

Minimalflächen

Schriftliche Hausarbeit
im Rahmen der Ersten Staatsprüfung
für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen

dem Landesprüfungsamt für Erste Staatsprüfungen
für Lehrämter an Schulen in Köln vorgelegt von:

Johanna Jacobi

Köln, 31.08.2008

angefertigt im Mathematischen Institut
der Universität zu Köln
unter Anleitung von

Prof. Dr. Uwe Semmelmann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Minimalflächen	6
2.1	Variation des Flächeninhalts	6
2.2	Beispiele	10
2.3	Variationen bei konstantem Volumen	12
2.4	Die Weierstraß-Darstellung einer Minimalfläche	15
2.5	Das Plateau-Problem	21
2.6	Hennebergfläche-eine nichtorientierte Minimalflächen	26
2.7	Totalkrümmung von Minimalflächen	28
3	Die Kettenfläche	30
3.1	Die Kettenlinie	30
3.2	Die Kettenfläche	33
3.3	Die Kettenfläche und Seifenblasen	38
3.4	Die Weierstraßdarstellung der Kettenfläche	42
3.5	Die Kettenfläche und Wendelfläche	43
3.6	Geometrische Eigenschaften der Kettenfläche	48

1 Einleitung

Bei Minimalflächen handelt es sich um Flächen, die unter allen anderen, durch Variation erzeugten Flächen mit der selben Randkurve, lokal den geringsten Flächeninhalt haben. Derartige Flächen lassen sich durch Seifenhäutchen realisieren. Taucht man ein geschlossenes Drahtgestell beliebiger Form in Seifenlauge, so bildet sich ein Seifenhäutchen. Da Seifenhäutchen die physikalische Eigenschaft besitzen, sich möglichst klein zusammen zu ziehen, um ihre potentielle Energie zu minimieren, bilden Seifenhäutchen Minimalflächen mit der Randkurve des Drahtgestells.

Anwendung findet dies beispielsweise in der Architektur. Als eine bekannte Minimalfläche in der Architektur sei hier das Dach des Münchener Olympiastadions erwähnt, entworfen von dem deutschen Architekten Frei Otto. Dieses bildet eine Minimalfläche und gewährleistet somit einen möglichst geringen Verbrauch von Baumaterial bei einer gleichzeitig sehr hohen Belastbarkeit. In der Tat entstanden die ersten Modelle des Daches, und auch weitere Dachkonstruktionen von Otto Frei sowie anderer Architekten, mit Hilfe von Drähten und Seifenlauge.

Im ersten Teil meiner Arbeit wird es darum gehen, Minimalflächen mathematisch zu beschreiben. In Kapitel 1.1 werden wir sehen, wie sich der Flächeninhalt einer Fläche unter Variationen in Normalenrichtung verändert. Daraus lässt sich ableiten, dass für eine Minimalfläche das mittlere Krümmungsfeld in jedem Punkt verschwinden muss. Dabei handelt es sich allerdings nur um eine notwendige Bedingung. Lokal ist die Minimalität der Fläche in der Tat gegeben.

Im nächsten Kapitel werden wir Flächen lokal als Teil eines kompakten Raumgebietes auffassen und untersuchen, wie sich der Flächeninhalt bei Variation verändert, unter der Nebenbedingung, dass das Volumen des da-

1 Einleitung

durch neuen Raumgebietes nicht verändert wird. Man sagt dazu *Variation bei konstantem Volumen*. Wie wir sehen werden, ist die mittlere Krümmung bei minimalen Flächen mit konstantem Volumen konstant.

In Kapitel 1.4 geht es um die Weierstraß-Darstellung von Minimalflächen. Man kann aus zwei fast beliebig vorgegebenen Funktionen h und g , wobei h holomorph und g eine meromorphe Funktion ist, immer eine konform parametrisierte Minimalfläche gewinnen.

Im nächsten Abschnitt wird es darum gehen, ob man zu jeder beliebig vorgegeben Randkurve eine Minimalfläche findet. Dieses Problem wird als Plateau-Problem bezeichnet und konnte erst 1930 gelöst werden. Wir werden in diesem Abschnitt den Beweis für die Existenz einer Minimalfläche, die sich als Bild der Kreisscheibe parametrisieren lässt, in seinen Grundzügen kennen lernen. Des Weiteren wird diskutiert, ob zu einer gegebenen Randkurve mehrere Minimalflächen existieren können, insbesondere, ob es auch kompliziertere Minimalflächen als vom topologischen Typ der Kreisscheibe gibt.

Im zweiten Teil meiner Arbeit widme ich mich dann einem klassischen Beispiel für eine Minimalfläche, der Kettenfläche, auch Katenoid genannt. Das Katenoid entsteht bei der Rotation der Kettenlinie und wir werden zeigen, dass sie die einzige gekrümmte Rotationsminimalfläche. Das Katenoid lässt sich mit Hilfe von Seifenhäutchen modellieren, indem man zwei kreisförmige Drähte, die übereinander liegen, in Seifenlauge taucht. Befinden sich die beiden kreisförmigen Drähte nicht zu weit auseinander, so bildet sich das Katenoid. Zieht man die Kreise langsam auseinander, so wird das Seifenhäutchen bei einem bestimmten Abstand zerplatzen. Diese Beobachtung kann auch mathematisch bestätigt werden und der Abstand bei dem das Seifenhäutchen platzt bzw. keine Minimalfläche mehr existiert berechnet werden, wie wir es an einem konkreten Beispiel sehen werden. Des Weiteren werden wir sehen, wie sich die Kettenfläche in die Wendelfläche, die ebenfalls eine Minimalfläche ist, deformieren lässt. Anschließend werden noch einige geometrische Eigenschaften der Kettenfläche aufgeführt.

Der erste Teil meiner Arbeit ist zu großen Teilen mit Hilfe des Buches „Dif-

1 Einleitung

ferentialgeometrie und Minimalflächen“ von J.Jost entstanden. Sind Definitionen, Sätze oder ähnliches sinngemäß aus anderen Büchern entnommen, so sind diese Quellen entsprechend angegeben. Die Berechnungen im zweiten Teil meiner Arbeit zur Kettenfläche wurden wenn nicht anders angegeben von mir selbst durchgeführt. Die Abbildungen sind bis auf angegebene Ausnahmen mit der Software „Maple“ erstellt.

2 Minimalflächen

2.1 Variation des Flächeninhalts

Das Wort Minimalfläche suggeriert, dass es sich um eine Fläche mit kleinstmöglichem Flächeninhalt handelt. Wir sehen, dass dies lokal tatsächlich der Fall ist. Das Problem ist also nun, zu einer gegebenen Randkurve eine Fläche mit kleinstem Flächeninhalt zu finden. Dazu überlegt man zunächst, welchen geometrischen Bedingungen eine Fläche mit möglichst kleinem Flächeninhalt genügen muss. Im Folgenden gehe ich davon aus, dass Flächen durch Immersionen parametrisiert sind:

$$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

wobei U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist. Sei also eine beliebige Immersion X gegeben. Um Bedingungen zu finden, damit X eine Minimalfläche ist, überlegt man sich, wie sich der Flächeninhalt verändert, wenn X auf einer kompakten Teilmenge $C \subset U$ variiert wird. Die kompakte Variation von X wird beschrieben durch eine C^2 -Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow \mathbb{R}^3, (s, u) \mapsto X^s(u)$. Dabei sollen die Abbildungen X^s Immersionen sein für die gilt:

$$X^0 = X, \quad X^s|_{U \setminus C} = X|_{U \setminus C}.$$

Man kann dabei stets annehmen, dass es sich bei der Deformation der Fläche um eine Variation in Normalenrichtung handelt, also δX^s ein Normalenvektorfeld längs X ist, wobei $\delta = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$. Andernfalls könnte man X^s umparametrisieren. Wir können daher δX^s als Vielfaches der Gauß-Abbildung ν schreiben. Die Gaußabbildung für ein Flächenstück $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist definiert

2 Minimalflächen

als

$$\nu : U \rightarrow S^2, \quad \nu(u_1, u_2) := \frac{\frac{\partial f}{\partial u_1} \times \frac{\partial f}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u_1} \times \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\|}.$$

Daraus folgt: $\delta X^s = \phi = \varphi \cdot \nu$, wobei φ eine beliebige, aber feste C^2 -Funktion ist, die am Rand von C verschwindet. Damit kann man X^s wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} X^s(u_1, u_2) &= X(u_1, u_2) + s \cdot \phi(u_1, u_2) \\ &= X(u_1, u_2) + s \cdot \varphi(u_1, u_2) \cdot \nu(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt einer regulären Fläche X ist definiert als:

$$A(X) := \int_U dA = \int_U g_{ij} du_1 du_2.$$

Um zu sehen wie sich der Flächeninhalt unter einer normalen Variation verändert, muss also $\delta A(X^s)|_{s=0}$ bestimmt werden. Es gilt folgender Satz: [1]

Satz 2.1.1 *Sei X wie oben gegeben, wobei X endlichen Flächeninhalt habe. \mathcal{H} bezeichne das mittlere Krümmungsfeld $\mathcal{H} = H \cdot \nu$.*

$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei ein glattes Einheitsnormalenfeld auf X mit kompaktem Träger, dass am Rand einer kompakten Teilmenge $C \subset U$ verschwindet, $\phi = \varphi \cdot \nu$, wobei φ und ν wie oben definiert sind. Dann ist für $|s|$ hinreichend klein die Menge

$X^s := \{X(u_1, u_2) + s \cdot \phi(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \in U\}$ eine reguläre Fläche mit endlichem Flächeninhalt und es gilt

$$\partial A(X^s) = -2 \int_C \langle \phi, \mathcal{H} \rangle dA. \tag{2.1}$$

Dabei bezeichnet \langle, \rangle das Standardskalarprodukt.

Wenn X also unter allen normalen Variationen X^s von X minimalen Flächeninhalt haben soll, muss (2.1) Null ergeben. Dies ist der Fall, wenn für das mittlere Krümmungsfeld von X

$$\mathcal{H} = (0, 0, 0)^T$$

2 Minimalflächen

gilt. Wäre $\mathcal{H}(u) \neq 0$ für einen Punkt $u \in U$ so gäbe es eine Umgebung V von u , so dass $\langle \mathcal{H}, \nu \rangle > 0$ in dieser Umgebung, wobei ν das Einheitsnormalenfeld ist mit $\langle \mathcal{H}(u), \nu(u) \rangle > 0$. Sei nun $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger in V und $\varphi \geq 0$, $\varphi(u) > 0$. Dann ist

$$\phi(q) = \begin{cases} \varphi(q)\nu(q) & \text{für } q \in U \cap V \\ (0, 0, 0) & \text{für } q \in U \setminus V \end{cases}$$

ein glattes Normalenfeld mit kompaktem Träger, für das gilt:

$$\int_C \langle \mathcal{H}, \phi \rangle > 0$$

. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu

$$\partial A(X^s) = -2 \int_C \langle \phi, \mathcal{H} \rangle dA = 0.$$

Wir haben also eine notwendige Bedingung gefunden, der X genügen muss, damit der Flächeninhalt unter allen Variationen minimal ist. Daher formuliert man folgende

Definition 2.1.1 *Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, die durch eine Immersion X wie oben parametrisiert sei, heißt Minimalfläche, falls*

$$\mathcal{H} = (0, 0, 0). \tag{2.2}$$

Ist die Minimalfläche orientierbar, so kann man das mittlere Krümmungsfeld schreiben als $\mathcal{H} = H \cdot \nu$. In diesem Fall ist X eine Minimalfläche genau dann, wenn $H \equiv 0$.

Gleichung (2.2) drückt aus, dass der Flächeninhalt von X in erster Ordnung durch beliebige Variationen von X nicht verändert werden kann, also dass die Oberfläche stationär ist. Sie impliziert jedoch nicht, dass der Flächeninhalt auch wirklich minimal ist, da es sich nur um eine notwendige Bedingung handelt. Der Flächeninhalt könnte also ebenfalls maximal oder sattelartig sein. Es gilt allerdings tatsächlich strenge Minimalität, wenn man

2 Minimalflächen

den Definitionsbereich von X genügend verkleinert, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2.1.2 $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei eine Minimalfläche. Dann gibt es um jede Stelle u_0 eine kompakte Umgebung $C \subset U$ mit der Eigenschaft, dass für jede nicht zu X geometrisch äquivalente Fläche $\tilde{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{X} = X$ auf $U \setminus C$ gilt:

$$A(X|_C) = A(\tilde{X}|_C)$$

Minimalflächen können auch über ihre Asymptotenrichtungen charakterisiert werden [2]

Satz 2.1.3 Eine Immersion $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist minimal genau dann, wenn es in jeden Punkt zwei zueinander senkrechte Asymptotenrichtungen gibt.

Als Asymptotenrichtung einer Fläche bezeichnet man einen Vektor $a \in T_u$, wobei T_u die Tangentialebene der Fläche im Punkt $u \in U$ sei, für den gilt

$$\langle L_u(a), a \rangle = 0, \tag{2.3}$$

dabei bezeichnet L_u die Weingartenabbildung von X im Punkt u .

Beweis: a) Es sei Immersion $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben und v_1, v_2 seien zwei Asymptotenrichtungen in $u \in U$ beliebig, für die gilt: $v_1 \perp v_2$, also $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. κ_1 und κ_2 seien die Hauptkrümmungen von X und e_1, e_2 die entsprechenden Hauptkrümmungsrichtungen. Dann lassen sich v_1 und v_2 schreiben als

$$v_1 = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad v_2 = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ konstant. Es folgt:

$$\langle L_u v_1, v_1 \rangle = \alpha^2 \kappa_1 + \beta^2 \kappa_2 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} \kappa_1 + \kappa_2 = 0$$

$$\langle L_u v_2, v_2 \rangle = \gamma^2 \kappa_1 + \delta^2 \kappa_2 = 0 \Rightarrow \frac{\delta^2}{\gamma^2} \kappa_2 + \kappa_1 = 0$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \alpha\gamma + \beta\delta = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\delta}{\gamma}$$

2 Minimalflächen

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}\kappa_1 + \kappa_2 + \frac{\delta^2}{\gamma^2}\kappa_2 + \kappa_1 = \left(1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)(\kappa_1 + \kappa_2) = 0$$

Daraus folgt also $\kappa_1 = -\kappa_2$. Also ist die mittlere Krümmung $H = \frac{1}{2}\kappa_1 + \kappa_2 = 0$ und X damit eine Minimalfläche.

b) Sei nun X eine Minimalfläche, also $\kappa_1 = \kappa_2$ und $v \in T_u$ eine Asymptotenrichtung für $u \in U$ beliebig, $v = \sigma e_1 + \tau e_2$. Es gilt: $L_u v = \sigma \kappa_1 e_1 + \tau \kappa_2 e_2$. Also ist

$$\langle L_u v, v \rangle = \sigma^2 \kappa_1 + \tau^2 \kappa_2 = (\tau^2 - \sigma^2) \kappa_2 = 0$$

. Für $\kappa_1 \neq 0$ folgt also $\tau = \pm\sigma$. Es existieren also zwei Asymptotenrichtungen $v_+ = \sigma e_1 + \sigma e_2$, $v_- = \sigma e_1 - \sigma e_2$ für die gilt $\langle v_+, v_- \rangle = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$.

□

2.2 Beispiele

Die affine Ebene

Das einfachste Beispiel einer Minimalfläche ist die Ebene. Hier gilt offensichtlich für die mittlere Krümmung $H \equiv 0$. Wesentlich interessanter sind die gekrümmten Minimalflächen.

Schercksche Minimalfläche:

Die Schercksche Minimalfläche ist der Graph der Funktion

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(u_1, u_2) = \ln(\cos u_1) - \ln(\cos u_2)$$

Durch elementares Umrechnen folgt aus der Formel

2 Minimalflächen

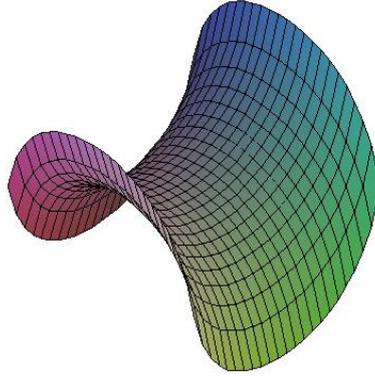


Abbildung 2.1: Scherksche Minimalfläche

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{Spur}(L_u) = \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{2 \det g} [1]:$$

Satz 2.2.1 *X sei Graph der Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Dann ist X eine Minimalfläche genau dann, wenn φ die folgende Differentialgleichung erfüllt:*

$$\left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_1} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2 \partial u_2} = 0 \quad (2.4)$$

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich einfach zeigen, dass es sich bei der Scherck-
schen Fläche um eine Minimalfläche handelt. Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\sin u_1}{\cos u_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = -\frac{\sin u_2}{\cos u_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_1} = \frac{1}{\cos^2 u_1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_2} = -\frac{1}{\cos^2 u_2}.$$

Einsetzen in Gleichung (2.2.1) liefert

$$\left(1 + \frac{\sin^2 u_2}{\cos^2 u_2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 u_1}\right) + \left(1 + \frac{\sin^2 u_1}{\cos^2 u_1}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 u_2}\right) = 0.$$

Folglich handelt es sich bei der Scherck-
schen Fläche in der Tat um eine
Minimalfläche.

2.3 Variationen bei konstantem Volumen

In den vorherigen Kapiteln haben wir uns mit minimalen Flächen beschäftigt, die von einer Randkurve begrenzt werden und festgestellt, dass eine Minimalfläche in jedem Punkt der Fläche die mittlere Krümmung Null hat. Realisieren lassen sich Minimalflächen mit Hilfe von Drähten und Seifenlauge. Taucht man einen geschlossenen Draht in Seifenlauge und zieht ihn langsam heraus, so ist der sich bildende Seifenfilm eine Minimalfläche. Anders ist die Situation bei Seifenblasen. Hier ist im Inneren der Seifenblase der Luftdruck höher als außen. Dies hat zur Folge, dass sich der Seifenfilm nicht möglichst klein zusammenziehen kann, wie es bei Seifenhäutchen bzw. bei Minimalflächen der Fall ist. Allerdings ist die Oberfläche von Seifenblasen bei einem vorgegebenen Volumen stets minimal.

In diesem Kapitel geht es nun um die Frage, wie eine Fläche beschaffen sein muss, damit sie zu einem vorgegebenen Volumen kleinsten Flächeninhalt hat. Da diese Flächen durch Seifenblasen realisiert werden, würde man vermuten, dass es sich um Kugeln handeln muss. Daraus könnte man schlussfolgern, dass die mittlere Krümmung zwar nicht mehr Null, aber immer noch konstant sein müsste. Wir wollen nun mathematisch untersuchen, ob dies tatsächlich der Fall ist.

Gesucht ist also nun eine Fläche, die unter allen Variationen möglichst kleinen Flächeninhalt hat, unter der Nebenbedingung, dass die Fläche ein Raumgebiet mit gegebenem Volumen berandet. Dies lässt sich lokal wie folgt formulieren:

Gegeben sei wieder eine Immersion $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei U wie immer eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist. Jedes $u \in U$ besitzt eine kleine kompakte Umgebung $C \subset U$ um u , so dass $X(C)$ Teil eines kompakten Raumgebietes ist, welches ich im Folgenden mit D bezeichne. Wir betrachten nun Variationen X^s , $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, von X , $X^s : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$X^0 = X, \quad X^s|_{U \setminus C} = X|_{U \setminus C}.$$

2 Minimalflächen

Dann ist $X^s(C)$ Teil des Randes eines anderen kompakten Raumgebietes D_s , für das gilt: $\partial D_s \setminus X^s(C) = \partial D \setminus X(C)$, wobei mit ∂D bzw. ∂D_s der Rand des kompakten Raumgebiets gemeint ist. Unter der Nebenbedingung, dass D_s und D das selbe Volumen haben, nennt man diese Variationen von X *Variationen bei konstantem Volumen*. Wenn X nun unter allen Variationen mit konstantem Volumen minimalen Flächeninhalt haben soll, muss X stationär sein, also $\delta A(X^s|_C) = 0$, wobei wieder $\delta = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$ gilt. Wie in Kapitel 1.1 kann man annehmen, dass nach eventueller Umparametrisierung X^s eine Variation in Normalenrichtung vorliegt. Es existiert also eine Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\varphi = 0$ für $U \setminus C$ so dass

$$X(u_1, u_2) + s \cdot \varphi(u_1, u_2) \cdot \nu(u_1, u_2). \quad (2.5)$$

Dabei ist ν wie immer das Einheitsnormalenfeld auf X und $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Für das Variationsvektorfeld gilt demnach $\delta X^s = \varphi \cdot \nu$. Des weiteren sei D so gewählt, dass $\partial D_s \setminus X^s(C) = \partial D \setminus X(C)$ glatt ist und die Normalen von X transversal schneidet. Dies bedeutet, dass es eine stetige Funktion $b : C \rightarrow \mathbb{R}_-$ mit $b = 0$ auf δC gibt, so dass

$$D_s = \{X(u) + t\nu(u); u \in C, b(u) \leq t \leq s \cdot \varphi(u)\}. \quad (2.6)$$

Das folgende Lemma beschreibt, wie sich das Volumen eines Gebietes verändert, wenn der Rand ohne Volumenbedingung variiert wird.

Lemma 2.3.1 *Für jede normale Variation der Form (2.5) von X ist die Variation des Volumens $\mathcal{V}(s) = \text{Vol}(D_s)$ gegeben durch*

$$\delta \mathcal{V} = \int_C \varphi \, d\mathcal{A} \quad (2.7)$$

mit $d\mathcal{A} = \sqrt{\det g(u)}$. Hierbei steht g wieder für die erste Fundamentalform $g = g_{ij}$.

Zum Beweis dieses Lemmas betrachtet man

$D_s = \{X(u) + t\nu(u); u \in C, b(u) \leq t \leq s \cdot \varphi(u)\}$ und eine Abbildung $\hat{X} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\hat{X}(u, t) = X(u) + t\nu(u)$, welche in einer Umgebung von

2 Minimalflächen

$U \times \{0\} \subset U \times \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus ist. Anwendung des Transformationsatzes liefert eine Formel für das Volumen des Gebiets:

$$\mathcal{V} = \int_C \int_{b(u)}^{\tau_s(u)} \left| \det \partial \widehat{X}_{u,t} \right| dt du;$$

wobei $\partial \widehat{X}_{(u,t)}$ die Jacobimatrix von \widehat{X} im Punkt (u, t) ist. Differentiation nach s und Anwendung der Determinantenformel $|\det A| = \sqrt{\det A^t A} = \sqrt{\det(\langle A e_i, A e_j \rangle)}$ für $A = \partial X$ liefert Gleichung (2.7) (vgl. [2]).

Lemma 2.3.2 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $\delta \mathcal{A} = 0$ für alle normalen Variationen X^s mit $\mathcal{V}(X^s) = \text{const}$,
2. es gibt eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\delta(\mathcal{A}(X^s) + \lambda \mathcal{V}(X^s)) = 0$$

für alle normalen Variationen X^s von X (ohne Volumenbedingung).

Eine Anwendung dieses Lemmas findet sich unter Kapitel 3.3. Mit Hilfe dieses Lemmas lässt sich folgender Satz beweisen:

Satz 2.3.1 *$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist minimal bei konstantem Volumen genau dann, wenn die mittlere Krümmung H von X konstant ist.*

Beweis: Nach Lemma (2.3.2) ist X minimal bei konstantem Volumen, wenn

$$\delta(\mathcal{A}(X^s) + \lambda \mathcal{V}(X^s)) = 0,$$

also muss $\int_C \varphi(\lambda - 2H) dA = 0$ sein. Daraus folgt $H = \frac{\lambda}{2} = \text{const}$.

Wenn umgekehrt $H = \text{const}$ ist, dann folgt aus $\delta \mathcal{A} = -2H \delta \mathcal{V}$, $\delta \mathcal{A} + 2H \delta \mathcal{V} = 0$ und somit aus Lemma (2.3.2), dass X minimal bei konstantem Volumen ist. □

Der Satz gibt also der intuitiven Vermutung, dass es sich bei einer Fläche, die minimal bei konstantem Volumen ist, um eine Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung handeln muss recht. Hat die Fläche keine Selbstschnitte, so

2 Minimalflächen

stimmt ebenfalls die Vermutung, dass es sich um eine Kugelfläche handeln muss. Dies besagt der Satz von Alexandrov:

Satz 2.3.2 (Satz von Alexandrov) *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ ein beschränktes offenes Gebiet und der Rand $\partial\Omega$ eine C^2 -Hyperfläche mit konstanter mittlerer Krümmung, dann ist Ω eine offene Kugel, $\Omega = B_r(x_0)$ für ein $r > 0$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$; die Hyperfläche konstanter mittlerer Krümmung ist also eine Sphäre.*

Kugelflächen sind die einfachsten Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung und lange Zeit nahm man an, dass es keine weiteren Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung gäbe. Erst 1984 konstruierte Henry Wente eine solche Fläche. Diese wird Wente Torus genannt, da die Fläche vom selben topologischen Typ wie der Torus ist (vgl. [6]).

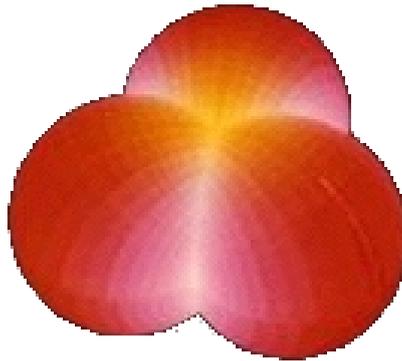


Abbildung 2.2: Wente Torus

2.4 Die Weierstraß-Darstellung einer Minimalfläche

In diesem Kapitel werden wir sehen, dass man zu zwei fast beliebig vorgegebenen Funktionen g und h eine Minimalfläche konstruieren kann. Gegeben sei wieder eine Immersion $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei $U \subset \mathbb{R}^2$.

2 Minimalflächen

Definition 2.4.1 Eine Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *konform* oder *isotherm* parametrisiert, wenn die erste Fundamentalform g_{ij} überall ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix ist, also wenn

$$g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{11} = g_{22} = \lambda^2, \quad (2.8)$$

wobei $\lambda : U \rightarrow (0, \infty)$ eine C^1 -Funktion ist. Man bezeichnet λ als den *konformen Faktor*.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir die komplexe Schreibweise für die Parameter aus $U \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ benutzen, das heißt für $z \in U$ schreiben wir $z = (u, v) = u + iv$. Im Folgenden werden einige grundlegende Tatsachen aus der Funktionentheorie benötigt, die daher hier kurz aufgeführt werden sollen.

Definition 2.4.2 Eine komplexe Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$, $F(u + iv) = G(u, v) + i \cdot H(u, v)$, wobei $u, v \in \mathbb{R}$ und G, H reelle Funktionen auf U sind, heißt *holomorph*, wenn die *Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen* gelten:

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{\partial G}{\partial v} = -\frac{\partial H}{\partial u}. \quad (2.9)$$

Die folgenden komplexen Linearkombinationen der partiellen Ableitungen $F_u = \frac{\partial F}{\partial u}$ und $F_v = \frac{\partial F}{\partial v}$ bezeichnet man als *Wirtinger-Ableitungen*:

$$F_z = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}(F_u - iF_v), \quad F_{\bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(F_u + iF_v). \quad (2.10)$$

Mit Hilfe von (2.9) und (2.10) lässt sich folgendes Lemma zeigen:

Lemma 2.4.3 $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist *holomorph* genau dann, wenn $F_{\bar{z}} = 0$. In diesem Fall ist $F_z = F'$ die komplexe Ableitung von F .

Des weiteren lässt sich leicht nachrechnen, dass für jede C^2 -Funktion F auf U

$$F_{z\bar{z}} = F_{\bar{z},z} = \frac{1}{4}\Delta F \quad (2.11)$$

gilt, wobei $\Delta F := F_{uu} + F_{vv}$ und der Operator Δ als *Laplace-Operator* bezeichnet wird. Gilt $\Delta F = 0$, so bezeichnet man F als eine *harmonische*

2 Minimalflächen

Funktion. Für den Fall, dass F nach \mathbb{R}^3 oder \mathbb{C}^3 abbildet, lassen sich die Aussagen über holomorphe Funktionen auf die Komponenten von F anwenden.

Das Standardskalarprodukt lässt sich komplex bilinear auf \mathbb{C}^3 erweitern: $\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$ für alle $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$ in \mathbb{C}^3 .

Man nennt einen Vektor $w \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ *isotrop*, wenn $\langle w, w \rangle = 0$. Mit $w = x + iy$, für $x, y \in \mathbb{R}^n$ folgt $\langle w, w \rangle = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle + 2i \langle x, y \rangle$. Der Vektor w ist also genau dann isotrop, wenn

$$|x| = |y| \text{ und } x \perp y. \quad (2.12)$$

Lemma 2.4.4 *Eine Fläche X ist genau dann konform parametrisiert, wenn X_z isotrop ist, also $\langle X_z, X_z \rangle = 0$. Der konforme Faktor ist dabei*

$$\lambda^2 = 2 \langle X_z, \bar{X}_z \rangle$$

Satz 2.4.1 *Für eine konform parametrisierte Fläche X gilt:*

$$\Delta X = 2\lambda^2 H \nu = 2\lambda^2 \mathcal{H}, \quad (2.13)$$

wobei λ der konforme Faktor, H die mittlere Krümmung und ν wie in den Abschnitten zuvor die Gaußabbildung ist.

Nach Lemma 2.4.3 ist X_z holomorph genau dann, wenn $X_{z\bar{z}} = 0$. Dies ist nach Gleichung (2.13) äquivalent dazu, dass $\mathcal{H} = 0$, also X eine Minimalfläche ist. Zusammen mit Lemma 1.7 ergibt sich daher:

Satz 2.4.2 *Eine Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine konform parametrisierte Minimalfläche genau dann, wenn $X_z : U \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ holomorph und isotrop ist, also*

$$X_{z\bar{z}} = 0, \quad \langle X_z, X_z \rangle = 0. \quad (2.14)$$

Das folgende Lemma zeigt, wie man aus X_z eine konform parametrisierte Minimalfläche zurückgewinnen kann.

Lemma 2.4.5 *Es sei X eine konform parametrisierte Minimalfläche, $Y = 2X_z$ und $\int Y$ eine Stammfunktion der holomorphen Funktion Y . Dann*

2 Minimalflächen

ist X bis auf Translation der Realteil von $\int Y$, d.h. $X - \operatorname{Re}(\int Y)$ ist ein konstanter Vektor.

Bemerkung: Der Begriff der Stammfunktion ist wie im reellen definiert: Eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f , wenn F holomorph ist und $F' = f$ gilt. Die Funktion F bezeichne ich mit $\int f$.

Ist $Y : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ holomorph und isotrop, so kann man daraus eine ganze Schar von Minimalflächen erhalten, da konstante Vielfache von Y , $Y_\phi := e^{i\phi}Y$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$, ebenfalls holomorph und isotrop sind. Die daraus erhaltene Schar von Minimalflächen bezeichnet man als die zu X assoziierte Familie:

$$X_\phi = \operatorname{Re} \left(\int Y_\phi \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i\phi} \int Y \right).$$

Für $\phi = \pi/2$ ist $e^{i\pi/2} = i$, das heißt es gilt:

$$X^* = X_{\pi/2} = -\operatorname{Im} \left(\int Y \right). \quad (2.15)$$

Man nennt X^* die zu X konjugierte Minimalfläche und alle Minimalflächen aus der assoziierten Familie lassen sich darstellen durch X und X^* :

$$X_\phi = \operatorname{Re} \left((\cos \phi + i \sin \phi) \int Y \right) = (\cos \phi)X + (\sin \phi)X^*.$$

Mit Hilfe von Lemma 2.4.4 lässt sich zeigen, dass alle Immersionen in der assoziierten Familie isometrisch sind, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \langle X_\phi, \overline{X_\phi} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} e^{i\phi} Y, \frac{1}{2} e^{-i\phi} \overline{Y} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle Y, \overline{Y} \rangle \\ &= \langle X_z, \overline{X_z} \rangle \end{aligned}$$

mit $X_z = \frac{\partial X}{\partial z}$. X_ϕ und X haben also den gleichen konformen Faktor und dementsprechend die gleiche erste Fundamentalform. Folglich sind aller Im-

2 Minimalflächen

mersionen in einer assoziierten Familie isometrisch zueinander.

Die holomorphe und isotrope Abbildung $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) : U \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ lässt sich explizit angeben.

Satz 2.4.3 *Jede konform parametrisierte Minimalfläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ lässt sich darstellen durch $X = \operatorname{Re} \int Y$ mit*

$$Y = h \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right), -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{g} + g \right), 1 \right), \quad (2.16)$$

wobei $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $g : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorph ist, d.h. g ist Quotient zweier holomorpher Funktionen. Dabei sind g und h so zu wählen, dass die Komponenten von Y keine Polstellen und keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Abgesehen von dieser Einschränkung sind g und h beliebig. Für die assoziierten Minimalflächen $X_\phi = \operatorname{Re} e^{i\phi} \int Y$ ist $g_\phi = g$ und $h_\phi = e^{i\phi} h$.

Beweis: Nach Satz 2.6 ist $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) : U \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ holomorph und isotrop und daher gilt:

$$0 = \langle Y, Y \rangle = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = Y_+ Y_- + Y_3^2$$

mit $Y_\pm = Y_1 \pm iY_2$. Dann gilt: $Y_+ = \frac{-Y_3^2}{Y_-}$. Für $h = Y_3$, $g = \frac{Y_3}{Y_-}$ folgt:

$$Y_+ = -hg, \quad Y_- = hg, \quad Y_3 = h.$$

Aus $Y_+ + Y_- = 2Y_1$ und $Y_+ - Y_- = 2iY_2$ ergibt sich:

$$Y_1 = h \cdot \frac{1}{2} \left(-g + \frac{1}{g} \right), \quad Y_2 = -h \cdot \frac{1}{2i} \left(g + \frac{1}{g} \right), \quad Y_3 = h$$

□

Die Funktionen h und g haben geometrische Bedeutungen: h gibt durch $\operatorname{Re} \int Y$ die x_3 Komponente und damit die Höhe des Punktes $X(z)$ an. Die meromorphe Funktion g hängt mit der Gaußabbildung zusammen. Dazu

2 Minimalflächen

betrachten wir zunächst die stereographische Projektion

$$\Phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \quad \phi(z) = \frac{1}{|z|^2 + 1} (2z, |z|^2 + 1).$$

Diese Abbildung ordnet jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ den weiteren Schnittpunkt der Geraden durch z und N mit der Sphäre zu, wobei $N = (0, 1)$ der Nordpol der Sphäre ist. Es gilt folgender Satz:

Satz 2.4.4 *Für die Gaußabbildung ν einer Minimalfläche X gilt:*

$$\nu = \phi \circ g \tag{2.17}$$

. Insbesondere folgt aus $g_\phi = g$, dass die Gaußabbildung aller assoziierten Flächen X_ϕ die selbe ist. Unter der Deformation X_ϕ bleiben also die Tangentialebenen unverändert.

Mit Hilfe der Weierstraßdarstellung lässt sich der konforme Faktor und somit die erste Fundamentalform bestimmt. Nach Lemma 2.4.4 ist $g_{11} = g_{22} = \lambda^2 = 2 \langle X_z, \bar{X}_z \rangle$. Da $X_z = \frac{1}{2}Y$ folgt:

$$2 \langle X_z, \bar{X}_z \rangle = 2 \left\langle \frac{1}{2}Y, \frac{1}{2}\bar{Y} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle Y, \bar{Y} \rangle = \frac{1}{2} |Y|^2 = \frac{1}{4} \left(|g| + \frac{1}{|g|} \right)^2 |g|^2$$

Zur Berechnung der zweiten Fundamentalform, beutzten wir die Beziehung zwischen dem Einheitsnormalenfeld ν und der meromorphen Funktion g . Nach (2.17) ist

$$\nu = \phi \circ g = \frac{1}{|g| + 1} \cdot \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}g \\ 2\operatorname{Im}g \\ |g|^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Die zweiten partiellen Ableitungen sind $X_{uu} = \operatorname{Re}Y_z = -\operatorname{Re}Y_z$ und $X_{uv} = X_{vu} = \operatorname{Re}iY_z$, mit

$$Y_z = h' \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{g} - g) \\ -\frac{1}{2i}(\frac{1}{g} + g) \\ 1 \end{pmatrix} + h \cdot \frac{g'}{g} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{g} - g) \\ \frac{i}{2}(-\frac{1}{g} + g) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2 Minimalflächen

Da die Gaußabbildung ν reell ist, kann Re vor das Skalarprodukt gezogen werden. Da zudem ν senkrecht auf X_u und auf X_v steht, steht ν auch senkrecht auf $X_z = \frac{1}{2}(X_u - iX_v)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= \langle X_{uu}, \nu \rangle \\
 &= \operatorname{Re} \left(h \frac{g'}{g} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{g} - g) \\ \frac{i}{2}(-\frac{1}{g} + g) \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{|g|+1} \cdot \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}g \\ 2\operatorname{Im}g \\ |g|^2 - 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(h \frac{g'}{g} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{|g|+1} \left((-\frac{1}{g} - g)(g + \bar{g}) + (-\frac{1}{g} + g)(g - \bar{g}) \right) \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{g'}{g} \cdot h \right) = -h_{22}
 \end{aligned}$$

und $h_{12} = h_{21} = \operatorname{Re} \left(i \frac{g'}{g} h \right)$. Mit diesen Daten lässt sich ebenfalls die Gaußkrümmung K einer Minimalfläche in ihrer Weierstraß-Darstellung berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 K = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} &= \frac{-\left(\operatorname{Re}(\frac{g'}{g}h)\right)^2 - \left(\operatorname{Im}(\frac{g'}{g}h)\right)^2}{\left(|g| + \frac{1}{|g|}\right)^4 |h|^4 \frac{1}{16}} \\
 &= \frac{-16 |g'|^2}{\left(|g| + \frac{1}{|g|}\right)^4 |h \cdot g|^2}.
 \end{aligned}$$

2.5 Das Plateau-Problem

Das Plateau-Problem ist benannt nach dem belgischen Physiker Joseph Antoine Ferdinand Plateau. Dieser hat experimentell untersucht, ob sich in jede beliebige Kontur eines geschlossenen Drahtes ein Seifenhäutchen einspannen lässt. In all seinen Experimenten war dies stets der Fall, egal wie kompliziert die Kontur des Drahtes gestaltet war. Die einzige Einschränkung bestand auf Grund der Schwerkraft in der Größe der Seifenschleife.

Die Frage ist nun, ob dies auch für Minimalflächen gilt, also ob sich in jede beliebige geschlossene Raumkurve eine Minimalfläche einspannen lässt.

2 Minimalflächen

Diese Frage wird als das Plateausche Problem bezeichnet und kann mit „ja“ beantwortet werden. Die Lösungen dieses Problems, also die Minimalflächen zu einer bestimmten Randkurve, können allerdings sehr unterschiedlich sein. Dies liegt daran, dass es Kurven gibt, in die sich mehr als eine Minimalfläche einspannen lassen, das heißt die Lösung ist nicht eindeutig. Die verschiedenen Minimalflächen können von verschiedenen topologischen Typ sein, das heißt sich in ihrem Geschlecht unterscheiden. Dabei sind zwei Flächen vom gleichen topologischen Typ, wenn sie sich durch Dehnen oder Stauchen ineinander überführen lassen.

Verdeutlichen kann man dies an Henkelflächen. Henkelflächen entstehen, wenn man aus der Sphäre zwei Kreisscheiben herausschneidet und in die Löcher einen Henkel einsetzt. Zwei Flächen sind dann vom gleichen topologischen Typ, wenn sie die gleiche Anzahl an Henkeln besitzen. So ist beispielsweise die Sphäre mit einem Henkel aus topologischer Sicht gleich dem Torus. Die Anzahl der Henkel bezeichnet man als Geschlecht der Fläche. Der Torus hat dementsprechend das Geschlecht 1.

Wie bereits erwähnt, kann es zu einer gegebenen Randkurve verschiedene Minimalflächen geben, die sich in ihrem Geschlecht unterscheiden. Die Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe, die von einer einfach geschlossenen Kurve berandet werden, sind die einfachsten Minimalflächen. Es kann allerdings zu der gleichen Randkurve eine Minimalfläche höheren Geschlechts bzw. von einem komplizierteren topologischen Typ geben, die einen kleineren Flächeninhalt hat. Wir wollen hier den Beweis skizzieren, dass es unter allen Flächen vom Typ der Kreisscheibe, die in eine beliebig vergebene einfach geschlossene Randkurve eingespannt werden können, eine mit geringstem Flächeninhalt gibt. Genauer gesagt soll folgender Satz bewiesen werden, wobei $D = \{z = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}; |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und \bar{D} ihr Abschluss sei.

Satz 2.5.1 *Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine einfach geschlossene C^1 -Kurve. Dann gibt es eine stetige Abbildung $X : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, die auf D unendlich oft differenzierbar ist, mit folgenden Eigenschaften:*

1. $X|_D$ ist schwach konform, d.h. $|X_{u_1}| = |X_{u_2}|$ und $X_{u_1} \perp X_{u_2}$,

2 Minimalflächen

2. $X|_D$ ist harmonisch, d.h. $\Delta X = 0$,
3. X bildet ∂D homöomorph auf Γ ab,
4. X minimiert den Flächeninhalt unter allen stetigen Abbildungen $\tilde{X} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, die auf D stetig differenzierbar sind und ∂D homöomorph auf Γ abbilden.

Die grundlegende Idee des Beweises ist, nicht den Flächeninhalt

$$A(X) = \int_D \sqrt{\det g} \, du = \int_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \, du$$

zu minimieren, sondern die Energie bzw. das Dirichletintegral

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_D |\partial X|^2 \, du = \frac{1}{2} \int_D (g_{11} + g_{22}) \, du, \quad (2.18)$$

da für jedes $X \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ gilt: $\mathcal{E}(X) \geq \mathcal{A}(X)$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn X schwach konform ist. Dabei bezeichnet g wieder die erste Fundamentalform mit $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle$.

Im ersten Schritt des Beweises wird die Energie bei vorgegebener Parametrisierung $\gamma : \partial D \rightarrow \Gamma$ unter allen X minimiert, für die $X|_{\partial D} = \gamma$ gilt. Mit Hilfe des Dirichletschen Prinzips lässt sich zeigen, dass die Abbildungen die bei gegebenen Randwerten die kleinste Energie haben, die harmonischen Abbildungen sind und dass diese eindeutig bestimmt sind.

Satz 2.5.2 (Dirichletsches Prinzip für stetige Randwerte) *Ist $\gamma \in C^0(\partial D)$ und $h \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ harmonisch auf D mit Randwerten γ , also $\Delta h = 0$ auf D und $h|_{\partial D} = \gamma$, so ist*

$$\mathcal{E}(h) \leq \mathcal{E}(f)$$

für alle $f \in C^0(\bar{D}) \cap C^1(D)$ mit $f|_{\partial D} = \gamma$.

Im nächsten Schritt wird die Parametrisierung γ nicht mehr vorgeschrieben, sondern nur noch die Bildmenge $\Gamma = \gamma(\partial D)$. Die Energie soll über eine Folge von Parametrisierungen $\gamma_k : \partial D \rightarrow \Gamma$ mit den zugehörigen harmonischen

2 Minimalflächen

Abbildungen h_k mit $h_k|_{\partial D} = \gamma_k$ minimiert werden. Dazu definiert man sich die Funktionenmenge

$$F_\Gamma = \{f \in C^1(D) \cap C^0(\bar{D}); f(\partial D) = \Gamma, f|_{\partial D} : \partial D \nearrow \Gamma\},$$

dabei bezeichnet $f|_{\partial D} : \partial D \nearrow \Gamma$ eine monotone Abbildung. In dieser Funktionenmenge wählt man sich eine Folge (f_k) mit $\mathcal{E}(f_k) \rightarrow e(\Gamma)$, wobei $e(\Gamma) := \inf \{\mathcal{E}(f); f \in F_\Gamma\}$. Nach Satz 2.5.2 können die Funktionen in (f_k) durch auf D harmonische Funktionen h_k mit denselben Randwerten ersetzt werden.

Satz 2.5.3 (Harnacksches Prinzip) *Wenn eine Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von auf \bar{D} stetigen und auf D harmonischen Funktionen gleichmäßig auf ∂D konvergiert, so konvergiert (h_k) mitsamt allen partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung lokal gleichmäßig auf D gegen eine harmonische Funktion h_∞ mit*

$$\mathcal{E}(h_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(h_k).$$

Nach diesem Satz muss also gezeigt werden, dass die Randwerte $\gamma_k = f_k|_{\partial D} = h_k|_{\partial D}$ nach Übergang zu einer Teilfolge gleichmäßig konvergieren. Dabei muss beachtet werden, dass \mathcal{E} invariant gegenüber Parametertransformationen ist, d.h. $\mathcal{E}(f_k \circ \phi) = \mathcal{E}(f_k)$, für $\phi : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ konform. Dadurch könnte (f_k) derart verändert werden, dass die Funktionenfolge $\tilde{f}_k = f_k \circ \phi_k$ keine konvergente Teilfolge mehr hat. Um dies zu verhindern, schließt man solche Parameterwechsel aus, indem man zu drei festen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \partial D$ drei willkürlich ausgewählte Werte p_1, p_2, p_3 in Γ auswählt und die Funktionenmenge

$$F_\Gamma^* := \{f \in F_\Gamma; f(z_i) = p_i, i = 1, 2, 3; \mathcal{E}(f) \leq E\},$$

betrachtet, wobei $E > e(\Gamma)$ eine feste Schranke ist. Es gilt:

Lemma 2.5.1 *Die Funktionenmenge F_Γ^* ist gleichgradig stetig.*

Satz 2.5.4 (Ascoli-Arzelá) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und (f_ν) eine beschränkte und gleichgradig stetige Folge auf M definierter Funktionen. Dann*

2 Minimalflächen

gibt es eine auf M gleichmäßig konvergente Teilfolge von (f_ν) .

Wenn eine Folge (f_k) in F_Γ^* gegeben ist, so lassen sich die Funktionen f_k durch auf D harmonische Funktionen h_k ersetzen. Diese sind wiederum in F_Γ^* enthalten und somit nach Lemma 2.5.1 gleichgradig stetig und beschränkt. Nach dem Satz von Ascoli-Arzelá besitzt die Folge (h_k) somit eine konvergente Teilfolge, die wiederum nach dem Harnackschen Prinzip gegen eine auf D harmonische Funktion h konvergiert, für die gilt:

$$\mathcal{E}(h) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}(h_k) = e(\Gamma) \quad (2.19)$$

Andererseits ist $h \in F_\Gamma^*$, da h als gleichmäßiger Limes monotoner Funktionen selbst wieder monoton ist und für jeden Punkt $p \in \Gamma$ eine Folge (z_k) mit $h(z_k) = p$ existiert. Da ∂D kompakt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano Weierstraß eine konvergente Teilfolge von (z_k) , mit $z_{k_j} \rightarrow z_\infty$. Also gilt $h(z_\infty) = p$, woraus folgt, dass $h|_{\partial D}$ surjektiv und damit $h \in F_\Gamma^*$ ist. Daraus folgt:

$$\mathcal{E}(h) \geq e(\Gamma) \quad (2.20)$$

Aus (2.19) und (2.20) folgt:

Satz 2.5.5 *Es gibt eine Funktionen $h \in F_\Gamma^*$ mit $\Delta h|_D = 0$ und $\mathcal{E}(h) = e(\Gamma)$.*

Man bezeichnet diese Lösungen als *Douglas-Rados-Lösungen*. Sei nun X eine Douglas-Rado Lösung, also eine harmonisch Abbildung $X \in F_\Gamma$ mit minimaler Energier. Es muss noch gezeigt werden, dass $X|_D$ schwach konform ist, genauer [2]:

Satz 2.5.6 *Ist $X \in F_\Gamma$ energieminimierend, $\mathcal{E}(X) = e(\Gamma)$, so ist X schwach konform, d.h.*

$$\widehat{g} := 4 \left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} \right\rangle = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} = 0,$$

mit $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle$, $i, j = 1, 2$.

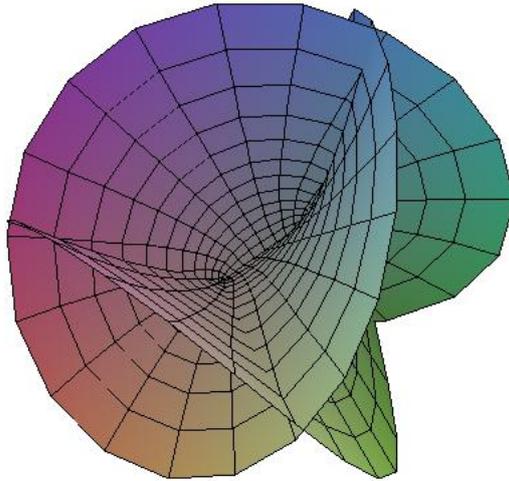


Abbildung 2.3: Henneberg-Fläche

2.6 Hennebergfläche-eine nichtorientierte Minimalflächen

Die bisher behandelten Beispiele von Minimalflächen sind alle orientierbar. Man nennt einer reguläre Fläche $X \subset \mathbb{R}^3$ orientierbar, falls es ein stetiges Einheitsnormalenfeld ν auf X gibt. Dabei gilt, dass ν genau dann stetig ist, wenn ν glatt ist. Ein typischer Vertreter für eine nichtorientierte Fläche ist das Möbiusband. Dieses entsteht, wenn man einen Papierstreifen einmal verdrillt und anschließend die beiden Enden zusammenklebt.

Die Henneberg Fläche ist die erste entdeckte nichtorientierte Minimalfläche. Ihre konforme Parametrisierung lautet:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} \cosh 2x \cos 2y \\ -\sinh x \sin y - \frac{1}{3} \sinh 3x \sin 3y \\ -\sinh x \cos y + \frac{1}{3} \sinh 3x \cos 3y \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Um zu zeigen, dass es sich um eine konforme Parametrisierung handelt, berechne ich die erste Fundamentalform. Die ersten partiellen Ableitungen

2 Minimalflächen

lauten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2 \sinh 2x \cos 2y \\ -\cosh x \sin y - \cosh 3x \sin 3y \\ -\cosh x \cos y + \cosh 3x \cos 3y \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} -2 \cosh 2x \sin 2y \\ -\sinh x \cos y - \sinh 3x \cos 3y \\ \sinh x \sin y - \sinh 3x \sin 3y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt aus den Additionstheoremen für \sinh und \cosh :

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = 4 \cosh^2 x (\sinh^2 2x + \sin^2 2y) = g_{22} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle.$$

Des weiteren ist $g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = 0$. Daraus folgt die Konformität von f . Bei der Parametrisierung f der Hennebergfläche handelt es sich nicht um eine Immersion, denn es existieren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, so dass $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ verschwinden. Um heraus zu finden, bei welchen Punkten \mathbb{R}^2 dies der Fall ist, betrachtet man zunächst die erste Komponente von $\frac{\partial f}{\partial y}$. Damit diese Null wird, muss $\sinh 2x = 0$, also $x = 0$, oder $\cos 2y = 0$, also $y = \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$, sein. Setzt man diese Werte in die zweite und dritte Komponente ein, so sieht man, dass die Nullstellen von $\frac{\partial f}{\partial x}$ gegeben sind durch die Menge

$$S := \left\{ (0, y); y = \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

. Betrachtung der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ führt zum selben Ergebnis. Damit sind die Singularitäten von f gegeben durch die Menge S Folglich ist $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus S}$ eine Immersion.

Wir wollen nun überprüfen, ob es sich bei der Henneberg Fläche tatsächlich um eine Minimalfläche handelt. Nach den Sätzen 2.4.1 und 2.4.2 ist $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus S}$

2 Minimalflächen

eine Minimalfläche, wenn $\Delta f = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cosh 2x \cos 2y \\ -\sinh x \sin y - 3 \sinh 3x \sin 3y \\ -\sinh x \cos y + 3 \sinh 3x \cos 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \cosh 2x \cos 2y \\ +\sinh x \sin y + 3 \sinh 3x \sin 3y \\ +\sinh x \cos y - 3 \sinh 3x \cos 3y \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Folglich handelt es sich um eine Minimalfläche.

Das Einheitsnormalenfeld, also die Gauß-Abbildung, berechnet sich aus der Formel $\frac{\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}}{\|\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}\|}$ zu:

$$\nu(x, y) = \frac{1}{\cosh x} \begin{pmatrix} \sinh x \\ \sin y \\ -\cos y \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Um zu sehen, dass die Henneberg-Fläche nicht orientierbar ist, betrachten wir nun eine symmetrische Eigenschaft der Fläche. Wie leicht nachzurechnen ist, ist $f(-x, y + \pi) = f(x, y)$. Setzt man den Punkt $(-x, y + \pi)$ in die Gaußabbildung ν ein, so sieht man

$$\nu(-x, y + \pi) = -\nu(x, y).$$

Die Orientierung wird also Umgekehrt. Die Gaußabbildung ist also nicht stetig und f damit eine nichtorientierte Minimalfläche.

2.7 Totalkrümmung von Minimalflächen

Die Totalkrümmung einer kompakten 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeit lässt sich mit Hilfe der Euler-Charakteristik \mathcal{X} nach der Gauß-Bonnet-Formel berechnen [4]:

Satz 2.7.1 (Gauß-Bonnet-Formel) $M \subset \mathbb{R}^3$ sei eine kompakte 2-dimen-

2 Minimalflächen

sionale (orientierbare) Untermannigfaltigkeit(ohne Rand). Dann gilt:

$$\int_M K dA = 2\pi \mathcal{X}(M), \quad (2.23)$$

wobei K die Gauß-Krümmung und $\mathcal{X} \in \mathbb{Z}$ die Euler-Charakteristik von M ist, die invariant unter Homöomorphismen und insbesondere unabhängig von der Art der Einbettung als Untermannigfaltigkeit ist.

Da es keine kompakten Minimalflächen gibt, lässt sich der Satz in dieser Form nicht auf Minimalflächen anwenden. Allerdings hat Ossermann folgenden Satz bewiesen[5]:

Satz 2.7.2 *Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine vollständige Minimalfläche mit endlicher Totalkrümmung. Dann ist U konform diffeomorph zu einer kompakten Riemannschen Fläche \bar{U} , aus der eine endliche Anzahl von Punkten entfernt wurde (Punktierung).*

Eine Riemannsche Fläche ist eine 1-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit. Des weiteren gilt folgender Satz [4]:

Satz 2.7.3 (S.Cohn-Vossen) *Es sei M eine nicht-kompakte, aber vollständige 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Dann gilt für die Totalkrümmung die Ungleichung;*

$$\int_M K dA \leq 2\pi \mathcal{X}(M), \quad (2.24)$$

mit Gleichheit zumindest dann, wenn die Gesamtfläche $\int_M dA$ endlich ist.

Aus diesem Satz folgt für Minimalflächen [5]

Satz 2.7.4 *Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine vollständige, eingebettete Minimalfläche mit endlicher Totalkrümmung, dann gilt für die Totalkrümmung von X :*

$$\int_X K dA = 2\pi(\mathcal{X} - k) = (2 - 2g - 2k), \quad (2.25)$$

dabei ist $\mathcal{X} = 2 - 2g - k$ die Euler-Charakteristik, g das Geschlecht der zugehörigen punktierten Riemannschen Fläche und k die Anzahl der Enden.

3 Die Kettenfläche

3.1 Die Kettenlinie

Als Kettenlinie bezeichnet man Kurven, die in ihrer Gestalt einer Kette entsprechen, die an ihren Enden fixiert ist. Dabei geht man davon aus, dass die Kette aus beliebig kleinen Gliedern besteht und dem Einfluss des Gravitationsfeldes unterliegt. In diesem Abschnitt werde ich untersuchen, durch welche Kurve Kettenlinien beschrieben werden können. Dazu kann man einen ähnlichen Ansatz wie beim Plateauschen Problem benutzen. Denn wann immer ein Körper sich selbst überlassen wird, nimmt er die Form an, die seine potentielle Energie minimiert. Als potentielle Energie bezeichnet man diejenige Energie, die ein Körper aufgrund seiner Lage im Gravitationsfeld hat. Fixiert man eine Kette an ihren Enden, wird sie also eine Gestalt annehmen, die ihre potentielle Energie minimiert.

s bezeichne nun $c(x) = (x, y(x))$, $x \in [a, b]$, die Kurve der Kettenlinie, wobei man sich die Kette aus einer großen Anzahl N von beweglichen starren Stangen vorstellt. Die Randwerte seien $y(a) = \alpha$ und $y(b) = \beta$. Mit $\tilde{c}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ ist die entsprechende nach Bogenlänge parametrisierte Kurve gemeint. Die i -te Stange befindet sich auf der Höhe y_i , hat die Länge s und ihre Masse beträgt μs . Für die Potentielle Energie gilt somit $V = \mu g \sum_i y_i s$. Die Länge der Stangen sei nun vernachlässigbar klein, dann geht $N \rightarrow \infty$ und da die Länge einer Kurve sich unter einer Umparametrisierung nicht verändert, gilt für die Länge der Kette:

$$L(c) = L(\tilde{c}) = s_b - s_a = \int_{s_a}^{s_b} 1 ds = \int_a^b |c'(x)| dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

3 Die Kettenfläche

mit $\tilde{y}(s_a) = a$ und $\tilde{y}(s_b) = b$. Unter der Bedingung, dass die Länge der Kette konstant gehalten wird, gilt daher für die potentielle Energie:

$$V = \mu g \int_{s_a}^{s_b} \tilde{y}(s) ds = \mu g \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Diese potentielle Energie gilt es nun zu minimieren. Dazu kann das Lemma (2.3.2) benutzt werden, nach dem gilt:

$\delta V(y, y') = 0$ für beliebige Variationen y_s von y mit $L(y, y') = \text{const}$ genau dann, wenn

$$\Leftrightarrow \delta(V(y, y') + \lambda L(y, y')) = \int_a^b ((y(x) + \lambda) \sqrt{1 + y'^2}) dx = 0 \quad (3.1)$$

für jede beliebige Variation von y , wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Man bestimmt nun die Lösungen von Gleichung (3.1) mit Hilfe der Eulerschen Differentialgleichung der Variationsrechnung. Dazu betrachtet man eine C^2 -Funktion

$$L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, p) \mapsto L(x, y, p)$$

mit vorgegebenen Randwerten α, β , die in unserem Beispiel gegeben ist durch $L(x, y, p) = (y(x) + \lambda) \sqrt{1 + y'^2}$, mit $p = y'$ und Lagrange Funktion genannt wird. Des weiteren sei

$$\mathcal{K} := \{ y \in C^2[a, b] \mid y \text{ reell}, y(a) = \alpha, y(b) = \beta \}$$

und

$$J : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}, J(y) := \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Nun muss $y \in \mathcal{K}$ so bestimmt werden, dass J minimal wird. Dazu betrachtet man Variationen von $\varphi \in \mathcal{K} : \varphi + sh$, mit $s \in \mathbb{R}$ und $h \in C^2$ reell mit $h(a) = h(b) = 0$ und setzt

$$F_h(t) := J(\varphi + sh)$$

3 Die Kettenfläche

Damit J in φ minimal ist, muss J in φ stationär sein, das heißt

$$\delta F_h(s) = 0,$$

wobei $\delta = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0}$. Diese geforderte Eigenschaft kann in eine Differentialgleichung gefasst werden, der Eulerschen Differentialgleichung der Variationsrechnung [3]:

Satz 3.1.1 *J wird in φ genau dann stationär, wenn φ auf $[a, b]$ die Gleichung*

$$\frac{d}{dx} L_p(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = L_y(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \quad (3.2)$$

erfüllt.

Dabei bezeichnen L_p bzw. L_y die partiellen Ableitungen $L_p = \frac{\partial L(x, y, p)}{\partial p}$ und $L_y = \frac{\partial L(x, y, p)}{\partial y}$.

In unserem Beispiel hängt L nicht von x ab und man kann daher folgendes Lemma verwenden[3].

Lemma 3.1.1 *Hängt L nicht von x ab, so ist für jede Lösung*

$$E_\varphi := L(\varphi, \varphi') - L_p(\varphi, \varphi')\varphi' = k \quad (3.3)$$

konstant.

Sei nun $L(x, y, y') = (y(x) + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}$ und sei y eine beliebige Lösung von (3.2). Dann ist: $L_p(y, y') = \frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Wendet man nun Lemma 3.1 an, folgt daraus:

$$y' = \sqrt{\frac{(y + \lambda)^2}{k^2} - 1}. \quad (3.4)$$

Bei Gleichung (3.4) handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung, die man sehr einfach durch Trennung der Variablen lösen kann, wobei λ durch

3 Die Kettenfläche

Normierung der Höhe y auf Null gesetzt werden kann, also

$$y' = \sqrt{\frac{y^2}{k^2} - 1}. \quad (3.5)$$

Die Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{k^2} - 1}}$$

ist

$$k \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{y}{k}\right) + x_0, \quad x_0 = \text{const}$$

Als Lösung von (3.5) ergibt sich daher:

$$y = k \cdot \cosh \frac{x - x_0}{k} \quad (3.6)$$

Diese Lösung ist bis auf Wahl der Konstanten k und x_0 eindeutig. Die gesuchte Kurve c der Kettenlinie lautet also:

$$c(x) = \left(x, k \cdot \cosh \frac{x - x_0}{k}\right).$$

3.2 Die Kettenfläche

Lässt man die eben bestimmte Kettenlinie $c(x) = \left(x, k \cdot \cosh \frac{x-x_0}{k}\right)$ um die x -Achse rotieren, so bezeichnet man die daraus resultierende Dreh- bzw. Rotationsfläche als Kettenfläche oder auch als Katenoid. Für $k = 1$ und $x_0 = 0$ ergibt sich das Standardkatenoid. Der Faktor k bewirkt eine zentrische Streckung des Standardkatenoids, wobei unter einer zentrischen Streckung eine Abbildung der Form $F(x) = rx$ für ein festes $r > 0$ versteht. Eine mögliche Parametrisierung der Kettenfläche lautet:

$$X(u_1, u_2) = (\rho(u_1)e^{iu_2}; u_1)$$

3 Die Kettenfläche

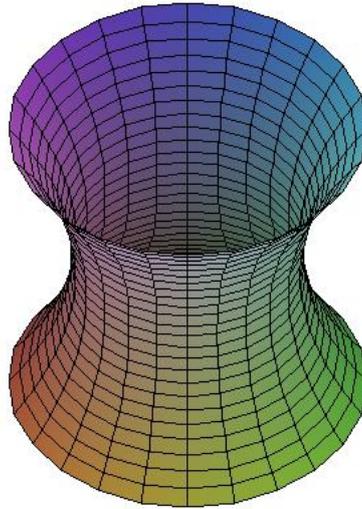


Abbildung 3.1: Die Kettenfläche

für $\rho(u_1) = \cosh x$ bzw.:

$$X(u_1, u_2) = (\cosh u_1 \cos u_2, \cosh u_1 \sin u_2, u_2)$$

In diesem Abschnitt werde ich beweisen, dass es sich bei der Kettenfläche um eine Minimalfläche handelt. Doch der Beweis zeigt noch mehr: Bei der Kettenfläche handelt es sich um die einzige gekrümmte Minimalfläche, die gleichzeitig eine Drehfläche ist. Bei der Drehfläche einer Geraden, die senkrecht zur Drehachse steht, entsteht eine Ebene oder rotationssymmetrische Teile einer Ebene. Es handelt sich bei dieser Rotationsfläche also ebenfalls um eine Minimalfläche, allerdings um eine nicht gekrümmten Minimalfläche. Für den Beweis, dass die Kettenfläche die einzige gekrümmte Rotationsminimalfläche ist, schauen wir uns Drehflächen zunächst etwas genauer an.

Drehflächen entstehen, wenn man eine ebene Kurve, die beispielsweise in der x - z -Ebene liegt um die z -Achse rotieren lässt. Eine genaue Definition lautet: Eine Fläche heißt Drehfläche oder Rotationsfläche, wenn sie durch Drehung einer regulären, ebenen C^2 - Kurve

$$\gamma : u \mapsto (\rho(u), z(u))$$

3 Die Kettenfläche

um die z-Achse im \mathbb{R}^3 entsteht [4]. Die Kurve γ bezeichnet man auch als Profilkurve. Diese stellen wir uns im Folgenden immer als Graph parametrisiert vor, also $\gamma(u_1) = (\rho(u_1), u_1)$. Die zugehörige Drehfläche besitzt dann eine Parametrisierung der folgenden Form:

$$X(u_1, u_2) = (\rho(u_1)e^{iu_2}; u_1) = \begin{pmatrix} \rho(u_1) \cos u_2 \\ \rho(u_1) \sin u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 sei $c := \cos u_2$ und $s := \sin u_2$. Daraus ergibt sich

$$X_{u_1} = (\rho'c, \rho's, 1) \text{ und } X_{u_2} = (-\rho s, \rho c, 0),$$

wobei $X_{u_i} = \frac{\partial X}{\partial u_i}$, $i = 1, 2$. Also folgt für die erste Fundamentalform $g = g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle$:

$$g_{11} = (\rho')^2 + 1 = |\gamma'|^2, \quad g_{22} = \rho^2 \text{ und } g_{12} = g_{21} = 0.$$

Zur Berechnung der zweiten Fundamentalform berechne ich zunächst den Einheitsnormalenvektor:

$$\nu = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_i} \times \frac{\partial X}{\partial u_j}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u_i} \times \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\|} = \frac{(0, 0, \rho')}{|\gamma'|}.$$

Außerdem gilt:

$$X_{u_1 u_1} = (\rho''c, \rho''s, 0), \quad X_{u_2 u_2} = (-\rho c, -\rho s, 0) \text{ und} \\ X_{u_1 u_2} = X_{u_2 u_1} = (-\rho's, \rho'c, 0),$$

wobei $X_{u_i u_j} = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}$ für $i, j = 1, 2$. Also folgt für die Weingartenabbildung L :

$$L = g^{-1} \cdot h = \begin{pmatrix} -\frac{\rho''}{|\gamma'|^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho|\gamma'|} \end{pmatrix}.$$

3 Die Kettenfläche

Da die Matrix der Weingartenabbildung bereits Diagonalgestalt hat, können die Eigenwerte und damit die Hauptkrümmungen von X direkt abgelesen werden:

$$\kappa_1 = -\frac{\rho''}{|c'|^3} = -\frac{\rho''}{(1+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \kappa_2 = \frac{1}{\rho|c'|} = \frac{1}{\rho(1+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wenn nun die Drehfläche eine Minimalfläche sein soll, muss die Summe der Hauptkrümmungen Null ergeben, denn es gilt:

X ist eine Minimalfläche genau dann, wenn $\mathcal{H} = H \cdot \nu = 0$, mit $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$. Das bedeutet:

$$\begin{aligned} \kappa_1 + \kappa_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{\rho''}{(1+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\rho(1+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \rho'' \cdot \rho - \rho'^2 &= 1. \end{aligned}$$

Dabei muss $\rho(u_1) \neq 0$ sein für alle $u_1 \in [a, b]$. Wäre $\rho = 0$ so würde sich die Gleichung zu $-\rho'^2 = 1$ ergeben. Da ρ stetig ist, ist also $\rho(u_1)$ entweder größer Null für alle $u_1 \in [a, b]$ oder kleiner Null für alle $u_1 \in [a, b]$. Man kann dabei annehmen, dass ρ in der rechten Halbebene liegt, also stets größer Null ist. Andernfalls kann dies durch Verschiebung erreicht werden. Man kann also nun durch ρ dividieren:

$$\rho'' = \frac{\rho'^2 + 1}{\rho}.$$

Es handelt sich hierbei um eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die durch folgende Substitution auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung gebracht werden kann:

$$\text{Setze } \rho' = z(p), \text{ dann ist } \rho'' = z \cdot z'$$

Dies liefert folgende Gleichung:

$$zz' = \frac{z^2 + 1}{\rho}$$

3 Die Kettenfläche

Die Differentialgleichung 1. Ordnung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden. Dies liefert:

$$\sqrt{z^2 + 1} = \rho \cdot c, \quad c = \text{const}$$

Resubstitution von $z = \rho'$ liefert:

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho'^2 + 1} &= \rho \cdot c_2 \\ \Leftrightarrow \rho'^2 &= \rho^2 \cdot c_2^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \rho' &= \pm \sqrt{\rho^2 \cdot c_2^2 - 1}\end{aligned}$$

Für den Fall $\rho' = +\sqrt{\rho^2 \cdot c_2^2 - 1}$ entspricht diese Gleichung der Differentialgleichung (3.5), dessen Lösung wir ja bereits bestimmt haben:

$$\rho = k \cdot \cosh \frac{x - x_0}{k}$$

für $k = \frac{1}{c}$.

Da $\rho > 0$ und $\cosh x \geq 1$, muss $c \geq 0$ gelten. Der Fall $\rho' = -\sqrt{\rho^2 c^2 - 1}$ kann daher ausgeschlossen werden.

Es handelt sich also bei der Profilkurve $\rho(u_1)$ um die Kettenlinie, deren Rotation bis auf Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{c_2}$ der Kettenfläche entspricht. Die Konstanten u_0 und c_2 lassen sich eindeutig durch die Aufhängepunkte der Kette bestimmen. Nach dem Satz von Picard Lindelöf ist die Lösung dieser Differentialgleichung eindeutig bestimmt, da $\rho \in C^2$ und damit lokal einer Lipschitzbedingung genügt. Es gibt also bis auf die Kettenfläche und ihre zentrischen Streckungen keine weitere Rotationsfläche, die gleichzeitig eine gekrümmte Minimalfläche ist.

Bemerkung: Man kann auch mit Hilfe des Variationsprinzips nachweisen, dass, bis auf zentrische Streckung mit dem Faktor k , das Katenoid die einzige gekrümmte Rotationsminimalfläche ist. Dabei geht man wieder von einer Kurve $c(x) = (x, y(x))$ aus, wobei $y : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ eine C^2 Funktion und $\tilde{c}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ die entsprechende nach Bogenlänge parametrisierte Kur-

3 Die Kettenfläche

ve ist. Der Flächeninhalt bei Drehung um die x-Achse ist dann:

$$A(y) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Nun benutzt man wie in Kapitel 3.1 über die Kettenlinie Gleichung (3.3) um y zu finden, so dass $\delta A(y) = 0$. Auf diese Art kommt man auf exakt die selbe Gleichung (3.5), dessen Lösung schon ausgerechnet wurde und als Lösung die Kettenlinie ergab.

3.3 Die Kettenfläche und Seifenblasen

Minimalflächen lassen sich mit Hilfe von Drähten und Seifenblasen verwirklichen. Um zu einer Kettenfläche zu gelangen, muss man zwei kreisförmige Drähte in eine Seifenlösung tauchen und herausziehen. Dabei sollten die Kreismittelpunkte übereinander liegen. Nun können sich verschiedene Seifenhäutchen bilden. Befinden sich die beiden Kreise in zu großem Abstand zueinander, so bilden sich zwei getrennte Seifenblasen, eine in jedem Kreis. Sind die Kreise nah genug beieinander, so können sich dagegen auch zusammenhängende Seifenhäutchen bilden. Diese bilden dann Kettenflächen oder Flächen aus drei zusammenhängenden Häutchen. Anschaulich ist klar, dass ein Seifenhäutchen, das zwischen zwei Kreise eingespannt, zerplatzt, wenn die Kreise immer weiter auseinander gezogen werden. Dies kann man auch mathematisch beschreiben.

Dazu betrachten wir nicht eine Vergrößerung des Abstandes, sondern eine Verkleinerung des Radius der beiden parallelen Kreisscheiben

$$k_{\pm} = \{(x_1)^2 + x_2^2 = r^2; x_3 = \pm 1\}.$$

Dies ist bis auf zentrische Streckung äquivalent. Die Frage ist nun, für welche Radien r die beiden Kreise Kettenflächen beranden können. Die Kettenflä-

3 Die Kettenfläche

chen lassen sich auch schreiben als

$$K_t = \{x; \rho(x) = t^{-1} \cosh tx_3\}$$

mit $t \in \mathbb{R}^{>0}$. Dann ist $\rho(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r$. Bei $x_3 = \pm 1$ ist also

$$r = t^{-1} \cosh t =: f(t) > 0.$$

Diese Funktion geht sowohl für $t \rightarrow 0$ als auch für $t \rightarrow \infty$ gegen ∞ und muss folglich nach dem Satz von Rolle ein Minimum $r_0 = f(z_0)$ besitzen. Für $r = r_0$ besitzt die Gleichung also genau eine Lösung, für jedes $r > r_0$ jedoch zwei Lösungen und für $r < r_0$ existiert keine Lösung. Das heißt, wenn die beiden parallelen Kreise eine Kettenfläche beranden sollen, muss für den Radius $r \leq r_0 = \min\{t^{-1} \cosh t; t > 0\}$ gelten. Haben die Kreise einen Radius von $r > r_0$, können sie keine Kettenfläche mehr beranden. Dies stimmt mit der Beobachtung überein, dass eine Kettenfläche aus Seifenhäutchen beim Auseinanderziehen der Kreise zerreißt.

Wie gerade festgestellt, entstehen für bestimmte Radien, bzw. für bestimmte Abstände der parallelen Kreise zwei verschiedene Kettenflächen. Mit Hilfe von Seifenhäutchen lässt sich jedoch nur eine der beiden jeweiligen Kettenflächen beobachten. Dies liegt daran, dass nur eines der Seifenhäutchen stabil ist. Das unstabilere Häutchen ist stärker nach innen gekrümmt und kann mit dem menschlichen Auge nicht wahrgenommen werden, da es innerhalb von Bruchteilen einer Sekunde in die stabilere Form umspringt.

Für einen bestimmten gegebenen Radius r kann man den Maximalabstand der beiden Kreise zueinander konkret berechnen. Umgekehrt kann man für einen gegebenen Abstand $d = 2s$ der Kreise zueinander den minimalen Radius berechnen, so dass die Kreise ein Katenoid beranden. Ich werde nun an einem Beispiel zeigen, wie man für einen gegebenen Radius r den Maximalabstand der Kreise bestimmen kann. Dazu betrachte ich Gleichung (3.6) und setze $x_0 = 0$, also:

$$y = k \cosh\left(\frac{x}{k}\right). \quad (3.7)$$

3 Die Kettenfläche

Die bei der Rotation um die x-Achse entstehenden Kreise, die die entstehende Kettenfläche beranden, haben einen bestimmten Radius r und einen bestimmten Abstand $d = 2s$ voneinander. Der Radius der beiden Kreise r sei nun fest vorgegeben. Wir können nun durch (r,s) und $(r,-s)$ die Koordinaten der Randpunkte der Kettenlinie ausdrücken. Damit wird (3.7) zu

$$r = k \cosh\left(\frac{s}{k}\right). \quad (3.8)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung erhält man durch Umformungen bei gegebenen

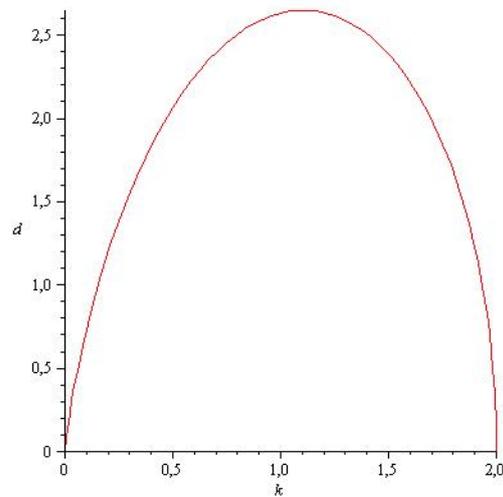


Abbildung 3.2: Abstand der Kreise in Abhängigkeit von k

Radius r eine Funktion für den Abstand in Abhängigkeit der Konstanten k :

$$d(k) = 2 \cdot s(k), \quad s(k) = k \operatorname{arcosh}\left(\frac{r}{k}\right). \quad (3.9)$$

Eine notwendige Bedingung dafür, dass der Abstand maximal wird, ist, dass die erste Ableitung von $s(k)$ gleich Null ist.

$$s'(k) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{r}{k}\right) - \frac{r}{\sqrt{r^2 - k^2}} = 0.$$

3 Die Kettenfläche

Die Lösung dieser Gleichung lautet $k \approx 0,5524341241 \cdot r$. Eingesetzt in Gleichung (3.9) liefert das:

$$d = 2s \approx 1,32548 \cdot r.$$

Liegt beispielsweise ein Radius $r \approx 2$ vor, so darf der Abstand der beiden Kreise maximal $d = 2.65097$ betragen.

An dem Beispiel $r = 2$ soll auch das Ergebnis verdeutlicht werden, dass für bestimmte Abstände der Kreise zwei Katenoide entstehen. Dazu betrachten wir den Graphen zu $d(k) = 2 \cdot s(k) = k \operatorname{arcosh}(\frac{2}{k})$. Man kann sehen, dass für jeden Wert des Abstandes unter dem Maximalwert zwei mögliche Lösungen k_1 und k_2 existieren.

Die Gleichung $d(k) = 2 \cdot k \operatorname{arcosh}(\frac{2}{k}) = 2$ liefert als Lösungen $k_1 \approx 0,4701899805$ und $k_2 \approx 1,6966758764$. Die entsprechenden Kettenflächen unterscheiden darin, dass die Kettenfläche mit $k = 0,47019$ stärker nach Innen gekrümmt ist. Diese stellt die nicht stabile Form der Kettenfläche da, das heißt sie kann nicht mit Hilfe von Seifenhäutchen realisiert werden. Es bildet sich stets die Kettenfläche mit $k = 1,6968$.

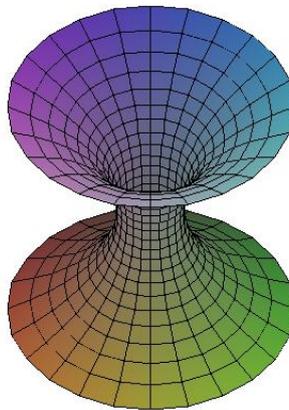


Abbildung 3.3: Kettenfläche für $k=0,4702$

3 Die Kettenfläche

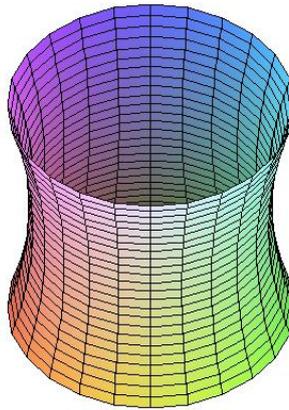


Abbildung 3.4: Kettenfläche für $k=1,69668$

3.4 Die Weierstraßdarstellung der Kettenfläche

Wie in Kapitel 2.4 beschrieben, lässt sich jede Minimalfläche als Realteil der Stammfunktion der holomorphen isotropen Abbildung $Y = (Y^1, Y^2, Y^3) : U \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ darstellen. Dabei ist $Y_1 = h \cdot \frac{1}{2}(-g + \frac{1}{g})$, $Y^2 = -h \cdot \frac{1}{2i}(g + \frac{1}{g})$, $Y^3 = h$, wobei h eine holomorphe und g eine meromorphe Funktion ist. Die Weierstraßdarstellung der Kettenfläche ist gegeben durch die meromorphe Funktion $g = e^z$, die holomorphe Funktion $h = 1$ und $U = \mathbb{C}$. Dann ist

$$Y(z) = \left(\frac{1}{2}(e^{-z} - e^z), -\frac{1}{2i}(e^{-z} + e^z), 1 \right)$$

und

$$\begin{aligned} \int Y(z) &= \left(-\frac{1}{2}(e^{-z} + e^z), -\frac{1}{2i}(-e^{-z} + e^z), z \right) \\ &= \left(-\cos \frac{z}{i}, -\sin \frac{z}{i}, z \right) \end{aligned}$$

3 Die Kettenfläche

Dabei steht $\int Y$ für die Stammfunktion F von Y , also $F' = Y$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int Y_1 &= -\cos \frac{z}{i} \\ &= -\cos\left(\frac{u_1}{i} + u_2\right) = -\left(\cos \frac{u_1}{i} \cos u_2 - \sin \frac{u_1}{i} \sin u_2\right) \\ &= -\cosh u_1 \cos u_2 + \frac{1}{i} \sinh u_1 \sin u_2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int Y_2 &= -\sin \frac{z}{i} \\ &= -\sin\left(\frac{u_1}{i} + u_2\right) \\ &= -\cos \frac{u_1}{i} \sin u_2 - \sin u_1 i \cos u_2 \\ &= -\cosh u_1 \sin u_2 - \frac{1}{i} \sinh u_1 \cos u_2.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$X = \operatorname{Re} \int Y = (-\cosh u_1 \cos u_2, -\cosh u_1 \sin u_2, u_1).$$

Dies ist also die Parametrisierung der Kettenfläche, die sich aus der Weierstraß-Darstellung $h = 1$ und $g = e^z$ ergibt.

3.5 Die Kettenfläche und Wendelfläche

Die Kettenfläche besitzt noch eine weitere interessante Eigenschaft. Durch Aufschneiden und anschließendes Verbiegen kann die Kettenfläche in die Wendelfläche überführt werden. Eine mögliche Parametrisierung der Wendelfläche ist gegeben durch

$$F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \sinh u_1 \sin u_2 \\ -\sinh u_1 \cos u_2 \\ -u_2 \end{pmatrix}$$

3 Die Kettenfläche

Der Name Wendelfläche erinnert an eine Wendeltreppe und tatsächlich lässt sich eine Verbindung zwischen den beiden Bezeichnungen herstellen. Bei der Wendelfläche handelt es sich um eine Regelfläche, das heißt die Fläche F wird von Geraden überdeckt. Genauer gesagt heißt eine reguläre Fläche Regelfläche, wenn sie eine Parametrisierung der folgenden Form besitzt:

$$F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u_1, u_2) = c(u_1) + u_2 v(u_1),$$

wobei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine regulär parametrisierte Kurve ist und $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine glatte Abbildung ist mit der Eigenschaft, dass $v(u_1), c'(u_1)$ linear unabhängig sind für alle $u_1 \in I$.

Im Fall der Wendelfläche wird die Fläche von der z -Achse und den davon ausgehenden Geraden $t \mapsto g_{u_2}(t) = t(\sin u_2, -\cos u_2, 0) + (0, 0, -u_2)$ mit $t = \sinh u_1$ gebildet. Die Geraden verlaufen also parallel zur xy -Ebene. Für $u_2 = 0$ ist $g_0(t) = t(0, -1, 0)$ also die y -Achse. Vergrößerung von u_2 bewirkt durch den Vektor $(0, 0, -u_2)$ eine Translation der Geraden nach unten, die gleichzeitig durch $(\sin u_2, \cos u_2, 0)$ gedreht wird. Anschaulich bedeutet dies, dass die Geraden wie die Stufen einer Wendeltreppe angeordnet sind, wobei man sich die Stufen beliebig klein denken muss.

Um die Eigenschaft, dass die Kettenfläche durch Aufschneiden und Verbiegen in die Wendelfläche überführt werden kann, mathematisch zu beschreiben, betrachten wir nun die zur Kettenfläche assoziierte Familie X_θ :

$$X_\theta = \operatorname{Re}\left(\int Y_\theta\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} \int Y\right)$$

mit $\theta \in [0, 2\pi]$. Dabei ist $Y : U \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ eine holomorphe isotrope Abbildung mit

$$Y = 2X_z, \quad X = \operatorname{Re}\left(\int Y\right).$$

Da Y holomorph und isotrop ist, gilt dies auch für die konstanten Vielfache $Y_\theta = e^{i\theta} Y$ mit $\theta \in [0, 2\pi]$. Man erhält also aus X_θ eine ganze Schar von Minimalflächen, die man die zu X assoziierte Familie nennt. Dabei kommt

3 Die Kettenfläche

dem Fall $\theta = \frac{\pi}{2}$ eine besondere Bedeutung zu. Da $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, gilt:

$$X^* = X_{\frac{\pi}{2}} = -\operatorname{Im}\left(\int Y\right).$$

Diese Fläche wird die zu X konjugierte Minimalfläche genannt. Im Fall der Kettenfläche haben wir $\int Y$ bereits aus der Weierstraß-Darstellung $h = 1, g = e^z$ berechnet:

$$\int Y = \begin{pmatrix} -\cosh u_1 \cos u_2 + \frac{1}{i} \sinh u_1 \sin u_2 \\ -\cosh u_1 \sin u_2 - \frac{1}{i} \sinh u_1 \cos u_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$X^* = X_{\frac{\pi}{2}} = -\operatorname{Im}\left(\int Y\right) = \begin{pmatrix} \sinh u_1 \sin u_2 \\ -\sinh u_1 \cos u_2 \\ -u_2 \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht exakt der oben angegebenen Parametrisierung der Wendelfläche. Die zur Kettenfläche konjugierte Minimalfläche entspricht also der Wendelfläche.

Des Weiteren gilt, dass sich jede Minimalfläche in der zu X assoziierten Familie darstellen lässt aus X und der zu X konjugierten Minimalfläche X^* über:

$$X_\theta = (\cos \theta)X + (\sin \theta)X^*.$$

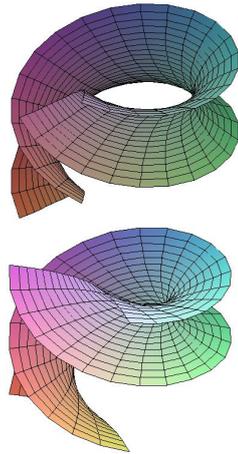
Im Fall der Kettenfläche ergibt sich

$$X_\theta = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \cosh u_1 \cos u_2 + \sin(\theta) \sinh u_1 \sin u_2 \\ -\cos(\theta) \cosh u_1 \sin u_2 - \sin(\theta) \sinh u_1 \cos u_2 \\ \cos(\theta)u_1 - \sin(\theta)u_2 \end{pmatrix}.$$

Die X_θ entsprechen den Zwischenstufen der Deformation von der Kettenfläche zur Wendelfläche.

Anschaulich lässt sich das so verdeutlichen: Man schneidet die Kettenfläche entlang ihrer Profilkurve auf und zieht die Enden auseinander, wobei die

3 Die Kettenfläche



Fläche verbogen wird. Man kann also daraus den Schluss ziehen, dass es sich bei allen Zwischenstufen wieder um Minimalflächen handelt. Insbesondere folgt daraus, dass es sich auch bei der Wendelfläche um eine Minimalfläche handelt.

Man kann sogar zeigen, dass es sich bei einer Fläche, die sowohl eine Minimal- als auch eine Regelfläche ist, entweder um eine Ebene oder die Wendelfläche handeln muss.

Satz 3.5.1 *Gegeben sei eine Regelfläche $X(u, v) = c(u) + vb(u)$ für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ein Vektorfeld $b(u)$ längs c mit $|b(u)| = 1$ und $b(u) \perp c'(u)$ für alle $u \in I$. Dann ist X eine Minimalfläche genau dann, wenn X eine Ebene oder eine Wendelfläche ist.*

Beweis: Wenn X eine Wendelfläche oder eine Ebene ist, haben wir schon gesehen, dass X eine Minimalfläche ist.

Sei also nun eine minimale Regelfläche X wie oben gegeben. Dann ist zu zeigen, dass es ein konstantes v_0 gibt, so dass $\tilde{c} : U \rightarrow X(u, v_0)$ eine Gerade ist und $\tilde{X}(u, v) = \tilde{c}(u) + vb(u)$ eine Wendelfläche ist. Da $b(u) = \frac{\partial X}{\partial v}$ eine Asymptotenrichtung ist und $\frac{\partial X}{\partial u} \perp \frac{\partial X}{\partial v}$ folgt mit Satz 2.1.3, dass $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ an jeder Stelle eine Asymptotenrichtung ist, also $h_u(X_u, X_u) = \langle L_u(X_u), X_u \rangle = 0$, wobei h_u die zweite Fundamentalform im Punkt u , L_u die Weingartenabbildung im Punkt u und $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ ist.

Es gilt also $h_u(X_u, X_u) = h_u(c'(u) + vb'(u), c'(u) + vb'(u)) = 0$. Sei nun

3 Die Kettenfläche

$c_v = c(u) + vb(u)$, dann ist c_v für jedes v eine Kurve in X . Nach dem Satz von Meusnier (siehe z.B. [1]) gilt dann:

$$h_u(c'_v, c'_v) = h_u(X_u, X_u) = \kappa_{nor}(X_u) = \langle c''_v, \nu \rangle = 0,$$

wobei $\nu = X_u \times X_v = c' \times b + v \cdot b' \times b$ der Normalenvektor ist. Es ist

$$\langle c''_v, \nu \rangle = \langle c'', c' \times b \rangle + v (\langle c'', b' \times b \rangle + \langle b'', c' \times b \rangle) + v^2 \langle b'', b' \times b \rangle = 0.$$

Daraus folgt, dass X_u genau dann Asymptotenlinie von X ist, wenn:

1. $\langle c'', c' \times b \rangle = 0$
2. $\langle c'', b' \times b \rangle + \langle b'', c' \times b \rangle = 0$
3. $\langle b'', b' \times b \rangle = 0$

Aus 3. lässt sich schließen, dass b'', b', b linear abhängig sind und daher existieren für $b' \neq 0$ $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{d}{du}(b \times b') = b \times b'' = b \times (\gamma b' + \delta b) = \gamma b \times b'$. Die von b und b' aufgespannte Ebene ist also konstant und man kann annehmen, dass es die Ebene \mathbb{C} ist.

Aus 1. folgt, dass $c'' \in \text{span}\{c', b\}$. Es existieren also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so dass $c'' = \lambda c' + \mu b$. Da $\langle c'', c' \rangle = \lambda |c'|^2 + \underbrace{\mu \langle c', b \rangle}_{=0}$, folgt

$$c'' = \lambda b. \tag{3.10}$$

Also ist $\langle c'', b' \times b \rangle = 0$ und damit folgt aus 2., dass b'', c', b linear abhängig sind, das heißt es existieren $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, so dass $b'' = \sigma c' + \tau b$. Andererseits gilt nach 3., dass $b'' = xb + yb'$, für $x, y \in \mathbb{R}$. Also gilt entweder $b'' = rb$ (Fall A) oder b, b'' spannen dieselbe Ebene auf wie b, b' (Fall B).

Fall B ergibt direkt zusammen mit 2., dass $c' \in \text{span}\{b, b'\} = \mathbb{C}$. Da $c' \perp b$ und $b' \perp b$ ist c' ein Vielfaches von b' . Also liegt c in der Ebene \mathbb{C} und da auch $b \in \mathbb{C}$, folgt dass $\text{Bild}X \subset \mathbb{C}$. Fall B ergibt also eine Regelfläche, die eine Ebene ist.

Fall A: Da $b' \perp b$ und die Multiplikation mit i einer Drehung um 90° ent-

3 Die Kettenfläche

spricht, ist $b' = \delta ib$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} b'' &= \delta' ib + \delta ib' \\ \Rightarrow r \cdot b &= \delta' ib + \delta ib = \frac{\delta'}{\delta} b' + \delta ib. \end{aligned}$$

Also muss $\delta' = 0$ gelten und δ ist somit konstant. Dann folgt

$$\begin{aligned} r \cdot b &= \delta ib' \Rightarrow r'b + rb' \\ &= \delta rib, \end{aligned}$$

also ist auch r konstant. Man kann also nun einfach die Lösungen der Differentialgleichung $b'' = rb$ bestimmen zu

$$b(u) = e^{iku}, \quad k = \text{const.}$$

Aus (3.10) folgt, dass $c'' \in \mathbb{C}$ und da $c' \perp c''$ gilt $\langle c', e_3 \rangle = s \cdot u$, $s = \text{const.}$ Des weiteren folgt aus $c' \perp b$, dass

$$c'(u) = t \cdot ie^{iku} + sue_3,$$

mit $t = \text{const}$, da aus $|c'|^2 = 1$ folgt, dass $s^2 + t^2 = 1$. Folglich ist bis auf zu vernachlässigende Translation $c(u) = xe^{iku} + yu^2e_3$. Dann ist $\tilde{c} = c + v_0b = tue_3$ für $v_0 = x$ eine Gerade und

$$\tilde{X}(u, u) = \tilde{c}(u) + vb(u) = u^2e_3 + v(\cos(ku), \sin(ku), 0)$$

die Wendelfläche.

3.6 Geometrische Eigenschaften der Kettenfläche

In diesem Kapitel will ich mich näher mit den geometrischen Eigenschaften der Kettenfläche beschäftigen.

3 Die Kettenfläche

Dazu werde ich zunächst die wichtigsten geometrischen Größen berechnen: Die erste Fundamentalform $g = g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle, i, j = 1, 2$ lässt sich aus den Ableitungen

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} \sinh u_1 \cos u_2 \\ \sinh u_1 \sin u_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} -\cosh u_1 \sin u_2 \\ \cosh u_1 \cos u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnen:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \cosh^2 u_1 & 0 \\ 0 & \cosh^2 u_1 \end{pmatrix}.$$

Das Einheitsnormalenfeld, also die Gaußabbildung, kann man wie folgt berechnen:

$$\nu(u_1, u_2) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1} \times \frac{\partial X}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \times \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|} = \frac{1}{\cosh u_1} \begin{pmatrix} -\cos u_2 \\ -\sin u_2 \\ \sinh u_1 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Fundamentalform $h = h_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle, i, j = 1, 2$ lässt sich aus den zweiten Ableitungen berechnen:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_1} = \begin{pmatrix} \cosh u_1 \cos u_2 \\ \cosh u_1 \sin u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_2} = \begin{pmatrix} -\cosh u_1 \cos u_2 \\ -\cosh u_1 \sin u_2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} = \begin{pmatrix} -\sinh u_1 \sin u_2 \\ \sinh u_1 \cos u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_1}$$

Daraus folgt:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $h_{12} = h_{21} = g_{12} = g_{21} = 0$, sind u_1 und u_2 Krümmungslinienparameter. Die Weingartenabbildung ist

3 Die Kettenfläche

$$L = g^{-1} \cdot h = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2 u_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 u_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cosh^2 u_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 u_1} \end{pmatrix}.$$

Da die Weingartenabbildung Diagonalgestalt hat, können die Eigenwerte und damit die Hauptkrümmungen direkt abgelesen werden. Es gilt also:

$$\kappa_1 = \frac{1}{\cosh^2 u_1}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{\cosh^2 u_1}$$

Dabei entspricht κ_1 der Krümmung der ebenen Profilkurve $\gamma(u_1) = (u_1, \cosh u_1)$.

Diese lässt sich berechnen aus der Formel:

$$\det \frac{(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3} = \frac{1}{\cosh^2 u_1} = \kappa_1$$

Die Krümmungslinien des Katenoids sind die Breitenkreise und Meridiane. Diese ergeben sich, indem man eine der Variablen in $X(u_1, u_2)$ konstant setzt. Für $u_1 = k = \text{const}$ ergibt sich damit die Krümmungslinie

$$c_1(t) = \begin{pmatrix} \cosh k \cos t \\ \cosh k \sin t \\ k \end{pmatrix},$$

welche die Breitenkreise darstellen.

Für $u_2 = k = \text{const}$ ergeben sich als Krümmungslinien die Meridiane

$$c_2(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \cos k \\ \cosh t \sin k \\ t \end{pmatrix}.$$

Die Gaußkrümmung K einer regulären Fläche ist definiert als

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2,$$

wobei κ_1 und κ_2 den eben berechneten Hauptkrümmungen entsprechen.

3 Die Kettenfläche

Für die Gaußkrümmung der Kettenfläche gilt also:

$$K(u_1, u_2) = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{1}{\cosh^2 u_1} \cdot \left(-\frac{1}{\cosh^2 u_1}\right) = -\frac{1}{\cosh^4 u_1}.$$

Als nächstes will ich die Oberfläche einer Kettenfläche mit der eines Zylinders, mit gleich radien und Abstand der Randkreise. Dabei gehe ich vom Standardkatenoid aus, setze also $k = 1$, $x_0 = 0$ in Gleichung (3.6) ein: $y = \cosh(x)$. Des weitern sei der Abstand der beiden Randkreise zueinander 2, dann ergibt sich aus Gleichung (3.8) $r \approx 1.543080635$. Für die Oberfläche einer Rotationsfläche gilt:

$$A = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Für die Kettenfläche ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-1}^1 \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \cosh^2 x dx \\ &= 5,62686\pi \end{aligned}$$

Die Mantelfläche eines Zylinders mit Radius $r = 1.543080635$ und einem Abstand $d = 2s = 2$ berechnet sich einfach aus der Formel $A = 2\pi \cdot r \cdot d$ zu $A = 6.1723\pi$. Der Flächeninhalt der Kettenfläche ist also wie zu erwarten war kleiner.

Mit Hilfe von Gleichung (2.25) lässt sich die Totalkrümmung der Kettenfläche leicht berechnen. Die zur Kettenfläche konforme und diffeomorphe kompakte Riemannsche Fläche ist die Sphäre, aus der zwei Punkte entfernt wurden. Daraus ergibt sich, dass das Geschlecht Null ist und da das Katenoid 2 Enden hat, folgt:

$$\int_X K dA = 2\pi(2 - 2g - 2k) = 2\pi(2 - 0 - 4) = -4\pi.$$

Das Katenoid lässt sich sogar über seine Totalkrümmung charakterisieren

3 Die Kettenfläche

[5]:

Satz 3.6.1 *Die Kettenfläche ist die einzige, nicht einfach zusammenhängende Minimalfläche mit einer Totalkrümmung von -4π .*

Literaturverzeichnis

- [1] Bär, Christian.: *Elementare Differentialgeometrie*, De Gruyter 2000
- [2] Eschenburg, Jost: *Differentialgeometrie und Minimalflächen*, 2., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, Springer 2007
- [3] Königsberger, K.: *Analysis 2*, 5., korrigierte Auflage, Springer 2004
- [4] Kühnel, W: *Differentialgeometrie, Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*, 3. Auflage, Vieweg 2005
- [5] Osserman, Robert, *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n* , Annals of Math., 80(1964)340-364
- [6] http://www.math.utoledo.edu/wente_torus.html

Abbildungsverzeichnis

2.1	Scherksche Minimalfläche	11
2.2	Wente Torus	15
2.3	Henneberg-Fläche	26
3.1	Die Kettenfläche	34
3.2	Abstand der Kreise in Abhängigkeit von k	40
3.3	Kettenfläche für $k=0,4702$	41
3.4	Kettenfläche für $k=1,69668$	42