M d(\eta \wedge \beta) = \int_M \alpha \wedge \beta.$$

Satz 12.10 (Poincaré-Dualität). *Die Bilinearform b ist nicht-ausgeartet und definiert damit einen Isomorphismus*

$$H_{dR}^{n-p}(M) \cong (H_{dR}^p)^*.$$

Beweis: Sei $[\alpha] \in H_{dR}^p(M)$ mit $[\alpha] \neq 0$. Gesucht ist eine Kohomologieklassse $[\beta] \in H_{dR}^{n-p}(M)$ mit $b([\alpha], [\beta]) \neq 0$. Man wählt auf M eine Riemannsche Metrik und betrachtet den harmonischen Repräsentanten der Kohomologieklassse. O.B.d.A. sei $\Delta\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$. Dann ist auch $\Delta*\alpha = 0$ und insbesondere $d(*\alpha) = 0$, d.h. $*\alpha$ definiert eine Kohomologieklassse $[\alpha] \in H_{dR}^{n-p}(M)$. Man berechnet dann

$$b([\alpha], [* \alpha]) = \int_M \alpha \wedge * \alpha = \|\alpha\|^2 \neq 0,$$

wodurch gezeigt ist, dass die Bilinearform b nicht-ausgeartet ist. $\square$

Folgerung 12.11. *Sei M eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Mannigfaltigkeit, dann gilt $H_{dR}^n(M) \cong \mathbb{R}$*