Intrinsische Torsion und Ricci-Krümmung von SU(3)-Strukturen

Diplomarbeit

Departement Mathematik
der Universität Hamburg

eingereicht von Florian Hanisch

13. April 2006

Gutachter der Diplomarbeit:	Prof. Dr. U. Semmelmann
Zweitgutachter der Diplomarbeit :	Prof. Dr. V. Cortés Suárez

Danksagung

Mein Dank gilt vor allem Uwe Semmelmann und Gregor Weingart.

Bei Uwe möchte ich mich für die gute Zusammenarbeit sowie die zeitintensive und geduldige Betreuung, auch über das Ende seiner Lehrtätigkeit in Hamburg hinaus, bedanken. Gregor möchte ich für die vielen interessanten und lehrreichen Diskussion in seiner „Hamburger Zeit“ und in Bonn danken, die für mich nicht nur bei der Erstellung dieser Arbeit eine große Hilfe waren sondern mir auch viel Einsicht in Mathematik vermittelten.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Beschreibung von $SU(3)$-Strukturen auf 6-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Schwerpunkt auf ihrer Charakterisierung durch die intrinsische Torsion. Motiviert durch Konzepte aus der String-Theorie werden im Spezialfall halbflacher $SU(3)$-Strukturen Krümmungseigenschaften dieser speziellen Geometrien diskutiert.

Die Holonomiegruppe des Levi-Civita-Zusammenhangs einer orientierten riemannschen Mannigfaltigkeit ist im generischen Fall $SO(n)$. Die Reduktion der Holonomie auf eine Untergruppe $G \subset SO(n)$ führt zu Einschränkungen der geometrischen Eigenschaften der betrachteten Metrik. Beispielsweise ist durch $G \subset U(n/2)$ die Klasse der Kählermannigfaltigkeiten ausgezeichnet und $G \subset SU(n/2)$ (Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten) impliziert stets Ricci-Flachheit. Allgemeiner führt eine Reduktion etwa zu Einschränkungen an den Krümmungstensor, wie in [11] dargestellt.
Eine Verallgemeinerung dieses Konzepts besteht darin, nur noch eine Reduktion der Strukturgruppe der Mannigfaltigkeit auf $G \subset SO(n)$ anzunehmen. Reduktionen auf $SU(n/2)$ oder $U(n/2)$ bilden dabei nicht nur einen Oberbegriff für den Calabi-Yau- und Kähler-Fall, sondern umfassen auch wichtige Klassen wie Nearly Kähler- oder hermitesche Mannigfaltigkeiten. In dieser Situation existieren ebenfalls Zusammenhänge, deren Holonomie auf G reduziert ist, sie sind im allgemeinen aber nicht mehr torsionsfrei. Ein Anteil der Torsion kann genutzt werden, um die verschiedenen Reduktionen zu klassifizieren. Dies wurde für die Gruppen $U(n/2)$ und $SU(n/2)$ in [26] und [9] durchgeführt, in der vorliegenden Arbeit wird für $n = 6$ ein alternativer Zugang zu der Zerlegung der intrinsischen Torsion diskutiert, der sich in der Diskussion der Torsionsabhängigkeit der Ricci-Krümmung als hilfreich erweist.

Halbflache $SU(3)$-Strukturen stellen ein speziellen Fall in dieser Klassifizierung dar, der sowohl in der Mathematik als auch in der Physik von Interesse ist. Das mathematische Interesse liegt u.a. darin begründet, dass mit Hilfe dieser Strukturen Beispiele von Metriken, deren Holonomie in G_2 enthalten ist, konstruiert wurden. Trägt M^6 eine $SU(3)$-Struktur und ist I ein hinreichend kleines Intervall, so kann auf $\mathbb{M}^7 := M^6 \times I$ eine gewarpte Produktstruktur definiert werden, die implizit eine Metrik definiert. Für diese wurde in [9], aufbauend auf [30], gezeigt: Die Holonomie der Metrik auf $\mathbb{M}^7$ liegt genau dann in G_2, wenn die $SU(3)$-Struktur auf M^6 halbflach ist.
Innerhalb der Physik treten halb-flache Strukturen im Rahmen der Kompaktifizierung von Typ-II-Stringtheorien bei Präsenz von Hintergrundflüssen auf. Sie werden dort als Verallgemeinerung von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten verwendet. Letztere treten bei Kompaktifizierungen mit verschwindenden Flüssen in sogenannten Mirror-Paaren $(Y, \tilde{Y})$ auf, eine Typ-IIA-String-Theorie, kompaktifiziert auf Y, ist dabei physikalisch äquivalent zu einer Typ-IIB-Theorie, kompaktifiziert auf $\tilde{Y}$. Die so resultierende Symmetrie $Y \leftrightarrow \tilde{Y}$ geht bei nichttrivialen Flüssen verloren und halbflache Strukturen wurden in diesem allgemeineren Kontext in [28] als neuer Mirror-Partner vorgeschlagen. Im Gegensatz zu Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten sind diese Strukturen im allgemeinen weder Ricci-flach noch Einstein, so dass die Einsteingleichung nicht trivial erfüllt sondern Terme in Abhängigkeit von der intrinsischen Torsion als Maß der Abweichung vom Calabi-Yau-Fall zu erwarten sind. Dies führt auf die Vermutung,

dass die Ricci-Krümmung nur quadratisch von der intrinsischen Torsion abhängt. Die Diskussion dieser Vermutung, ausgehend von einer Darstellung der Ricci-Krümmung in Termen der intrinsischen Torsion und der Beiträge ihrer verschiedenen $SU(3)$-Komponenten, ist zweiter Schwerpunkt der Arbeit.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 wird der physikalische Kontext, in dem halbflache $SU(3)$-Strukturen auftreten, näher erläutert. Die Art und Weise, wie physikalische Erwägungen auf derartige Strukturen führen, ist auch aus mathematischer Sicht interessant. Nach einigen motivierenden Bemerkungen zur Stringtheorie werden in 2.1 die im Folgenden relevanten Aspekte dieser Theorie diskutiert. Übergeordnetes Thema ist dabei die Reduktion von zehn auf vier Dimensionen durch Kompaktifizierung, Grundzüge dieses Konzepts werden in 2.2 dargestellt. Abschnitt 2.3 listet zunächst die verschiedenen Typen supersymmetrischer Stringtheorien und die sie verbindenden Symmetrien auf, um dann die hier bedeutsame T-Dualität sowie die Mirror-Symmetrie zwischen Typ IIA- und Typ IIB-Stringtheorien bei Kompaktifizierung auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten etwas detaillierter zu beschreiben. Gegenstand von 2.4 ist die allgemeinere Calabi-Yau-Kompaktifizierung bei Präsenz von Hintergrundflüssen sowie der Zusammenbruch von Mirror-Symmetrie bei nicht-trivialem NS-NS-Fluss in einer Typ IIB-Theorie. In Abschnitt 2.5 wird schließlich der Vorschlag aus [28], wie bei der Kompaktifizierung durch die Wahl der allgemeineren Geometrien ein Teil der Mirror-Symmetrie wiederhergestellt werden kann, vorgestellt. Schwerpunkt liegt dabei auf der Motivierung der Einführung halbflacher Mannigfaltigkeiten.
Kapitel 3 dient der Zusammenfassung der benötigten differentialgeometrischen Konzepte. Aufbauend auf die Diskussion von Hauptfaserbündeln in 3.1 wird in 3.2 die Reduktion von Strukturgruppen sowie der Begriff der G-Strukturen erläutert und eine Charakterisierung durch Tensorfelder angegeben. Nach Diskussion des Zusammenhangsbegriffs auf Vektorbündeln wird in 3.3 der Spezialfall des G-Zusammenhangs und seine Verträglichkeit mit G-Strukturen behandelt. Vergleichend wird zusätzlich das restriktivere Konzept der Holonomie eines Zusammenhangs angesprochen. In Abschnitt 3.4 wird durch Projektion der Torsion eines G-Zusammenhangs seine intrinsische Torsion eingeführt, die im Folgenden zur Klassifikation von G-Strukturen genutzt wird.
In Kapitel 4 sind Eigenschaften allgemeiner Geometrien mit $SU(3)$-Struktur zusammenfasst. Aufbauend auf die Fixierung von Konventionen und komplexer sowie reeller Basen in 4.1 wird in 4.2 die Beschreibung von $SU(3)$-Strukturen durch riemannsche Metrik, Kählerform und komplexe Volumenform diskutiert sowie diverse Identitäten, die diese Tensoren involvieren, bewiesen. Als Vorbereitung der Zerlegung der intrinsischen Torsion wird in 4.3 die Darstellungstheorie der Gruppe $SU(3)$ behandelt mit dem Resultat der expliziten Charakterisierung aller irreduzibler Darstellungen. Das angegebene Verfahren wird in Abschnitt 4.4 angewendet, um die Dekomposition der reellen k-Formen in $SU(3)$-irreduzible Summanden explizit anzugeben.
In Kapitel 5 wird ein neuer Zugang zur Zerlegung der intrinsische Torsion einer $SU(3)$-Struktur diskutiert, der auf der Abspaltung eines Anteils $\Lambda^1 T^*M \otimes \mathbb{R}$ und nachträglicher Identifizierung $End(TM) \cong \Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^\perp$ beruht. Eine komplette Zerlegung in irreduzible

Summanden sowie die explizite Form der Projektoren wird angegeben. In 5.2 wird gezeigt, wie die so definierten Torsionskomponenten mit den äußeren Ableitungen von Kählerform und komplexer Volumenform identifiziert werden können. Das Resultat weicht von den Ergebnissen in [9] ab, dort wurde eine Torsionskomponente nicht korrekt identifiziert. In Abschnitt 5.3 werden einige geometrische Konzepte durch Restriktionen an die intrinsische Torsion charakterisiert. In diesem Zusammenhang wird der Begriff der „Halbflachheit“ diskutiert.

Kapitel 6.1 dient der Diskussion von Krümmungseigenschaften halbflacher Mannigfaltigkeiten bzw. solcher mit $SU(3)$-Struktur. Nach einer allgemeinen Einführung in Krümmungsbegriffe in 6.2 erfolgt in Abschnitt 6.3 die explizite Beschreibung der Ricci-und $*$-Ricci-Krümmung derartiger Mannigfaltigkeiten in Termen der intrinsischen Torsion. Daran anschließend wird in 6.4 der Beitrag der einzelnen $SU(3)$-irreduziblen Summanden zu den Krümmungen aufgeschlüsselt und es erfolgt eine erste Diskussion der Vermutung über die Torsionsabhängigkeit der Krümmung. Anhand einer 1-Parameter-Familie halbflacher Mannigfaltigkeiten aus dem Bereich der Nilmannigfaltigkeiten wird mit dieser Vorarbeit gezeigt, dass die Ricci-Krümmung solcher Geometrien nicht notwendig quadratisch in der intrinsischen Torsion ist sondern bereits lineare Terme auftreten können, die Vermutung also für allgemeine halbflache Mannigfaltigkeiten falsch ist.

Anmerkung zu der Notation

Um unübersichtliche Ausdrücke zu vermeiden, wird an einigen Stellen nicht rigoros zwischen Bündeln und Schnitten sowie zwischen Bündel und Faser unterschieden.
So bezeichnet $[\![\Lambda^{1,1}]\!]$ sowohl ein Bündel als auch die Schnitte darin und Elemente von ΛT^*M werden an einigen Stellen kurz als „Formen“ bezeichnet. In den darstellungstheoretischen Abschnitten werden stets die Bündel zerlegt, die induzierten Abbildungen zwischen Schnitten (etwa Projektoren) werden aber mit demselben Symbol gekennzeichnet wie diejenigen zwischen Bündeln. Schließlich bezeichnet $\mathfrak{su}_3$ sowohl die Liealgebra, als auch das adjungierte Bündel $\mathfrak{su}_3(M)$ (siehe [43]), das im Falle einer Reduktion der Strukturgruppe auf $SU(3)$ existiert, auf dessen Einführung in dieser Arbeit aber verzichtet wurde. Dieser Missbrauch der Notation sollte aber nicht zu Missverständnissen führen.

2 Kompaktifizierung von Stringtheorien

2.1 Stringtheorie und Vereinheitlichung

Die Stringtheorie ist ein Ansatz für eine vereinheitlichte Theorie der fundamentalen Wechselwirkungen. Nach heutigem Kenntnisstand werden 4 solche Wechselwirkungen in der Natur beobachtet:

- elektromagnetische Wechselwirkung
- schwache Wechselwirkung
- starke Wechselwirkung
- Gravitation

Die ersten drei dieser Wechselwirkungen werden quantenfeldtheoretisch in bereits teilweise vereinheitlichter Form im Rahmen des Standardmodells (siehe [17] oder [39]) beschrieben, dabei handelt es sich um eine Eichtheorie mit Eichgruppe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Die Vorhersagen dieser Theorie konnten mit großer Genauigkeit experimentell bestätigt werden.
Die klassische Gravitation wird durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben (siehe [37]), einer Theorie der Geometrie der Raumzeit bei der es sich nicht um eine Quantentheorie handelt. Ihre Vorhersagen sind ebenfalls gut bestätigt, desweiteren wurden Effekte, die auf eine quantisierte Theorie der Gravitation zurückzuführen wären, bislang nicht beobachtet. Dies lässt sich qualitativ verstehen, wenn man die Größenordnungen abschätzt, in denen solche Effekte zu erwarten wären. Die sogenannte Planckmasse $m_P = (\hbar G/c^3)^{3/2} \approx 10^{19} GeV/c^2$ und die Plancklänge $l_P = (\hbar c/G)^{1/2} \approx 10^{-33} cm$ ergeben sich als einzige Kombinationen der in den Theorien auftretenden fundamentalen Konstanten $G_{Newton}, \hbar, c$ mit Einheit einer Masse bzw. Länge. Sie liegen weit jenseits der Größenordnungen, die momentan experimentell realisierbar sind.

Beide Theorien zusammengenommen, d.h. jede angewendet auf ihren Gültigkeitsbereich, liefern eine experimentell glänzend bestätigte Beschreibung der physikalischen Realität, darüber hinaus gibt es keine experimentellen Evidenzen für Phänomene jenseits dieser Modelle. Trotzdem ist eine „echte“ Vereinigung dieser beiden Theorien in einem gemeinsamen Rahmen konzeptionell erstrebenswert, zudem der aktuelle Entwicklungsstand des physikalischen Weltbildes aus mehrerlei Hinsicht unbefriedigend ist:

(a) Die Eichgruppe des Standardmodells muss ad hoc per Hand eingefügt werden. Darüber hinaus verfügt es über 19 experimentell zu bestimmende Parameter (Teilchenmassen, Kopplungskonstanten). Diese sind zwar experimentell überbestimmt, nichtsdestotrotz wäre eine basalere Theorie mit sehr wenigen Parametern, die die Berechnung der Standardmodellparameter erlaubt, wünschenswert.

(b) Im Standardmodell werden zwar elektromagnetische und schwache Wechselwirkung im Rahmen des Glashow-Salam-Weinberg-Modells zusammengefasst, eine dementsprechende Vereinheitlichung mit der starken Wechselwirkung geschieht aber nicht.

(c) Eine Quantentheorie der Gravitation ist wünschenswert, sie wird notwendig, wenn Gravitationswechselwirkungen bei sehr kleinen räumlichen Distanzen, etwa im Kontext von schwarzen Löchern, betrachtet werden. An derartigen Singularitäten stößt die Relativitätstheorie an ihre Grenzen. Darüber hinaus treten große Probleme auf, Quantengravitation mit üblichen quantenfeldtheoretischen Methoden zu behandeln, da die Existenz des Austauschteilchens der Gravitation (das sogenannte Graviton, ein masseloses Spin-2-Teilchen) zu Termen führt, die in einem Grad divergent sind, der die Behandlung im quantenfeldtheoretischen Rahmen unmöglich macht.

Eine vereinheitlichte Theorie könnte die gerade skizzierten Probleme lösen. Es gibt bzw. gab mehrere Ansätze zur Lösung eines Teils der genannten Probleme, etwa supersymmetrische Erweiterungen des Standardmodells sowie sogenannte „Grand Unified Theories“, die hier nicht weiter besprochen werden sollen. Diese führten aber zu neuen, ernsten Problemen und konnten das Problem der Quantisierung der Gravitation nicht befriedigend lösen. Auch Modelle im Rahmen von nichtkommutativen Geometrien (siehe [13], [22] sowie die dort zitierte Literatur) haben bislang nicht zu einer Lösung der oben formulierten Probleme geführt.

Ein möglicher Ansatz besteht darin, eines oder mehrere der fundamentalen Prinzipien, die üblicherweise für Quantenfeldtheorien gefordert werden, wie u.a. Kausalität oder Lokalität, aufzugeben. Preisgabe der Forderung der Punktförmigkeit der fundamentalen Objekte der Theorie, zumindest auf Planckskala, führt auf die Stringtheorie, deren Idee im Folgenden skizziert werden soll. Für eine detaillierte Darstellung des Konzepts sei auf die Standardwerke [27] sowie [41] verwiesen.

In der Stringtheorie sind die fundamentalen Objekte eindimensionale Strings, die offen oder geschlossen sein können. Sie propagieren in einer d-dimensionalen Raumzeit, modelliert als eine Lorentzmannigfaltigkeit[1] $\mathcal{M}^d$. Analog zu der Weltlinie eines Teilchens in der gewöhnlichen Feldtheorie bewegen sich Strings auf einer zweidimensionalen Weltfläche Σ. Im Falle eines offenen Strings hat diese die Form eines Bandes, im Falle eines geschlossenen Strings die eines Zylindermantels bzw. Schlauchs. Wechselwirken mehrere geschlossene Strings miteinander, so entsteht eine „geschlossene“ Fläche mit nichttrivialer Topologie, sie entspricht einem Feynmandiagramm in der Quantenfeldtheorie. Im Grenzfall Radius $\rightarrow 0$ (dies entspricht Stringspannung $\rightarrow \infty$) geht eine derartige Fläche - heuristisch betrachtet - in ein Diagramm aus Linien über, dass einen Beitrag zur Bewegung eines Punktteilchens beschreibt. Im allgemeinen ist auch eine Kombination von offenen und geschlossenen Strings möglich.

Eine derartige Theorie kann in Form einer bosonischen Stringtheorie oder einer Superstringtheorie auftreten. Im zweiten Fall existiert sogenannte Raumzeit-Supersymmetrie, d.h. die Symmetrien der Raumzeit sind um globale und lokale Symmetrien erweitert, die durch eine geeignete Lie-Superalgebra-Erweiterung der Poincaré-Algebra beschrieben werden. Dies

[1] Es wird stets von einer zeitartigen und (d-1) raumartigen Richtungen ausgegangen. Mehrere zeitartige Richtungen implizieren die Existenz geschlossener, zeitartiger Kurven. Dies ist unvereinbar mit der Forderung nach Kausalität

impliziert eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen, aufgrund der experimentellen Befunde muss Supersymmetrie daher für niedrige Energien gebrochen sein. Eine Einführung in dieses Konzept findet sich in [19], Superstringtheorien werden in [27] und [41] diskutiert.

Es zeigt sich, dass die Quantisierung von Stringtheorien nur in speziellen Raumzeitdimensionen d konsistent möglich ist, ohne dass Anomalien entstehen: Im Falle einer bosonischen Stringtheorie folgt notwendigerweise $d = 26$, supersymmetrische Stringtheorien implizieren $d = 10$. Es existieren mehrere Gründe, sich im Folgenden auf Superstringtheorien einzuschränken. Zunächst ist eine Theorie, die keine Fermionen enthält, unrealistisch. Darüber hinaus treten in der bosonischen Theorie divergente Ausdrücke und sogenannte Tachyonen auf, letzteres sind unphysikalische Teilchen, die mit Überlichtgeschwindigkeit propagieren. Superstringtheorien weisen diese Mängel nicht auf. Erwünschte Eigenschaften, wie etwa die Existenz eines masselosen Spin-2-Teilchens im Spektrum der Theorie als „Kandidat“ für das Graviton, werden dagegen von beiden Theorien geteilt.

Die im Folgenden entscheidenden Aspekte der betrachteten Stringtheorie sind nachfolgend noch einmal aufgelistet:

- Die Theorie muss Raumzeit-Supersymmetrie aufweisen
- Eine konsistente supersymmetrische Stringtheorie existiert nur in einer zehndimensionalen Raumzeit

Die Probleme, die aus diesen Einschränkungen resultieren, sind Ausgangspunkt für das Auftreten derjenigen speziellen Geometrien in der Physik, die im Rahmen dieser Arbeit behandelt werden.

2.2 Reduktion auf 4 Dimensionen

Wird supersymmetrische Stringtheorie als Kandidat für eine vereinheitlichte Theorie betrachtet, so stellt sich die Frage nach der Interpretation der theoretisch erforderlichen Raumzeitdimension d = 10. Sie steht zunächst im Widerspruch zu der Tatsache, dass bislang nur 1+3 Raumzeitdimensionen beobachtet wurden. Im Folgenden soll die Kompaktifizierung von Extradimensionen diskutiert werden.

Die zentrale Annahme besteht darin, dass die Raumzeit $\mathcal{M}^{10}$ die Produktgestalt

$$\mathcal{M}^{10} = \mathbb{R}^{1,3} \times K^6 \tag{2.1}$$

besitzt. Dabei ist K^6 eine 6-dimensionalen, kompakten Mannigfaltigkeit und die vier beobachtbaren Dimensionen werden häufig durch den flachen Minkowski-Raum $(\mathbb{R}^{1,3}, \eta_{Mink})$ modelliert. Die Lorentzmetrik $g_{\mathcal{M}^{10}}$ dieser Mannigfaltigkeit hat dann ebenfalls Produktgestalt mit einer riemannschen Metrik g_{K^6} auf K^6:

$$g_{\mathcal{M}^{10}} = \eta_{Mink} \otimes g_{K^6} \qquad (g_{\mathcal{M}^{10}})_{MN} = \begin{pmatrix} (\eta_{Mink})_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & (g_{K^6})_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

K^6 wird als so klein angenommen, dass Beobachtungen stets Mittelwerte über sie ergeben, die zusätzliche Dimensionen also nicht beobachtet werden. Die Metrik $g_{M^{10}}$ muss dabei die Einsteingleichungen $ric_{M^{10}} = T$ lösen, wobei der Energie-Impuls-Tensor T häufig durch einen Term, der quadratisch in k-Form-Feldstärken ist, gegeben ist und aus einer vorher gewählten Konfiguration von Hintergrundfeldern resultiert. Insbesondere muss g_{K^6} bei Abwesenheit interner k-Form-Feldstärken Ricci-flach sein. Da die Geometrie von $\mathcal{M}^{10}$ dynamisch bestimmt ist, also einen Teil der Lösung des Problems bzw. der Bewegungsgleichungen darstellt, ist die Annahme von 6 kompakten Dimensionen nicht unnatürlich, solange die resultierende Geometrie diese Gleichungen löst.

Da kompakte Mannigfaltigkeiten immer endlichen riemannschen Durchmesser R haben, können die sechs zusätzlichen Dimensionen durch geeignete Skalierung beliebig klein werden. Die Geometrie von K^6 hat Einfluss auf die Eigenschaften der effektiven vierdimensionalen Theorie, die durch Integration über K^6 entsteht. Aus der Variation der Metrik $g_{\mathcal{M}^{10}}$ um den Vakuumzustand (2.2) und Einbeziehung der zehndimensionalen Bewegungsgleichungen resultieren unendlich viele massive Zustände, deren Massen in der Größenordnung $1/R$ bzw. Vielfache dieses Wertes liegen. Die Geometrie von K^6 bestimmt daher Eigenschaften des Teilchenspektrums der vierdimensionalen Theorie.

Zunächst ist die Geometrie von K^6 nur durch die oben genannte Einstein-Gleichung eingeschränkt. Weitere Restriktionen resultieren aus Annahmen, die Superladungen/Supersymmetrien betreffend, die nach Kompaktifizierung in der vierdimensionalen Theorie Bestand haben sollen. Dies führt direkt auf geometrische Bedingungen in Form kovariant konstanter Spinoren, siehe [45], die wiederum zu Einschränkungen an die Holonomie von K^6 führen. Als Beispiele treten etwa $Hol_{K^6} = \{e\}$, d.h. flache Tori oder $Hol_{K^6} = SU(3)$ auf. Im zweiten Fall bleibt z.B. ein Viertel der Supersymmetrie erhalten.

Die Motivation der Verwendung von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten ($Hol_{K^6} = SU(3)$) ist im Kontext der folgenden Verallgemeinerung relevant und wird daher skizziert. Supersymmetrie in 10 Dimensionen ist äquivalent zur Existenz von nirgends verschwindenden Spinorfeldern[2] $\epsilon_A \in \$(\mathcal{M}),\ A = 1, \dots, N$, deren Anzahl N durch die Anzahl der Supersymmetrieparameter gegeben ist. Die Produktgestalt in (2.1) und (2.2) führt zu einer Faktorisierung der Spingruppe in $Spin(1,3) \times Spin(6)$. Die Forderung nach erhaltenen Supersymmetrien in der reduzierten vierdimensionalen Theorie führt dann auf nirgends verschwindende Spinoren $\theta^A \in \$(\mathbb{R}(1,3))$ und $\eta \in \$(K^6)$, so dass

$$\epsilon^A = \theta^A \otimes \eta$$

Die zusätzliche Forderung nach einem supersymmetrischen, Lorentz-invariantem Grundzustand der reduzierten Theorie impliziert, dass die Vakuumerwartungswerte der Supersymmetrievariationen aller Fermionen verschwinden. Die für das Gravitino in [27] gegebene allgemeine Form dieser Variationen reduziert sich in diesem Fall zu

[2] Im Rahmen dieser Arbeit wird keine Einführung in Konzepte der Spin-Geometrie gegeben, eine ausführliche Darstellung findet sich in [35]. Der Notation dieser Referenz folgend bezeichnet $\$(\mathcal{M})$ hier das Spinorbündel über $\mathcal{M}$ bzgl. der Metrik aus (2.2)

$$\nabla^{\$}\eta = 0 \tag{2.3}$$

wobei $\nabla^{\$}$ den induzierten Zusammenhang auf dem Spinorbündel $\$(K^6)$ bezeichnet. Die Theoreme 3.19 und 3.20 lassen sich auf das Spinorbündel verallgemeinern und implizieren dann, dass die Holonomie der betrachteten Metrik in $SU(3)$ enthalten sein muss. Gegenstand dieser Arbeit werden Geometrien sein, die allgemeiner sind als die zuletzt angesprochenen CY-Mannigfaltigkeiten, also dieser Einschränkung an die Holonomie nicht mehr genügen.

Eine allgemeine Referenz für (Kaluza-Klein)-Kompaktifizierungen, insbesondere auch für geometrische Aspekte, ist [16].

2.3 Typen und Symmetrien

In $d = 10$ Dimensionen existieren 5 konsistente Superstringtheorien: Typ I, Typ IIA, Typ IIB sowie zwei heterotische Superstringtheorien (für diesen Typ existieren zwei mögliche Eichgruppen, $SO(32)$ sowie $E_8 \times E_8$, die resultierenden Theorien werden unterschieden). Sie unterscheiden sich z.B. im Spektrum, in der Art der auftretenden Strings (offen/geschlossen) und Weltflächen (orientierbar/nicht orientierbar), in der Möglichkeit, Eichgruppen einzuführen oder in der Supersymmetrie, die eingeführt werden kann. Eine ausführliche Diskussion findet sich in [27] oder [41].

Diese fünf erwähnten Theorien sind nicht unabhängig voneinander sondern gehen durch gewisse Symmetrien oder Dualitäten auseinander hervor und können somit als äquivalente Theorien betrachtet werden. Zum einen existiert eine sogenannte T-Dualität, die folgende Theorien miteinander verbindet:

$$\mathrm{IIA} \quad \stackrel{T}{\longleftrightarrow} \quad \mathrm{IIB} \qquad\qquad \mathrm{Het}(E_8 \times E_8) \quad \stackrel{T}{\longleftrightarrow} \quad \mathrm{Het}(SO(32))$$

Desweiteren existiert die S-Dualität, die zu einer Symmetrie I $\leftrightarrow$ Het($SO(32)$) und IIB $\leftrightarrow$ IIB führt. Darüber hinaus sind einige dieser Theorien noch mit einer Theorie in 11 Raumzeitdimensionen, der sogenannten M-Theorie verbunden. Detaillierte Informationen zu den Symmetrien finden sich in [41] oder [45], hier soll nur die T-Dualität zwischen IIA- und IIB-Theorien näher betrachtet werden.

Werden Typ IIA- und Typ IIB-Theorien kompaktifiziert so kann die Wahl verschiedener sechsdimensionaler, kompakter Mannigfaltigkeiten K_A^6 und K_B^6 zu physikalisch äquivalenten Theorien der Form IIA bzw. IIB führen. Grundlegende Eigenschaften werden bereits an einem einfacheren Beispiel deutlich (siehe auch [41]), dem Fall, dass eine Raumkoordinate, etwa x^9, zu einem Kreis S^1 mit Radius R kompaktifiziert ist. Das Spektrum der resultierenden 9-dimensionalen Theorie ist dann äquivalent zu dem Spektrum einer Theorie, bei der x^9 zu einem Kreis mit Radius $R' = \frac{1}{2\pi RT}$ kompaktifiziert wurde, wenn zusätzlich noch zwei Quantenzahlen, die den Anregungszustand beschreiben, vertauscht werden. Die beiden Theorien sind dann T-dual zueinander. Weiter kann gezeigt werden, dass für Typ II-Stringtheorien die

T-Dualitätstransformation gerade Typ IIA- und Typ IIB-Theorien vertauscht.

Die hier am einfachen Beispiel der Kompaktifizierung auf S^1 erläuterte T-Dualität existiert auch in komplexeren Fällen, etwa der Kompaktifizierung auf den in Abschnitt 3.2 erwähnten Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Eine Typ IIA-Theorie, kompaktifiziert auf einer solchen Mannigfaltigkeit Y^6 ist dann äquivalent zu einer Typ IIB-Theorie, kompaktifiziert auf einer anderen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit $\tilde{Y}^6$, die auch als Mirror-Mannigfaltigkeit zu Y^6 bezeichnet wird. Physikalische Äquivalenz bedeutet dabei die Existenz von Mirror-Abbildungen zwischen den Spektren und effektiven Wirkungen, s.d. diese bei dem Übergang von der IIA- zur IIB-Theorie aufeinander abgebildet werden. Die so resultierende Symmetrie heißt Mirror-Symmetrie, dazu siehe [31].
Wichtige Eigenschaften der Spektren lassen sich durch Hodge-Zahlen $h^{(p,q)}$, die von der Topologie der CY-Mannigfaltigkeiten abhängen, ausdrücken. Dabei handelt es sich die Dimensionen der sogenannten Dolbeault-Kohomologiegruppen $H^{(p,q)}(Y)$ bzw. $H^{(p,q)}(\tilde{Y})$ mit $p, q = 0, \ldots, 3$ (für eine Definition siehe [32]), die bei Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten größtenteils festgelegt sind. Die einzigen nicht vollständig determinierten Werte sind $h^{(1,1)} = h^{(2,2)}$ und $h^{(1,2)} = h^{(2,1)}$, die damit charakteristisch für die Topologie der gewählten Mannigfaltigkeit sind. Nach [36] besteht das Spektrum der kompaktifizierten Typ IIA-Theorie aus $h^{(1,1)}(Y)$ Vektormultipletts, $h^{(1,2)}(Y)$ Hypermultipletts, dem Tensor- und dem Gravitonmultiplett[3]. Bei der auf $\tilde{Y}$ kompaktifizierten Theorie ergibt sich eine ähnliche Situation, im Unterschied zu Typ IIA ist die Anzahl der Vektormultipletts hier aber durch $h^{(2,1)}(\tilde{Y})$ und diejenige der Hypermultipletts durch $h^{(1,1)}(\tilde{Y})$ gegeben. Bei der Mirror-Abbildung $Y \to \tilde{Y}$ werden demnach Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten mit vertauschten Hodge-Zahlen aufeinander abgebildet.

2.4 Kompaktifizierung bei Hintergrundflüssen

Die beschriebene Kompaktifizierung auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten führt zu Problemen, die eine Änderung bzw. Verallgemeinerung des Verfahrens erfordern. Zum einen existieren in den kompaktifizierten Theorien keine chiralen Fermionen, da ungebrochene Supersymmetrie vorliegt. Dies steht im Widerspruch zu den Erfordernissen des Standardmodells. Darüber hinaus führen die skalaren Felder in den Multipletts zu einer hohen Entartung des Vakuums, die ebenfalls unerwünscht ist. Daher ist es erstrebenswert, einen Mechanismus einzuführen, der die Vakuumerwartungswerte dieser Felder festlegt und zu einem spontanen Bruch der Supersymmetrie führen kann. Dies ist möglich durch die Einschaltung von Hintergrundflüssen (siehe [25] und die dort angegebenen Referenzen). Sei dazu $C_{p-1} \in \Gamma\left(\Lambda^{p-1}T^*Y\right)$ ein Eichpotential aus einem der Multipletts der Typ II-Theorien und $F_p = dC_{p-1}$ seine Feldstärke. Diese kann in einer harmonischen Basis $\{\omega_p^i\}$ von $H^p(Y, \mathbb{R})$ mit konstanten Koeffizienten e_i

[3]Formal betrachtet handelt es sich bei einem Supermultiplett (die genannten Multipletts sind Spezialfälle) um eine irreduzible Darstellung der Supersymmetriealgebra. An dieser Stelle genügt es, ein solches Multiplett als „Anordnung“ oder „Zusammenstellung“ gewisser Teilchenzustände, die in der Theorie auftreten, zu betrachten

entwickelt werden:

$$F_p = \sum_i e_i \omega_p^i$$

Dabei bezeichnet $H^p(Y, \mathbb{R})$ die p-te de Rham-Kohomologiegruppe[4] von Y, zur ihrer Definition und zur Existenz von harmonischen Basen siehe [47]. Integration über einen zu ω_p^j dualen p-Zykel γ_p^j in Y liefert

$$\int_{\gamma_p^j} F_p = e_j$$

Somit erhält die Feldstärke F_p einen Hintergrunderwartungswert. e_j wird als „Flussparameter“ oder „Hintergrundfluss“ bezeichnet. Die Anzahl dieser Parameter ist dann durch die Dimension von $H^p(Y, \mathbb{R})$ gegeben. Für Calabi-Yau-Kompaktifizierungen folgt daraus eine Restriktion, da dort nur $H^0(Y, \mathbb{R})$, $H^2(Y, \mathbb{R})$, $H^4(Y, \mathbb{R})$, $H^6(Y, \mathbb{R})$ und $H^3(Y, \mathbb{R})$ nichttrivial sind, siehe [27]. Kompaktifizierungen von Typ IIA- und Typ IIB-Theorien wurden bei Präsenz von Hintergrundflüssen studiert. Es kann gezeigt werden (siehe [36]), dass die Frage nach der Existenz einer Mirror-Abbildung zwischen den kompaktifizierten Theorien von der Art der eingeschalteten Flüsse abhängt. Sie existiert im Falle von sogenannten R-R-Flüssen[5], die Präsenz von NS-NS-Flüssen führt dagegen zum Bruch der Symmetrie, weil in beiden Theorien lediglich die ungeraden Kohomologiegruppen zu den NS-NS-Flüssen beitragen, also $2(h^{(2,1)}(Y) + 1)$ bzw. $2(h^{(2,1)}(\tilde{Y}) + 1)$ Flussparameter vorhanden sind. Da unter Mirror-Symmetrie bei Calabi-Yau-Kompaktifizierung $h^{(2,1)}$ auf $h^{(1,1)}$ abgebildet wird, stimmen diese Zahlen dann im allgemeinen nicht überein, es fehlen NS-NS-Flüsse in den geraden Kohomologiegruppen. In [46] wird argumentiert, dass diese Flüsse durch Tensoren, die im Rahmen einer Geometrie auf $\tilde{Y}$, die nicht mehr Calabi-Yau ist, geliefert werden können.

2.5 Kompaktifizierung auf halbflachen Mannigfaltigkeiten

Die Calabi-Yau-Bedingung ergab sich in Abschnitt 2.2 aus der Forderung an erhaltene Supersymmetrie in der reduzierten Theorie und der Forderung an die Existenz eines supersymmetrischen Vakuumzustandes. Bei Existenz nichttrivialer Hintergrundflüsse sollte diese Symmetrie des Vakuums gebrochen sein. Dies motiviert, die Bedingung der (2.3) an den Spinor auf K^6 aufzugeben aber weiter die Existenz eines nirgends verschwindender Schnitt $\eta \in \$(K^6)$ zu fordern, so dass Supersymmetrien (genauer N=2-Supersymmetrie) in der effektiven Theorie erhalten bleiben.
Aus einer Verallgemeinerung (siehe [33]) von Theorem 3.7 folgt dann, dass K^6 eine Reduktion auf $Stab_{Spin(6)}(\eta')$ trägt, wobei $0 \neq \eta' \in \Delta_6$ einen Modellspinor in der Spindarstellung Δ_6 für 6 Raumzeitdimensionen bezeichnet. Dieser Stabilisator kann mit Hilfe des Isomorphismus $Spin(6) \cong SU(4)$ (siehe [35]), unter dem die Spindarstellung Δ isomorph zur Stan-

[4] Es kann argumentiert werden, dass aufgrund der Dirac-Quantisierungsbedingung Formen in $H^p(Y, \mathbb{Z})$ betrachtet werden sollten, siehe [28]. Diese zusätzliche Schwierigkeit wird hier übergangen, da sie für die folgende geometrische Problemstellung nicht relevant ist.

[5] Die Abkürzungen R-R (**R**amond) und NS-NS (**N**eveu-**S**chwarz) bezeichnen verschiedene Randbedingungen, die für die fermionischen Felder an den Enden des Strings gefordert werden können, siehe [27]. An dieser Stelle ist aber lediglich von Bedeutung, dass diese beiden Typen von Feldern unter Mirror-Symmetrie auf Felder desselben Typs abgebildet werden.

darddarstellung $\mathbb{C}^4$ von $SU(4)$ ist, bestimmt werden. Werden Koordinaten so gewählt, dass $\eta' = (1,0,0,0)^t$, folgt:

$$Stab_{Spin(6)}(\eta') = \{U \in SU(4) \,|U\eta' = \eta'\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \middle| V \in SU(3) \right\} \cong SU(3)$$

In Proposition 4.11 wird gezeigt, dass eine solche Reduktion äquivalent zur Existenz einer fast komplexen Struktur $J \in End(TK^6)$ und einer komplexen Volumenform $\psi \in \Lambda^{3,0}T^*K^6$ ist, wobei die Zerlegung von ΛT^*K^6 in (p,q)-Formen relativ zu J geschieht. Statt J kann nach Bemerkung 4.10 äquivalent auch die zugehörige Kählerform fixiert werden. Diese Formen können explizit aus dem Spinor η konstruiert werden. Bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das $Spin(6)$-invariante Skalarprodukt auf Δ_6 und $\cdot$ Cliffordmultiplikation mit Multivektoren, so liefern nach [28] folgende Tensoren eine $SU(3)$-Struktur:

$$\begin{aligned} \omega(X,Y) &:= i\,\langle \Gamma_7 \cdot \eta, (X \wedge Y) \cdot \eta\rangle \\ \psi(X,Y,Z) &:= i\big(\langle \eta, (X \wedge Y \wedge Z) \cdot \eta\rangle - i\,\langle \Gamma_7 \cdot \eta, (X \wedge Y \wedge Z) \cdot \eta\rangle\big) \end{aligned}$$

In Abschnitt 3.4 wird gezeigt, dass eine $SU(3)$-Struktur durch die intrinsische Torsion $\tau \in \Lambda^1T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^\perp$ charakterisiert wird. Dieser Raum zerfällt in irreduzible Komponenten, die in Definition 5.9 gegeben sind:

$$\Lambda^1T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^\perp \cong \mathcal{W}_1^+ \oplus \mathcal{W}_1^- \oplus \mathcal{W}_2^+ \oplus \mathcal{W}_2^- \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \oplus \mathcal{W}_5$$

Einschränkungen an die $SU(3)$-Struktur können dann durch das Verschwinden von derartigen Anteilen $\mathcal{P}_i(\tau) \in \mathcal{W}_i$ (siehe 5.10) formuliert werden. Der Fall $\tau = 0$, also das Verschwinden aller Beiträge, entspricht gerade dem Vorliegen einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit, wie sie ursprünglich zur Kompaktifizierung verwendet wurde.
Heuristische Argumente in [28] machen plausibel, dass die gesuchte Mirror-Mannigfaltigkeit keine beliebige sechsdimensionale Mannigfaltigkeit mit $SU(3)$-Struktur ist. Der Vergleich der Dolbeault-Kohomologie-Klassen $H^{(p,q)}(Y,\mathbb{R})$ einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit Y mit den Torsionsklassen $\mathcal{W}_i$, beides aufgefasst als $SU(3)$-Darstellungen, führt mit den $SU(3)$-Isomorphismen $\mathcal{W}_4 \cong \mathcal{W}_5 \cong [\![T^*M^{(1,0)}]\!] \cong [\![\Lambda^{0,2}T^*M]\!]$[6] wegen der Restriktionen $h^{(1,0)} = h^{(0,1)} = h^{(2,0)} = h^{(0,2)} = 0$ auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten zu der Annahme

$$\mathcal{P}_4(\tau) = \mathcal{P}_5(\tau) = 0 \tag{2.4}$$

Da die entsprechenden Hodgezahlen zu den anderen Torsionskomponenten für Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten nicht verschwinden, resultiert auf diese Weise keine Restriktion an $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$. Auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten existiert ebenfalls eine komplexe Volumenform ψ, die in diesem Fall kovariant konstant und nach Lemma 5.12 damit geschlossen ist. In [28] wird argumentiert, dass der Realteil $\mathcal{R}e\,\psi$ unter Mirror-Symmetrie einem Eichpotential und damit $d\mathcal{R}e\,\psi$ einem Fluss entspricht. Die Form $d\mathcal{R}e\,\psi$ liefert damit einen Teil der fehlenden NS-NS-Flüsse in den geraden Kohomologiegruppen. Da diese Flüsse im allgemeinen nicht

[6] Die Notation $[\![\Lambda^{p,q}]\!]$ wird in Abschnitt 4.4 erläutert

verschwinden, ist $\mathcal{R}e\,\psi$ nicht mehr geschlossen. Da $\mathcal{R}e\,\psi$ und $\mathcal{I}m\,\psi$ auseinander hervorgehen kann diese Bedingung auch (wie in der Mathematik-Literatur üblich) an $\mathcal{I}m\,\psi$ gestellt werden, und $\mathcal{R}e\,\psi$ bleibt geschlossen. Nach Korollar 5.19 und Theorem 5.21 ist dies zusammen mit (2.4) äquivalent zu der Forderung

$$\mathcal{P}_1^+(\tau) = \mathcal{P}_2^+(\tau) = 0 \tag{2.5}$$

Nach Definition 5.25 sind durch (2.4) und (2.5) die halbflach Mannigfaltigkeiten gekennzeichnet, siehe auch [9]. Die Argumente, die zur Wahl von halb-flachen Mannigfaltigkeiten bei der Kompaktifizierung von Typ II-Stringtheorien führten, waren zunächst heuristisch. In [28] und [23] wird verifiziert, dass diese Wahl der Mannigfaltigkeit zu der richtigen effektiven Wirkung führt, um Mirror-Symmetrie zu erhalten.

3 Grundlagen aus der Differentialgeometrie

Nach der Darlegung der physikalische Problemstellung werden im folgenden Abschnitt einige mathematische bzw. differentialgeometrische Konzepte und Begriffe erläutert werden, die in Kapitel 2 verwendet wurden. Im Mittelpunkt steht dabei der Begriff der G-Struktur sowie die Möglichkeit, eine solche durch verschiedene Tensoren zu charakterisieren. Alle verwendeten Objekte werden, soweit nicht explizit anders erwähnt, als beliebig häufig differenzierbar vorausgesetzt. Als Referenz für dieses Kapitel können [4], [34] oder [14] dienen.

3.1 Hauptfaserbündel

In Analogie zu einem Vektorbündeln $\pi : E \longrightarrow M$, bei dem an jedem Punkt m einer Basismannigfaltigkeit M auf glatte Art und Weise die Faser $\pi^{-1}(m) \cong V$ (V ein Vektorraum) „angeklebt“ ist, kann eine Bündelkonzept definiert werden, bei dem die Faser isomorph zu einer Lie-Gruppe ist. Da diese Gruppe auf sich selbst operiert, ist es zusätzlich sinnvoll, Verträglichkeit von Bündelabbildungen und Gruppenoperation zu fordern. Dies führt auf das Konzept des Hauptfaserbündels.

Definition 3.1 *Seien P und M Mannigfaltigkeiten. und G eine Lie-Gruppe, die differenzierbar von rechts auf P operiert. Dann heißt (P, G, M) Hauptfaserbündel (HFB) falls gilt:*

(a) G operiert frei auf P, d.h. aus $p \cdot g = p$ für ein $p \in P, g \in G$ folgt bereits $g = e$, wobei e das neutrale Element von G bezeichnet.

(b) Es gilt $M \cong P/G$ mit glatter Projektion $\pi : P \longrightarrow M$, d.h. G operiert einfach transitiv auf $P_m := \pi^{-1}(m)$. Dies bedeutet, dass für $p, q \in P_m$ genau ein $g \in G$ existiert, s.d. $m \cdot g = n$.

(c) P ist lokal trivial, d.h. für jedes $m \in M$ existiert eine Umgebung U von m und eine Abbildung

$$F_U : P_U := \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$$

die die Äquivarianzbedingung $F_U(p \cdot g) = F_U(p)g$ erfüllt, s.d. die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_U : P_U &\longrightarrow U \times G \\ p &\mapsto (\pi(p), F_U(p)) \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus ist. Damit sieht P lokal so aus wie $M \times G$.

P heißt dann Bündelraum, M Basis und G Strukturgruppe. P wird auch G-Hauptfaserbündel über M genannt.

Eine solche Struktur kann auch durch lokale Daten definiert bzw. beschrieben werden. Ist (P, G, M) ein Hauptfaserbündel und $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M mit lokalen Daten $F_i : P_{U_i} \longrightarrow G$ und Diffeomorphismen $\Phi_i : P_{U_i} \longrightarrow U_i \times G$ wie in Definition 3.1 (c) vorgegeben, so wird durch $s_i(m) := \Phi^{-1}(m, e)$ ein lokaler Schnitt auf U_i definiert. Falls

$U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ werden s_i und s_j dort i.a. nicht die gleichen Werte in P annehmen. Sie unterscheiden sich aber nur um ein Gruppenelement : $s_j(m) = s_i(m)g_{ij}(m)$. Dieses ist gegeben durch $g_{ij}(m) = F_j^{-1}(p)F_i(p)$ für beliebiges $p \in P_m$ und „misst“ sozusagen die Änderung bei Übergang zwischen den Koordinatenumgebungen U_i und U_j. Diese sogenannten Übergangsfunktionen genügen auf U_{ij} bzw. U_{ijk} den Gleichungen

$$g_{ii} = 1 \qquad g_{ji} = g_{ij}^{-1} \qquad g_{ij}g_{jk} = g_{ik} \tag{3.1}$$

Die letzte Eigenschaft heißt „Kozykelbedingung“. Tatsächlich kann aus derartigen lokalen Daten auch immer ein Hauptfaserbündel konstruiert werden (siehe [14], [34]):

Proposition 3.2 *3.2 Sei M eine Mannigfaltigkeit, $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung und G eine Lie-Gruppe. Seien $g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow G$ Abbildungen, die den Bedingungen* (3.1) *genügen. Dann existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) Hauptfaserbündel (P, G, M) mit diesen vorgegeben Übergangsfunktionen.*

Diese allgemeine Struktur ist hier vor allem in Form des folgenden Beispiels (zum Vergleich siehe [43]) relevant:

Beispiel 3.3 Das Rahmenbündel
Ist E ein Vektorbündel über M, etwa das Tangentialbündel TM, mit typischer Faser $V \cong \mathbb{R}^N$, so kann für jeden Punkt $m \in M$ die Menge aller Basen oder auch Rahmen

$$\{p : V \longrightarrow E_m |\ p \text{ ist linearer Isomorphismus}\}$$

betrachtet werden[7]. Diese Basen bilden dann den Totalraum des Rahmenbündels über E:

$$P(E) := \bigcup_{m \in M} \{p : V \longrightarrow E_m\}$$

Die Strukturgruppe $G := GL(V)$ operiert dann in natürlicher Weise von rechts auf $P(E)$ durch die Definition

$$p \cdot g := p \circ g =: R_g(p)$$

für $g \in GL(V)$ und $p \in P(E)$. Ein lokaler Schnitt in diesem Bündel heißt auch lokaler Rahmen. Diese Konstruktion erfüllt alle in Definition 3.1 genannten Eigenschaften. Im Falle $E = TM$ für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M können die Übergangsfunktionen, die Werte in $GL(n)$ annehmen, gut interpretiert werden: Die Wahl von Koordinaten $\{(x_i, U_i)\}$ induziert Basisvektorfelder $\{\partial/\partial x_i^k\}$ über U_i und die Übergangsfunktionen beschreiben den Übergang bei Kartenwechsel. Mit ihrer Hilfe kann also das das Tangentialbündel aus den lokalen Daten „zusammengepatcht“ werden. Im allgemeinen werden die Werte der Übergangsfunktionen in GL(n) liegen, es kann jedoch auch der Fall auftreten, dass sie Werte in $H \leq GL(n)$ annehmen. Dies entspricht speziellen geometrischen Situationen und wird im folgenden Abschnitt weiter verfolgt.

[7] Wird auf $V \cong \mathbb{R}^N$ eine Basis $\{v_1, \ldots, v_N\}$ fixiert, so bildet $\{p(v_1), \ldots, p(v_N)\}$ eine Basis von E_m im üblichen Sinne. Durchläuft p alle Isomorphismen, so ergeben sich auf diese Weise alle Basen von E_m

Um die gerade angedeutete Beschreibung speziellerer geometrischen Situationen zu diskutieren, wird noch der Begriff des Unterbündels benötigt:

Definition 3.4 *Seien (P, G, M) und (Q, H, M) Hauptfaserbündel mit $H \leq G$. Dann heißt (Q, H, M) ein Unter(hauptfaser)bündel von (P, G, M), falls es eine injektive Abbildung $\iota : Q \longrightarrow P$ (häufig die Inklusion) gibt, s.d. gilt:*

(a) Für $q \in Q$ gilt : $\pi^P(\iota(q)) = \pi^Q(q)$

(b) Für $q \in Q, h \in H$ gilt : $\iota(q \cdot h) = \iota(q) \cdot h$

Bemerkung 3.5 Eine Abbildung zwischen zwei H-Hauptfaserbündeln, die den beiden Eigenschaften aus Definition 3.4 genügt, heißt allgemein auch Morphismus von H-Hauptfaserbündeln.

Auch für Unterbündel ist eine lokale Beschreibung möglich, dies wurde bereits in Beispiel 3.3 in Gestalt der H-wertigen Übergangsfunktionen angedeutet, soll aber hier nicht weiter diskutiert werden.

3.2 G-Strukturen

Wie bereits angedeutet, kann eine kleinere Strukturgruppe, die sich etwa in Form $H \leq G$-wertiger Übergangsfunktionen manifestiert, Ausdruck besonderer geometrischer Eigenschaften sein. Daher wird allgemein definiert:

Definition 3.6

(a) Ein Unterbündel (Q, H, M) von (P, G, M) heißt eine Reduktion der Strukturgruppe des Hauptfaserbündels (P, G, M) auf H.

(b) Gilt speziell $(P, G, M) = (P(TM), GL(n), M)$, so heißt ein H-Unterbündel von diesem eine H-Struktur auf der Mannigfaltigkeit M.

Diese recht abstrakte Definition von G-Strukturen ist für praktische Zwecke, etwa die Beschreibung konkreter Geometrien, bei denen eine derartige Reduktion vorliegt, nicht sehr nützlich, da konkret meist mit Tensor- oder Spinorfeldern gearbeitet wird. Die Existenz einer G-Struktur auf einer Mannigfaltigkeit M lässt sich allerdings äquivalent durch die Existenz Tensorfelder charakterisieren.

Ist $\pi : E \longrightarrow M$ ein Vektorbündel mit typischer Faser V, so werde zunächst eine „Modelltensor" $A = v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_q \in V^{(p,q)} := V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$ betrachtet. $GL(V)$ operiert auf diesem Tensor auf natürliche Art und Weise von links:

$$g \cdot A := g(v_1) \otimes \ldots \otimes g(v_p) \otimes \varphi_1 \circ g^{-1} \otimes \ldots \otimes \varphi_q \circ g^{-1}$$

Der Ansatz ist nun, eine Untergruppe $H \leq GL(V)$ als Stabilisator eines solchen Tensors zu realisieren, wobei dieser definiert ist als

$$Stab_{GL(V)}(A) = \{g \in GL(V) | \; g \cdot A = A\}$$

und eine abgeschlossen Untergruppe von $GL(V)$ ist. Diese Betrachtung ist auf eine Faser eingeschränkt, der Modelltensor muss auf M übertragen werden. Dies kann mit Hilfe von lokalen Schnitten $s : U \subset M \longrightarrow P(E)_U$ im Rahmenbündel über E realisiert werden. Durch die folgende Gleichung wird dann ein lokales (p,q)-Tensorfeld in $\Gamma\left(E^{(p,q)}\right)$ definiert:

$$m \mapsto \hat{A}(m) := s(m)(v_1)\otimes\ldots\otimes s(m)(v_p) \otimes \varphi_1 \circ s(m)^{-1}\otimes\ldots\otimes\varphi_q \circ s(m)^{-1}$$

Ein solches Feld heißt "lokal von der Form A". Im allgemeinen ergibt sich auf diese Weise kein global definiertes Tensorfeld, sondern nur dann, wenn bei Übergang zwischen Umgebungen U_i und U_j beide Definitionen zusammenpassen. Die Gleichung $s_j = s_i \cdot g_{ij}$ macht plausibel, dass das der Fall sein sollte, wenn der Modelltensor A invariant unter g_{ij} ist, also $g_{ij} \in Stab_{GL(V)}(A)$ gilt und folglich müsste $P(E)$ eine $Stab_{GL(V)}(A)$-Struktur tragen. Präziser gilt nach [11]:

Theorem 3.7 *Sei $\pi : E \longrightarrow M$ ein Vektorbündel über M mit typischer Faser V. Gelte weiter $H = Stab_{GL(V)}(A)$ für einen Modelltensor $A \in V^{p,q}$. Dann sind äquivalent:*

(a) Es existiert eine Reduktion des Rahmenbündels $P(E)$ von $GL(V)$ auf H.

(b) Es existiert ein global definiertes Tensorfeld $\hat{A} \in \Gamma\left(E^{(p,q)}\right)$, das nirgends verschwindet und lokal von der Form A ist.

Beweis Die Idee wurde vor der Formulierung des Theorems skizziert, ein präziser Beweis ist in der genannten Referenz enthalten.

□

Durch Einschränkung auf den Spezialfall $E = TM$ und durch sukzessives Anwenden des gerade formulierten Theorems ergeben sich direkt die folgenden Korollare:

Korollar 3.8 *Gelte $H = Stab_{GL(n)}(A)$ für $A \in (\mathbb{R}^n)^{(p,q)}$, dann trägt eine Mannigfaltigkeit M genau dann eine H-Struktur, wenn es auf M ein global definiertes Tensorfeld gibt, das nirgends verschwindet und lokal von der Form A ist.*

Korollar 3.9 *Seien Modelltensoren $A_1 \in (\mathbb{R}^n)^{(p_1,q_1)}, \ldots, A_k \in (\mathbb{R}^n)^{(p_k,q_k)}$ gegeben und gelte*

$$H = Stab_{GL(n)}(A_1) \cap \ldots \cap Stab_{GL(n)}(A_k).$$

Dann existiert genau dann eine H-Struktur auf M, wenn es global definierte Tensorfelder $\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_k$ gibt, die nirgends verschwinden und lokal von der Form $A_1, \ldots, A_k$ sind.

Bemerkung 3.10 Die Diskussion, die dem Theorem vorausgeht sowie die Formulierung der Beweisidee können konzeptionell etwas strukturierter dargestellt werden, wenn auf den Formalismus der assoziierten Bündel sowie der Pullback-Bündel zurückgegriffen wird. Darauf wird an dieser Stelle verzichtet, die nötigen Grundlagen werden etwa in [14] und [34] behandelt.

Abschließend sollen noch 3 Beispiele von G-Strukturen kurz diskutiert werden, die in dieser Arbeit relevanten Strukturen werden in Kapitel 4.2 vorgestellt.

Beispiel 3.11 SL(n)-Strukturen: Liegen die Werte der Übergangsfunktionen in $SL(n)$, so wird bei Wechsel der Kartengebiete die Orientierung von Basen der Tangentialräumen erhalten, da alle Endomorphismen in $SL(n)$ nach Definition positiv orientiert sind. Folglich ist M orientierbar.
Andererseits operiert $GL(n)$ auf $\alpha \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*$ durch die Determinante, d.h. $g \cdot \alpha = det(g)\alpha$ und damit folgt $Stab_{GL(n)}(\alpha) = SL(n)$ für $\alpha \neq 0$. Folglich ist die Existenz einer Reduktion auf $SL(n)$ äquivalent zur Existenz einer nirgends verschwindenden Volumenform in $\Gamma\left(\Lambda^n T^*M\right)$.

Beispiel 3.12 O(n)-Strukturen: Liegen die Werte Übergangsfunktionen in $O(n)$, so werden bei Wechsel der Kartengebiete euklidische Skalarprodukte erhalten. Folglich kann auf M global der Begriff von Längen und Winkelmessung eingeführt werden, d.h. die Mannigfaltigkeit besitzt eine riemannsche Struktur.
Andererseits gilt nach Definition $O(n) = Stab_{GL(n)}(\langle \cdot, \cdot \rangle_{eukl})$ wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{eukl}$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform ist. Damit ist die Existenz einer $O(n)$-Struktur äquivalent zu Existenz einer riemannschen Metrik. Dies ist, siehe [14] oder [34], allerdings keine echte Einschränkung, da aus der Parakompaktheit differenzierbarer Mannigfaltigkeiten die Existenz riemannscher Metriken folgt. Folglich trägt jede Mannigfaltigkeit eine $O(n)$-Struktur

Beispiel 3.13 SO(n)-Struktur: Anwendung von Korollar 3.9 auf die vorangegangenen Beispiele liefert direkt, dass die Existenz eine SO(n)-Struktur äquivalent zu der Existenz einer riemannschen Metrik und einer Volumenform ist. Letztere kann dann z.B. als riemannsche Volumenform gewählt werden.

3.3 Zusammenhänge

Zusammenhänge sollen im Folgenden vor allem für Vektorbündel betrachtet werden. Eine systematische Theorie kann ausgehend von der Theorie der Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln entwickelt werden, siehe etwa [43] oder [34], darauf wird in dieser Einleitung verzichtet. Zusammenhänge sind eng verknüpft mit dem Paralleltransport von Vektoren zwischen verschiedenen Fasern eines Vektorbündels. Desweiteren können ausgehend von einem Zusammenhang sein Torsions- und sein Krümmungstensor definiert werden, beide Größen werden im Verlauf dieser Arbeit von Bedeutung sein. In diesem Kapitel seien $\pi : E \longrightarrow M$, $\pi' : F \longrightarrow M$ stets ein Vektorbündel über M.

Definition 3.14 *Ein Zusammenhang auf E ist eine Abbildung $\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$, der für $s_1, s_2 \in \Gamma(E), X, Y \in \Gamma(TM)$ und $f \in C^\infty(M)$ folgende Bedingungen erfüllt:*

(a) $\nabla_{fX+Y} s_1 = f\nabla_X s_1 + \nabla_Y s_1$

(b) $\nabla_X s_1 + s_2 = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2$

(c) $\nabla_X f s_1 = df(X)s_1 + f\nabla_X s_1$

Ist auf E eine Metrik g gewählt, so heißt ∇ metrisch, falls zusätzlich gilt:

(d) $\partial_X g(s_1, s_2) = g(\nabla_X s_1, s_2) + g(s_1, \nabla_X s_2)$

wobei ∂_X die Richtungsableitung in Richtung X bezeichnet. $\nabla_X s_1$ heißt auch kovariante Ableitung von s_1 in Richtung X.

Zusammenhänge auf Vektorbündeln lassen sich natürlich auf Tensorbündel, duale Bündel etc. fortsetzen, es gilt folgendes wohlbekannte Lemma (siehe etwa [14]):

Lemma 3.15 *Seien ∇^E, ∇^F Zusammenhänge auf E bzw. F, dann gilt für $s_i \in \Gamma(E), t_j \in \Gamma(F), \varphi \in \Gamma(E^*)$ sowie $X, Y \in \Gamma(TM)$:*

(a) $\nabla_X^{E\otimes F}(s_1 \otimes t_1) := \nabla_X^E s_1 \otimes t_1 + s_1 \otimes \nabla_X^F t_1$ *induziert einen Zusammenhang auf $E \otimes F$.*

(b) $\nabla_X^{E\oplus F}(s_1 \oplus t_1) := \nabla_X^E s_1 \oplus \nabla_X^F t_1$ *induziert eine Zusammenhang auf $E \oplus F$.*

(c) $\nabla_X^{\Lambda E}(s_1 \wedge \ldots \wedge s_k) := \sum_i s_1 \wedge \ldots \wedge \nabla_X^E s_i \wedge \ldots \wedge s_k$ *induziert einen Zusammenhang auf $\Lambda^k E$.*

(d) $(\nabla_X^{E^*}\varphi)(Y) := \partial_X(\varphi(Y)) - \varphi(\nabla_X Y)$ *induziert einen Zusammenhang auf E^*.*

Teil (c) dieses Lemmas folgt aus Teil (a), desweiteren ergibt sich aus Teil (c) und (d) eine explizitere Formel für die kovariante Ableitung von k-Formen. Für $X, Y_1, \ldots, Y_k \in \Gamma(TM)$ und $\alpha \in \Gamma\left(\Lambda^k T^*M\right)$ gilt:

$$(\nabla_X \alpha)(Y_1, \ldots, Y_k) = \partial_X(\alpha(Y_1, \ldots, Y_k)) - \sum_i \alpha(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_k) \tag{3.2}$$

Generell gilt für die kovariante Ableitung von α, dass $\nabla\alpha \in \Gamma\left(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M\right)$ nicht notwendig eine (k+1)-Form ist, während $\nabla_X \alpha$ eine k-Form ist. Im Folgenden wird für Funktionen $f \in C^\infty(M)$ statt $\partial_X f$ auch $\nabla_X f$ geschrieben.

Ausgehend von einem Zusammenhang ∇ auf TM können weitere tensorielle Größen definiert werden:

Definition 3.16 *Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$, dann werden folgende Tensoren in $\Gamma\left(TM \otimes \Lambda^2 T^*M\right)$ definiert:*

(a) $T_{X,Y} := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ *(Torsionstensor)*

(b) $R_{X,Y} := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ *(Krümmungstensor)*

Die Definition des Krümmungstensors in (b) kann offensichtlich direkt auf Zusammenhänge auf beliebigen Vektorbündeln E verallgemeinert werden. Für den Torsionstensor gilt dies nicht, er kann nur für Zusammenhänge auf TM definiert werden. Dort ermöglicht er, bei einer fixierten riemannschen Metrik, die Auszeichnung des sogenannten Levi-Civita-Zusammenhangs (siehe [34]):

Theorem 3.17 *Auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) existiert genau ein torsionsfreier (i.e. $T = 0$), metrischer Zusammenhang ∇^{LC} (später auch nur mit ∇ bezeichnet).*

Im Folgenden soll das Wechselspiel zwischen Zusammenhängen und Reduktionen der Strukturgruppe von E, also insbesondere von G-Strukturen beschrieben werden. Sei dazu $U \subset M$ und $Y_1, \dots, Y_N \in \Gamma(U, E)$ ein Satz lokaler Vektorfelder, der linear unabhängig ist, also in jedem Punkt $m \in M$ eine Basis von $E_m \cong V$ bildet. Dann muss für deren kovariante Ableitungen gelten

$$\nabla_X Y_i = \sum_{j=1}^{N} \omega_i^j(X) Y_j \qquad i = 1 \dots N \tag{3.3}$$

Die Einträge $\{\omega_i^j(X)\}$ bilden eine Matrix aus $\mathfrak{gl}_N \cong \mathfrak{gl}(V)$ und somit ist ω selbst eine 1-Form mit Werte in $\mathfrak{gl}(V)$, mit anderen Worten $\omega \in \Gamma(T^*M \otimes \mathfrak{gl}(V))$. Diese 1-Form heißt Zusammenhangs-1-Form des Zusammenhangs ∇.
Existiert nun auf $P(E)$ eine Reduktion der Strukturgruppe auf $G \leq GL(V)$ mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G, dann kann eine eingeschränkte Klasse von Zusammenhängen auf E betrachtet werden:

Definition 3.18 *Unter den genannten Voraussetzungen heißt ein Zusammenhang ∇ auf E „G-Zusammenhang“ , falls die zugehörige Zusammenhangs-1-Form Werte in $\mathfrak{g}$ annimmt.*

Es kann gezeigt werden (siehe [34]), dass derartige Zusammenhänge stets existieren. Das folgende Theorem zeigt die Verträglichkeit dieser ausgezeichneten Zusammenhänge mit der Reduktion der Strukturgruppe und motiviert damit auch die Begriffsbildung.

Theorem 3.19 *Existiere eine Reduktion des Rahmenbündels $P(E)$ auf $G \leq GL(V)$ und sei ∇ ein Zusammenhang auf E, dann gilt:*

(a) Ist ∇ ein G-Zusammenhang, so erhält ∇ alle G-invarianten Unterräume, d.h es gilt $\nabla s = 0$ für einen G-invarianten Schnitt $s \in \Gamma(E)$. Analoge Aussagen gelten auf den Tensorbündeln $E^{(p,q)}$ mit den oben angegebenen induzierten Zusammenhängen.

(b) Ist die Reduktion wie in Theorem 3.7 durch einen Tensor $\hat{A}$ definiert, so gilt:

$$\nabla \text{ ist } G\text{-Zusammenhang} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \hat{A} = 0$$

Für einen Beweis der Teilaussagen siehe [34], [43] oder [11]. Im nächsten Kapitel werden spezielle G-Zusammenhänge betrachtet, die zusammen mit Teil (b) des vorangehenden Theorems eine Möglichkeit bieten, systematisch Informationen über G-Strukturen zu gewinnen.

Abschließend soll auf das Konzept des Paralleltransports und der Holonomie eines Zusammenhangs eingegangen werden, eine detaillierte Diskussion findet sich in [43]. Sei M im Folgenden zusammenhängend, $m_0, m_1 \in M$ durch einen Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ verbunden und sei $\zeta_0 \in E_{m_0}$. Dann ist der parallel-transportierte Vektor $\zeta_1 \in E_{m_1}$ definiert durch $\zeta_1 := \zeta(1)$, wobei ζ der eindeutig bestimmte Schnitt in E längs γ ist, der die gewöhnlichen Differentialgleichung $\nabla_{\dot\gamma}\zeta = 0$ mit der Anfangsbedingung $\zeta(0) = \zeta_0$ löst.
Ist γ geschlossen, d.h. $\gamma(0) = \gamma(1) = m \in M$, so gilt $\zeta_0, \zeta_1 \in E_m$ und γ induziert einen linearen Isomorphismus $E_m \longrightarrow E_m$. Wird zusätzlich ein Isomorphismus $E_m \longrightarrow V$ fixiert, so wirkt γ also als Element $F(\gamma) \in GL(V)$. Somit ergibt sich

$$Hol(\nabla) := \{F(\gamma) |\, \gamma : [0,1] \longrightarrow M, \gamma(0) = \gamma(1) = m\ \} \subset GL(V)$$

Es kann gezeigt werden (siehe [34], [43]), dass $Hol(\nabla)$ eine Lie-Untergruppe von $GL(V)$ definiert, die sogenannte Holonomiegruppe von ∇, die bis auf Isomorphie nicht vom fixierten Basispunkt $m \in M$ abhängt.
Das folgende Theorem besagt (siehe [34]), dass im Falle der Existenz eines Zusammenhangs mit Holonomie immer eine Reduktion der Strukturgruppe möglich ist:

Theorem 3.20 *Existiere auf E eine Zusammenhang ∇ mit $G := Hol(\nabla) \leq GL(V)$, dann gilt:*

(a) Es existiert eine Reduktion der Strukturgruppe von $P(E)$ auf G

(b) Der Zusammenhang ∇ ist ein G-Zusammenhang.

Mit den oben besprochenen Eigenschaften von G-Zusammenhängen und der Beschreibung von Reduktionen durch Tensoren ergibt sich daraus direkt:

Korollar 3.21 *Seien die Voraussetzungen des Theorems erfüllt und ein Tensor $\hat{A}$ gewählt, der gemäß Theorem 3.7 die Reduktion beschreibt, dann gilt*

$$\nabla \hat{A} = 0$$

Da G-Zusammenhänge immer existieren, kann mit Hilfe eines beliebigen Zusammenhangs zunächst nicht viel über geometrische Eigenschaften ausgesagt werden. Ist aber (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist der Levi-Civita-Zusammenhang ausgezeichnet und seine Holonomie gibt Auskunft über geometrische Eigenschaften der gewählten Metrik. Eine kleine Holonomiegruppe zieht dann starke Restriktionen nach sich, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen (Siehe [3] und die dort zitierte Literatur):

Beispiel 3.22 Holonomie in U(n)
Eine solche Mannigfaltigkeit trägt eine integrable komplexe Struktur[8], bzgl. derer g hermitesch ist. Die komplexe Struktur und die zugeordnete Kählerform sind kovariant konstant. Dieser Typ von Mannigfaltigkeiten heißt Kählermannigfaltigkeit.

Beispiel 3.23 Holonomie in SU(n)
Eine solche Mannigfaltigkeit hat trägt neben den Eigenschaften einer Kählermannigfaltigkeit noch eine komplexe Volumenform und ist immer Ricci-flach. Solche Räume heißen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten (kurz : CY)

3.4 Intrinsische Torsion

In diesem Abschnitt sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ bezeichne den Levi-Civita-Zusammenhang auf TM. Es werden im Folgenden nur metrische Zusammenhänge auf TM bzw. davon induzierten Vektorbündeln betrachtet. Durch die riemannsche Metrik liegt bereits eine $O(n)$-Struktur vor, die im Falle einer orientierbaren Mannigfaltigkeit weiter auf $SO(n)$ reduziert werden kann. In beiden Fällen gilt dann jeweils auch $Hol(\nabla) \subset O(n)$ bzw. $Hol(\nabla) \subset SO(n)$. Liegt eine Reduktion auf $G \leq O(n)$ vor, so wird $Hol(\nabla)$ im allgemeinen nicht mehr in dieser Gruppe enthalten sein. Es kann allerdings ein anderer G-Zusammenhang $\widetilde{\nabla}$ gewählt werden für den dies weiterhin der Fall ist, der aber nach Theorem 3.17 dann nicht mehr torsionsfrei sein kann. Mit Hilfe seines Torsionstensors aus Definition 3.16 können Informationen über die vorliegende G-Struktur gewonnen werden. Dies soll im Folgenden beschrieben werden, eine explizite Anwendung des diskutierten Verfahrens erfolgt für den Fall $G = U(n), SU(n)$ in Kapitel 5.

Der Torsionstensor $\widetilde{T} \in \Gamma\left(TM \otimes \Lambda^2 T^*M\right)$ eines metrischen G-Zusammenhangs $\widetilde{\nabla}$ hängt im allgemeinen nicht nur von der G-Struktur sondern von der konkreten Wahl des Zusammenhangs ab. Ist $\widehat{\nabla}$ ein weitere G-Zusammenhang, so ergibt sich analog zu der Diskussion im Kontext von Gleichung (3.3), dass $\widetilde{\nabla} - \widehat{\nabla} \in \Gamma\left(T^*M \otimes \mathfrak{g}\right) \subset \Gamma\left(T^*M \otimes T^*M \otimes TM\right)$. Die Torsionsdifferenz $\widetilde{T}_{X,Y} - \widehat{T}_{X,Y}$ ergibt sich nach Definition durch Schiefsymmetrisierung von $(\widetilde{\nabla} - \widehat{\nabla})_X Y$ in X und Y. Mit der Schiefsymmetrisierungsabbildung

$$\begin{aligned} alt_{12} : T^*M \otimes T^*M \otimes TM &\longrightarrow \Lambda^2 T^*M \otimes TM \\ (\alpha \otimes \beta \otimes X) &\mapsto (\alpha \wedge \beta) \otimes X \end{aligned} \tag{3.4}$$

resultiert die folgende Proposition (siehe [43], [11]), die zu einer neuen Torsionsgröße führt, die nicht mehr von der Wahl des G-Zusammenhangs abhängt:

Proposition 3.24 *Existiere auf (M, g) ein G-Struktur und seien $\widetilde{\nabla}, \widehat{\nabla}$ zwei G-Zusammenhänge auf TM mit Torsion $\widetilde{T}$ bzw. $\widehat{T}$, dann gilt:*

(a) Die Torsionsdifferenz $\widetilde{T} - \widehat{T}$ liegt im Bild $\Gamma\left(alt_{12}(T^*M \otimes \mathfrak{g})\right)$ der Schiefsymmetrisierung.

(b) Die Projektionen $[\widetilde{T}]$ und $[\widehat{T}]$ von $\widetilde{T}$ bzw. $\widehat{T}$ auf $\Gamma\left((\Lambda^2 T^*M \otimes TM)/alt_{12}(T^*M \otimes \mathfrak{g})\right)$ stimmen überein. Diese Größe $T_0 := [\widetilde{T}] = [\widehat{T}]$ hängt damit nur noch von der G-Struktur ab, sie wird als intrinsische Torsion dieser G-Struktur bezeichnet.

Aufgefasst als Element von $\Gamma\left((\Lambda^2 T^*M \otimes TM)/alt_{12}(T^*M \otimes \mathfrak{g})\right)$ ist die intrinsische Torsion für praktische Zwecke ein „unhandliches“ Objekt, daher soll im folgenden Abschnitt eine andere Darstellung angegeben werden.

Da ausschließlich metrische Zusammenhänge betrachtet werden, handelt es sich stets um $O(n)$-Zusammenhänge und es folgt $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{o}_n = \mathfrak{so}_n$. Durch Identifizierung mit der Metrik gilt weiter $\mathfrak{so}_n \cong \Lambda^2 T^*_m M$. Auf diese Weise trägt $\mathfrak{so}_n$ ein natürliches Skalarprodukt und es resultiert die Zerlegung

$$\Lambda^2 T^*_m M \cong \mathfrak{so}_n = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp.$$

Die Abbildung (3.4) liefert unter der Identifizierung $T^*M \cong TM$ schließlich einen Isomorphismus $\Lambda^2 T^*_m M \otimes T^*M \cong T^*M \otimes \Lambda^2 T^*_m M$ und damit:

$$\frac{\Lambda^2 T^*_m M \otimes T_m M}{alt_{12}(T^*_m M \otimes \mathfrak{g})} \cong \frac{T^*_m M \otimes \Lambda^2 T^*_m M}{T^*_m M \otimes \mathfrak{g}} \cong T^*M \otimes \mathfrak{g}^\perp \tag{3.5}$$

Die intrinsische Torsion T_0 kann daher mit einem Schnitt $\tau \in \Gamma\left(T^*M \otimes \mathfrak{g}^\perp\right)$ identifiziert werden. In dieser Arbeit wird die intrinsische Torsion von nun an immer als ein solcher Schnitt betrachtet. Zusammenfassung von Aussagen aus [43] und [11] ergibt mit der Vorzeichenkonvention aus [11] das folgende Theorem über die Existenz ausgezeichneter G-Zusammenhänge:

Theorem 3.25 *Trage (M, g) eine G-Struktur mit $G \subset O(n)$, die im Sinne von Theorem 3.7 durch Tensorfelder $\hat{A}_1, \ldots \hat{A}_k$ definiert wird, dann gilt:*

(a) Es existiert genau ein G-Zusammenhang $\widetilde{\nabla}$ auf TM, s.d. $\widetilde{\nabla} - \nabla \in \Gamma\left(T^*M \otimes \mathfrak{g}^\perp\right)$. Er wird als minimaler Zusammenhang der G-Struktur bezeichnet.

(b) Die Differenz $\widetilde{\nabla} - \nabla$ ist die intrinsische Torsion der G-Struktur, d.h. es gilt

$$\widetilde{\nabla} = \nabla + \tau$$

(c) Für die Tensoren $\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_k$ und $X \in \Gamma(TM)$ gilt:

$$\widetilde{\nabla}_X \hat{A}_i = 0 \qquad\qquad \nabla_X \hat{A}_i = -\tau_X \hat{A}_i$$

[8] Die Begriffe komplexe Struktur, Kählerform und komplexe Volumenform werden später in Kapitel 4.1 genauer erläutert.

Beweis

(a) Sei $\widehat{\nabla}$ ein beliebiger metrischer G-Zusammenhang. Dann existiert die eindeutige Zerlegung $\nabla - \widehat{\nabla} = \alpha + \beta$ mit $\alpha \in \Gamma\left(T^*M \otimes \mathfrak{g}\right)$ und $\beta \in \Gamma\left(T^*M \otimes \mathfrak{g}^\perp\right)$. Der Zusammenhang $\widetilde{\nabla} := \widehat{\nabla} + \alpha$ leistet dann das Gewünschte, die Eindeutigkeit folgt daraus, dass die Differenz zweier G-Zusammenhänge nur Beiträge zum $\mathfrak{g}$-, nicht aber zum $\mathfrak{g}^\perp$-Anteil liefert. Siehe auch [11].

(b) Die Differenz der Torsionen von $\widetilde{\nabla}$ und ∇ ist nach Definition die Antisymmetrisierung von $-\beta$. Da ∇ torsionsfrei ist beschreibt $-\beta$ allein die Torsion von $\widetilde{\nabla}$ und wird mit ihr durch (3.5) identifiziert. Da $-\beta$ bereits Werte in $\mathfrak{g}^\perp$ annimmt, wird bei der Projektion auf $\Gamma\left(T^*M \otimes \mathfrak{g}^\perp\right)$ keine Komponente mehr herausprojiziert und $-\beta$ ist bereits die intrinsische Torsion.

(c) Dies folgt sofort aus (a), (b) und Theorem 3.19, da $\widetilde{\nabla}$ ein G-Zusammenhang ist.

$\square$

Teil (c) dieses Theorems wird in Kapitel 5.3 die ganz explizite Berechnung der intrinsischen Torsion einer $U(3)$- bzw. $SU(3)$-Struktur ermöglichen. Der Begriff „minimal Zusammenhang" rührt daher, dass die L^2-Norm der Torsion dieses Zusammenhangs, berechnet auf kompakten Teilmengen von M, gerade minimal wird im Vergleich mit anderen $G-$Zusammenhängen.

4 SU(3)-Geometrie

4.1 Konventionen & Basisdarstellung

In diesem Abschnitt werden zunächst die relevanten Operationen auf den alternierenden Formen (Skalarprodukte, Hodge-Operator, Kontraktionen, Operationen von Endomorphismen auf Formen) zusammengestellt und dabei einige Konventionen fixiert. Im zweiten Teil wird die explizite Darstellung einiger wichtiger Tensoren in einer angepassten reellen bzw. komplexen Basis diskutiert. Da es sich vielfach um bekannte Aussagen und Definitionen handelt, die bis auf Vorfaktoren in Standardwerken zur Differentialgeometrie (zum Beispiel [34]) zu finden sind, kann dieser Teil zunächst übergangen und dann an einzelnen Stellen darauf zurückgegriffen werden.

Eine riemannsche Metrik g induziert Skalarprodukte auf weiteren Tensorbündeln, im Folgenden mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet. Insbesondere ergibt sich so das übliche punktweise Skalarprodukt auf ΛT_m^*M, das durch folgende äquivalente Ausdrücke auf $\Lambda^p T_m^*M$ definiert werden kann:

$$\begin{aligned} \langle\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_p,\beta_1\wedge\ldots\wedge\beta_p\rangle &= \det\left(\langle\alpha_i,\beta_j\rangle\right)_{ij} \\ \langle\alpha,\beta\rangle &= \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{6}\alpha(E_{i_1},\ldots E_{i_p})\beta(E_{i_1},\ldots E_{i_p}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dabei bezeichnet $\{E_i\}$ einen lokalen orthonormalen Rahmen von T_mM. Ganz analog wird das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\Lambda(T_m^*M\otimes\mathbb{C})$ definiert, wobei in (4.1) der erste Faktor konjugiert-komplex eingeht, das Produkt also antilinear im ersten Eintrag gewählt wird. Im allgemeinen ist das reelle Skalarprodukt aber nicht der Realteil des komplexen, dies gilt nur für 1-Formen. Mit Hilfe der Konjugation könne alle Skalarprodukte durch nicht-entartete $\mathbb{C}$-Bilinearformen ausgedrückt werden, die aus der Metrik resultieren. Zum Beispiel gilt $\langle W,Z\rangle_{herm} = g(\overline{W},Z)$ für komplexe Vektorfelder W und Z. Die Existenz der nicht-entarteten $\mathbb{C}$-Bilinearform g ermöglicht Identifizierungen

$$T_mM\cong T_m^*M \qquad T_mM^{1,0}\cong T_m^*M^{0,1} \qquad T_mM^{0,1}\cong T_m^*M^{1,0}$$

sowie in Konsequenz Identifizierungen für Unterbündel, (äußere und symmetrische) Potenzen etc. Sie werden im Verlauf der Arbeit teilweise ohne weiteren Kommentar verwendet, sofern keine Gefahr der Fehlinterpretation besteht. Alle diese Identifizierungen sind $\mathbb{C}$-linear und ebenso werden alle Abbildungen, sofern nicht anders vermerkt, $\mathbb{C}$-multilinear fortgesetzt.

Bezeichnet $(\cdot,\cdot)$ die kanonische Paarung auf $\Lambda T_m^*M\times\Lambda T_mM\longrightarrow\mathbb{R}$ (entsprechend für symmetrische Potenzen), die den Konventionen in [47] folgend durch $(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_p,v_1\wedge\ldots\wedge v_p) := \det(\varphi_i(v_j))_{ij}$ definiert wird und damit unter $T_m^*M\cong T_mM$ dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ entspricht, so kann die Kontraktion „$\lrcorner$" als adjungierte Operation zum $\wedge$-Produkt definiert werden, d.h. für $s+t=p$

$$(u\lrcorner\varphi,v) = (\varphi,u\wedge v) \qquad \forall\varphi\in\Lambda^pT_m^*M,\ u\in\Lambda^sT_mM,\ v\in\Lambda^tT_mM$$

Nach $\mathbb{C}$-bilinearer Fortsetzung vertauscht die kanonische Paarung mit der Konjugation, d.h. $\overline{(\varphi, Z)} = \big(\overline{\varphi}, \overline{Z}\big)$. Da Konjugation (siehe [32]) auch mit $\wedge$ vertauscht, zeigt diese Definition unmittelbar, dass das auch für die Kontraktion gilt. Das folgende Lemma listet fundamentale Eigenschaften dieser Abbildung auf.

Lemma 4.1 *Die Kontraktion ist eine Abbildung vom Grad $-s$, d.h. $u \lrcorner \varphi \in \Lambda^t T_m^* M$ mit Bezeichnungen wie oben und es gilt weiter:*

(a) Für $u \in \Lambda^s T_m M, v \in \Lambda^t T_m M, s+t \leq p$:

$$(u \wedge v) \lrcorner \varphi = v \lrcorner u \lrcorner \varphi \qquad\qquad u \lrcorner v \lrcorner \varphi = (-1)^{st} v \lrcorner u \lrcorner \varphi$$

(b) Für $X \in T_m M, \varphi \in \Lambda^p T_m^* M, \psi \in \Lambda T_m^* M$:

$$X \lrcorner (\varphi \wedge \psi) = X \lrcorner \varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge X \lrcorner \psi \qquad \textit{(Antiderivationseigenschaft)}$$

Beweis Siehe [47] und [21].

□

Die Kontraktion steht in engem Zusammenhang mit dem Einsetzungshomomorphismus

$$\begin{aligned} \iota_{k_1,\dots,k_r} &: T_m M^{\otimes r} \otimes T_m^* M^{\otimes s} \longrightarrow T_m^* M^{\otimes s-r} \\ \iota_{k_1,\dots,k_r}&(X_1 \otimes \ldots \otimes X_r)(\varphi) := \varphi(\ldots, X_1, \ldots, X_r, \ldots) \end{aligned}$$

für $r \leq s$, wobei $X_1, \ldots, X_r$ an die Stellen k_1 bis k_r in die Multilinearform φ eingesetzt wird. Im Rahmen der natürlichen Einbettung[9] $\Lambda^p T_m M \subset T_m M^{\otimes p}$ bzw. $\Lambda^p T_m^* M \subset T_m^* M^{\otimes p}$ gelten für $X, X_i \in T_m M, \quad \varphi \in \Lambda^k T_m^* M$ folgende leicht zu verifizierende Identitäten:

$$\begin{aligned} X \lrcorner \varphi &= \iota_1(X)(\varphi) = \varphi(X, \cdots) \\ (X_1 \wedge \ldots \wedge X_r) \lrcorner \varphi &= \iota_{1\ldots r}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_r)(\varphi) = \varphi(X_1, \ldots, X_r) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Unter der Identifizierung $T_m M \cong T_m^* M$ gilt für $\varphi, \psi \in \Lambda^p T_m^* M$ bzw. $\eta, \xi \in \Lambda^p T_m M$:

$$\varphi \lrcorner \psi = \langle \varphi, \psi \rangle \qquad \varphi \lrcorner \xi = \xi \lrcorner \varphi \qquad \eta \lrcorner \xi = \langle \eta, \xi \rangle \tag{4.3}$$

Diese Gleichungen gelten nicht für Formen/Multivektoren verschiedenen Grades. Für $deg(\varphi) > deg(\psi)$ folgt direkt aus der Definition $\varphi \lrcorner \psi = 0$, entsprechendes gilt für die anderen beiden Fälle. In den verbleibenden Fällen lässt sich zumindest für den Fall, dass der rechts stehende Tensor homogen ist, eine explizite Formel angeben:

[9] Hier treten keine Faktoren $k!$ auf, die Identifizierung lautet also $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \cong \sum_{\sigma \in S_k} sign(\sigma) v_{\sigma 1} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma k}$. Damit entspricht die in Paarung $(\cdot, \cdot)$ der äußeren Potenzen nicht derjenigen, die über diese Einbettung von der kanonischen Paarung zwischen $T_m^* M^{\otimes}$ und $T_m M^{\otimes}$ induziert wird.

Proposition 4.2 *Für $\xi \in \Lambda^p T_m M$, $\eta = Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_p \wedge Y_{p+1} \wedge \ldots \wedge Y_{p+q} \in \Lambda^{p+q} T_m M$ gilt:*

$$\begin{aligned}\xi \lrcorner \eta &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sign(\sigma)\, \xi \lrcorner (Y_{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge Y_{\sigma_p})\, Y_{\sigma_{p+1}} \wedge \ldots \wedge Y_{\sigma_{p+q}} \\ &= \sum_{\sigma \in \widehat{S}_{p,q}} sign(\sigma)\, \xi \lrcorner (Y_{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge Y_{\sigma_p})\, Y_{\sigma_{p+1}} \wedge \ldots \wedge Y_{\sigma_{p+q}}\end{aligned}$$

wobei $\widehat{S}_{p,q} := \{\sigma \in S_{p+q} | \; \sigma_1 < \ldots < \sigma_p, \; \sigma_{p+1} < \ldots < \sigma_{p+q}\}$. Entsprechende Formeln ergeben sich mit (4.2) und (4.3), wenn Multivektoren mit Formen oder Formen mit Formen/Multivektoren kontrahiert werden.

Beweis Es genügt, $\xi = X_1 \wedge \ldots \wedge X_p$ zu betrachten. Werden die Y_i im Rahmen der beschriebenen Identifizierungen als 1-Formen aufgefasst, gilt:

$$\begin{aligned}X_p \lrcorner \ldots \lrcorner X_1 \lrcorner \eta &= Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_{p+q}(X_1, \ldots, X_p, \cdot, \cdots) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sign(\sigma) Y_{\sigma_1}(X_1) \cdots Y_{\sigma_p}(X_p)\, Y_{\sigma_{p+1}} \otimes \ldots \otimes Y_{\sigma_{p+q}} \\ &= \sum_{\sigma \in \widehat{S}_{p+q}} sign(\sigma) \xi \lrcorner (Y_{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge Y_{\sigma_p})\, Y_{\sigma_{p+1}} \wedge \ldots \wedge Y_{\sigma_{p+q}} \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} sign(\sigma) \xi \lrcorner (Y_{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge Y_{\sigma_p})\, Y_{\sigma_{p+1}} \wedge \ldots \wedge Y_{\sigma_{p+q}}\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wird verwendet, dass die zusätzlichen Summanden, die aus Permutationen innerhalb der $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$ bzw. $\{\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{p+q}\}$ resultieren, jeweils mit dem gleichen Vorzeichen zur gesamten Summe beitragen.

□

Alle hier angegebenen Aussagen über die Kontraktion gelten in $\mathbb{C}$-linearer Fortsetzung auf den komplexifizierten Räumen bzgl. der $\mathbb{C}$-bilinearen Fortsetzung des Skalarprodukts.

Die zweite relevante Operation auf Formen ist der Hodge-Stern $* : \Lambda T_m^* M \longrightarrow \Lambda T_m^* M$, der von gewählter Metrik und Orientierung (genauer von der konformen Struktur) abhängt, und durch

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, vol \tag{4.4}$$

definiert ist. Dabei bezeichnet $vol \in \Lambda^n T_m^* M$ $(n = dim(M))$ das reelle Volumenelement von M, d.h mit einer orientierten Orthonormalbasis $\{dE_i\}$ von $T_m^* M$ gilt $vol = dE_1 \wedge \ldots \wedge dE_n$. Die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung des Operators wird ebenfalls mit $*$ bezeichnet. Dabei handelt es sich nicht, wie aus dem Grad des Ergebnisses ersichtlich ist, um den komplexen Hodge-Stern $*_{\mathbb{C}}$, der durch Bedingung (4.4), angewendet auf das komplexe Volumenelement ψ, definiert ist. Eigenschaften der Abbildung $*$ sind:

Proposition 4.3

(a) $*\Lambda^p T_m^* M \subset \Lambda^{n-p} T_m^* M$ *und* $(*|_{\Lambda^p})^2 = (-1)^{p(n-p)}$

(b) $*$ *ist (anti)selbstadjungiert und isometrisch, genauer*

$$\langle \alpha, *\beta \rangle = (-1)^{p(n-p)} \langle *\alpha, \beta \rangle \qquad\qquad \langle *\alpha, *\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

(c) Für einen orientierten orthonormalen Rahmen $dE_1, \ldots, dE_n$ *gilt*

$$*dE_I = sign(I; I^c) dE_{I^c}, \qquad \textit{insbesondere } *1 = vol = dE_1 \wedge \ldots \wedge dE_n$$

für die Multiindizes $I = (i_1, \ldots, i_p)$, $I^c := (1, \ldots, n) \setminus I$ *und* $(I; J) := I \cup I^c$*(geordnet) und* $dE_I = dE_{i_1} \wedge \ldots \wedge dE_{i_p}$.

(d) Für $\alpha \in T_m^* M$, $\beta \in \Lambda^p T_m^* M$ *gilt:*

$$\alpha \lrcorner \beta = (-1)^{n(p-1)} * (\alpha \wedge *\beta)$$

wobei $\lrcorner$ *die zu* $\wedge$ *adjungierte Operation auf Formen bezeichnet.*

Beweis Siehe [47], [32] und [21].

□

Im Rahmen der Identifizierung $T_m M \cong T_m^* M$ kann der $*$-Operator durch folgende, zu (4.4) äquivalente Bedingung, durch das reelle Volumenelement charakterisiert werden:

Lemma 4.4 *Für* $\alpha \in \Lambda T_m^* M \cong \Lambda T_m M$ *gilt:*

$$*\alpha = \alpha \lrcorner vol$$

Beweis Es genügt, die Aussage für $\alpha = dE_{i_1} \wedge \ldots \wedge dE_{i_p}$ zu zeigen. Mit dem komplementären Multiindex I^c, Lemma 4.1, Proposition 4.3 sowie $sign(I, I^c) = (-1)^{i_1 - 1} \ldots (-1)^{i_p - p}$ folgt:

$$\begin{aligned} dE_I \lrcorner vol &= dE_{i_p} \lrcorner \ldots dE_{i_1} \lrcorner dE_1 \wedge \ldots \wedge dE_n \\ &= (-1)^{i_1 - 1} dE_{i_p} \lrcorner \ldots dE_{i_2} \lrcorner dE_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dE_{i_1}} \wedge \ldots \wedge dE_n \\ &= sign(I, I^c) dE_{I^c} = *dE_I \end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung.

□

Proposition 4.3 (d) impliziert in diesem Rahmen die nützlichen Formeln

$$*(X \wedge \alpha) = (-1)^p X \lrcorner * \alpha \qquad\qquad *(X \lrcorner \alpha) = (-1)^{p-1} X \wedge *\alpha \tag{4.5}$$

Analoge Aussagen gelten wiederum für den komplex-linearen Fall.

Die Wirkung von linearen Abbildungen auf der äußeren Algebra ist auf verschiedene Weisen möglich. Ist $A \in End(T_mM)$ ein Endomorphismus, so wirkt A in natürlicher Weise auf T_m^*M durch $A \cdot \varphi = -\varphi \circ A$. Diese Wirkung ist für $A \in \mathfrak{so}_n$ mit der Identifizierung $T_mM \cong T_m^*M$ verträglich, da[10] $Av \cong \langle A(v), \cdot \rangle = -\langle v, A\cdot \rangle = -{}^\# v \circ A = A({}^\# v)$. Sie stellt die infinitesimale Version der Operation von $Aut(T_mM)$ auf T_m^*M dar, die durch $g \cdot \varphi = \varphi \circ g^{-1}$ gegeben ist. Für $A \in \mathfrak{so}_n^\perp \cong \{F \in End(T_mM) \mid F = F^t\}$ gilt dagegen $Jv \cong -J({}^\# v)$. Entsprechend der gerade besprochenen Operationen kann eine lineare Abbildung als Gruppenelement (sofern invertierbar) oder als Lie-Algebrenelement auf der äußeren Algebra wirken:

Definition 4.5

(a) $g \in Aut(T_mM)$ operiert auf ΛT_mM durch

$$g \cdot (v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) := g(v_1) \wedge \ldots \wedge g(v_p)$$

(b) $A \in End(T_mM)$ operiert auf ΛT_mM durch

$$Der(A)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) := \sum_{i=1}^{p} A_{(i)}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) := \sum_{i=1}^{p} v_1 \wedge \ldots \wedge A(v_i) \wedge \ldots \wedge v_p$$

Ganz analog werden die Wirkungen auf ΛT_m^*M definiert. In einer fixierten reellen Basis $\{E_i\}$ kann die Abbildung $Der(A)$ explizit durch „$\wedge$“ und „$\lrcorner$“ beschrieben werden. Für $\alpha \in \Lambda T_m^*M$ gilt

$$Der(A)\alpha = -\sum_i dE_i \wedge (AE_i \lrcorner \alpha) = \sum_i A(dE_i) \wedge (E_i \lrcorner \alpha) \tag{4.6}$$

Diese Formel ist auf $\Lambda^1 T_mM$ offenbar richtig. Da durch die rechte Seite eine Derivation definiert wird, folgt der allgemeine Fall aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung als Derivation. Für die Wirkung auf ΛT_mM existiert eine vergleichbare Formel:

$$Der(A)\alpha = -\sum_i E_i \wedge (A(dE_i) \lrcorner \alpha) = \sum_i AE_i \wedge (dE_i \lrcorner \alpha) \tag{4.7}$$

Etwas Vorsicht ist geboten bei der Verwendung dieser Formeln im Kontext von $T_mM \cong T_m^*M$, da die Verträglichkeit mit der Identifizierung nur für schiefsymmetrische Endomorphismen gegeben ist, im symmetrischen Fall tritt ein zusätzliches Vorzeichen auf.
Hinsichtlich des Skalarproduktes auf Formen sowie der Operation $\lrcorner$ gelten folgende Rechenregeln:

[10] Im Folgenden wird die (unübliche) Konvention $^\# : V \longrightarrow V^*$ sowie $^\flat : V^* \longrightarrow V$ verwendet, wobei ${}^\# X = g(X, \cdot)$ durch die Metrik g definiert ist und $\flat := (\#)^{-1}$.

Lemma 4.6
(a) Für $F^\pm \in End^\pm(T_mM)$, $G \in O(T_mM)$ und $\alpha, \beta \in \Lambda^p T_m^*M$ gilt:

$$\left\langle F^\pm \cdot \alpha, \beta \right\rangle = (\pm 1)^p \left\langle \alpha, F^\pm \cdot \beta \right\rangle \qquad \langle G \cdot \alpha, G \cdot \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

(b) Für $F^\pm \in End^\pm(T_mM) \cap GL(T_mM)$, G, α wie in (a) und $\beta \in \Lambda T_m^*M$ gilt:

$$G \cdot (\alpha \lrcorner \beta) = (G \cdot \alpha) \lrcorner (G \cdot \beta) \qquad F^\pm \cdot (\alpha \lrcorner \beta) = (\pm 1)^p ((F^\pm)^{-1} \cdot \alpha) \lrcorner (F^\pm \cdot \beta)$$

(c) Für $F^\pm \in End^\pm(T_mM)$ und $\alpha, \beta \in \Lambda T_m^*M$ gilt:

$$\left\langle Der(F^\pm)\alpha, \beta \right\rangle = \pm \left\langle \alpha, Der(F^\pm)\beta \right\rangle$$

(d) Für $F \in End^\pm(T_mM)$ und $\alpha, \beta \in \Lambda T_m^*M$ gilt:

$$Der(F)(\alpha \lrcorner \beta) = (Der(F)\alpha) \lrcorner \beta \mp \alpha \lrcorner (Der(F)\beta)$$

Beweis Teil (a) folgt direkt aus (4.1). Für $\alpha \in \Lambda^p T_m^*M$, $\beta \in \Lambda^q T_m^*M$ sowie $\gamma \in \Lambda^{q-p} T_m^*M$ impliziert die zweite Identität:

$$\left\langle F^\pm \cdot (\alpha \lrcorner \beta), \gamma \right\rangle = (\pm 1)^{q-p} \left\langle \beta, F^\pm \cdot ((F^\pm)^{-1} \alpha \wedge \gamma) \right\rangle = \left\langle ((F^\pm)^{-1} \cdot \alpha) \lrcorner (F^\pm \cdot \beta), \gamma \right\rangle$$

Dies zeigt die zweite Aussage aus (b), die erste folgt ganz analog.

Für $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k \in \Lambda^k T_m^*M$ und festes $\sigma \in S_k$ gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \langle \alpha_1, \beta_{\sigma_1} \rangle \cdots \langle F\alpha_i, \beta_{\sigma_i} \rangle \cdots \langle \alpha_k, \beta_{\sigma_k} \rangle = \pm \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha_1, \beta_{\sigma_1} \rangle \cdots \langle \alpha_{(\sigma^{-1})_i}, F\beta_i \rangle \cdots \langle \alpha_k, \beta_{\sigma_k} \rangle$$

Beide Summen unterscheiden sich ggf. lediglich in der Reihenfolge der Summanden. Teil (c) folgt dann aus der Definition (4.1) des Skalarproduktes zusammen mit der Leibnizformel für die Determinante. Teil (d) ergibt sich mit $\gamma \in \Lambda T_m^*M$ und (a) aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
\left\langle Der(F^\pm)(\alpha \wedge \beta), \gamma \right\rangle &= \pm \langle \beta, \alpha \wedge (Der(F)\gamma) \rangle \\
&= \pm \langle \beta, Der(F)(\alpha \wedge \gamma) - (Der(F)\alpha) \wedge \gamma \rangle \\
&= \langle \alpha \lrcorner (Der(F)\beta), \gamma \rangle \mp \langle (Der(F)\alpha) \lrcorner \beta, \gamma \rangle
\end{aligned}$$

□

Im Folgenden werden einige „Rechenregeln“ für Ausdrücke, die die explizite Wahl einer (komplexen) Basis involvieren, diskutiert. Dabei wird hier mit Modelltensoren in $\mathbb{R}^6$, $\mathbb{C}^6$ etc. gearbeitet, alle Formeln verallgemeinern sich auf Schnitte in den entsprechenden Bündeln. Nach

Komplexifizierung $\mathbb{R}^6 \otimes \mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$-bilinearer Fortsetzung von g seien mit $\{F_1, F_2, F_3\}$ und daraus durch Konjugation resultierend $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\}$ angepasste Basen von $(\mathbb{R}^6)^{1,0}$ bzw. $(\mathbb{R}^6)^{0,1}$ gewählt, die den Bedingungen

$$g(F_\alpha, F_\beta) = g(\overline{F}_\alpha, \overline{F}_\beta) = 0 \quad \text{und} \quad g(F_\alpha, \overline{F}_\beta) = g(\overline{F}_\alpha, F_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$
$$\psi(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3) = 1 \tag{4.8}$$

genügen. Im Vorgriff auf Abschnitt 4.2 bezeichne dabei g eine euklidisches Skalarprodukt, $J \in End(\mathbb{R}^6)$ eine fast komplexe Struktur, $\omega := g(J\cdot, \cdot) \in \Lambda^{1,1}(\mathbb{R}^6)^*$ die induzierte Kählerform und $\psi \in \Lambda^{3,0}(\mathbb{R}^6)^*$ eine komplexe Volumenform bzgl. J. Die Definition der Formenräume $\Lambda^{p,q}(\mathbb{R}^6)^*$ wird in Abschnitt 4.4 (Definition 4.44 sowie Proposition 4.46) gegeben.
Seien desweiteren $\{dF_1, dF_2, dF_3\}$ sowie $\{d\overline{F}_1, d\overline{F}_2, d\overline{F}_3\}$ die jeweiligen duale Basen, insbesondere gilt also $dF_\alpha(\overline{F}_\beta) = d\overline{F}_\alpha(F_\beta) = 0$. Vermöge

$$E_{2\alpha-1} := \frac{1}{\sqrt{2}}(F_\alpha + \overline{F}_\alpha) \quad \text{und} \quad E_{2\alpha} := \frac{i}{\sqrt{2}}(F_\alpha - \overline{F}_\alpha) \tag{4.9}$$

ist eine reelle Orthonormalbasis $\{E_i\},\ i = 1, \ldots, 6$ bzgl. g definiert. Für die duale Basis ergibt sich daraus die Relation $dE_{2\alpha-1} = 1/\sqrt{2}(dF_\alpha + d\overline{F}_\alpha)$ bzw. $dE_{2\alpha} = i/\sqrt{2}(dF_\alpha - d\overline{F}_\alpha)$. Diese Wahl der reellen Basis ist charakterisiert durch die Identität

$$\sum_i E_i \otimes E_i = \sum_\alpha F_\alpha \otimes \overline{F}_\alpha + \overline{F}_\alpha \otimes F_\alpha$$

Die oben verwendeten Modelltensoren g, J, ω, ψ für die später relevant werdenden geometrischen Objekte schreiben sich in der gewählten Modellbasis wie folgt:

Lemma 4.7

(a) $$g = \sum_\alpha dF_\alpha \cdot d\overline{F}_\alpha = \sum_\alpha dF_\alpha \otimes d\overline{F}_\alpha + d\overline{F}_\alpha \otimes dF_\alpha$$

(b) $$J = i \sum_\alpha d\overline{F}_\alpha \otimes F_\alpha - dF_\alpha \otimes \overline{F}_\alpha$$

(c) $$\omega = i \sum_\alpha d\overline{F}_\alpha \wedge dF_\alpha = i \sum_\alpha d\overline{F}_\alpha \otimes dF_\alpha - dF_\alpha \otimes d\overline{F}_\alpha$$

(d) $$\psi = dF_1 \wedge dF_2 \wedge dF_3$$

Beweis Teil (a) ergibt sich direkt aus der Wahl der Basis, Teil (b) aus der Definition von $(\mathbb{R}^6)^{1,0}$ bzw. $(\mathbb{R}^6)^{0,1}$ als Eigenräume von J zu den Eigenwerten $+i$ und $-i$ und (c) durch Einsetzen von (b) in (a). Da ψ und $dF_1 \wedge dF_2 \wedge dF_3$ in $\Lambda^{3,0}(\mathbb{R}^6)^*$ liegen und dieser Raum eindimensional ist, folgt (c) aus der Tatsache, dass beide Formen auf (F_1, F_2, F_3) den Wert 1 annehmen.

□

Umschreiben auf die reelle Orthonormalbasis mit $dE_{ijk} := dE_i \wedge dE_j \wedge dE_k$ etc. liefert direkt

Korollar 4.8

$$\begin{aligned}
&(a) \quad g = \frac{1}{2}\sum_i dE_i \cdot dE_i = \sum_i dE_i \otimes dE_i \\
&(b) \quad J = \sum_\alpha dE_{2\alpha-1} \otimes E_{2\alpha} - dE_{2\alpha} \otimes E_{2\alpha-1} \qquad d.h.\ J(E_{2\alpha-1}) = E_{2\alpha},\ J(E_{2\alpha}) = -E_{2\alpha-1} \\
&(c) \quad \omega = \sum_\alpha dE_{2\alpha-1} \wedge dE_{2\alpha} = \frac{1}{2}\sum_i dE_i \wedge J(dE_i) \\
&(d) \quad \psi = \frac{\sqrt{2}}{4}(dE_{135} - dE_{146} - dE_{236} - dE_{245}) + \frac{\sqrt{2}i}{4}(dE_{136} + dE_{145} + dE_{235} - dE_{246})
\end{aligned}$$

Bezeichne im Folgenden S_3 die symmetrische Gruppe über 3 Elementen und S_3^+ die Untergruppe der Elemente mit positiver Parität. Mit ihrer Hilfe ergeben sich folgende Identitäten, die Wahl der Basis involvieren:

Lemma 4.9
(a) Auf $\mathbb{C}^6$ gilt die Identität

$$\tfrac{1}{2}\mathbb{1}_{\mathbb{C}^6} = \sum_{\sigma\in S_3^+} \mathcal{R}e\,\psi(\cdot, \overline{F}_{\sigma_1}, \overline{F}_{\sigma_2})\overline{F}_{\sigma_3} + \mathcal{R}e\,\psi(\cdot, F_{\sigma_1}, F_{\sigma_2})F_{\sigma_3}$$

(b) Zwischen g und $\mathcal{R}e\,\psi$ besteht folgende Relation:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}g &= \sum_{\sigma\in S_3^+} \mathcal{R}e\,\psi(\cdot, \overline{F}_{\sigma_1}, \overline{F}_{\sigma_2})\mathcal{R}e\,\psi(\cdot, F_{\sigma_1}, F_{\sigma_2}) + \mathcal{R}e\,\psi(\cdot, F_{\sigma_1}, F_{\sigma_2})\mathcal{R}e\,\psi(\cdot, \overline{F}_{\sigma_1}, \overline{F}_{\sigma_2}) \\
&= \sum_{ij} \mathcal{R}e\,\psi(\cdot, E_i, E_j)\mathcal{R}e\,\psi(\cdot, E_i, E_j)
\end{aligned}$$

Beweis Da ψ in $\Lambda^{3,0}T_m^*M$ liegt, trägt bei Einsetzen von F_μ in die rechte Seite von (a) nur der Summand $\mathcal{R}e\,\psi(F_\mu, F_{\sigma_1}, F_{\sigma_2})F_{\sigma_3}$ für $\mu = \sigma_3$ zur Summe bei. Wegen $sign(\sigma) = 1$ und $\mathcal{R}e\,\psi = \frac{1}{2}(\psi + \overline{\psi})$ hat diese den Wert $\frac{1}{2}F_\mu$. Entsprechendes gilt für die Basisvektoren $\{\overline{F}_\mu\}$, dies zeigt Teil (a).
Für $\sigma \in S_3^+$ folgt wie in Teil (a)

$$g(F_{\sigma_3}, \cdot) = 2\mathcal{R}e\,\psi(\cdot, \overline{F}_{\sigma_1}, \overline{F}_{\sigma_2}) \qquad\qquad g(\overline{F}_{\sigma_3}, \cdot) = 2\mathcal{R}e\,\psi(\cdot, F_{\sigma_1}, F_{\sigma_2})$$

Zusammen mit der Identität aus Teil (a) sowie der Beziehung (4.9) folgt Teil (b) durch Reorganisation der Summanden.

□

4.2 Grundlagen der allgemeinen SU(3)-Geometrie

Eine $SU(3)$-Struktur ist nach Kapitel 3 eine Reduktion der Strukturgruppe des Rahmenbündels $P(TM)$ von $GL(6,\mathbb{R})$ auf $SU(3)$ und kann äquivalent durch Tensoren beschrieben werden, deren Stabilisatoren den gemeinsamen Durchschnitt $SU(3)$ haben. Die Definitionen aller im Folgenden auftretender Formenräume ($\Lambda^{p,q}T^*M$, $[\![\Lambda^{p,q}]\!]$, $[\Lambda^{p,p}]$ etc.) wird gebündelt in Abschnitt 4.4 im Kontext der Diskussion der Zerlegung einer k-Form in $SU(3)$-irreduzible Summanden gegeben. Hier werden im Folgenden

- eine riemannsche Metrik: $g \in \Gamma\left(\mathrm{Sym}^2(T^*M)\right)$
- eine fast-komplexe Struktur: $J \in O(TM)$ mit $J^2 = -\mathbb{1}$
- die zugeordnete Kählerform: $\omega \in \left[\Lambda^{1,1}\right] \subset \Gamma\left(\Lambda^2 T^*M\right)$
- eine komplexe Volumenform: $\psi = \mathcal{R}e\,\psi + i\mathcal{I}m\,\psi \in \Gamma\left(\Lambda^{3,0}T^*M\right)$ mit $\langle\psi,\psi\rangle = 1$

auf einer Mannigfaltigkeit M^6 betrachtet.

Bemerkung 4.10

(a) Es genügt, zwei der ersten drei genannten Tensoren vorzugeben, der Dritte kann dann nach $\omega = g(J\cdot,\cdot)$, $g = -\omega(J\cdot,\cdot)$ oder $J = {}^\flat\omega$ rekonstruiert werden.

(b) Anstelle von $\psi \in \Gamma\left(\Lambda^{3,0}T^*M\right)$ genügt es, $\mathcal{R}e\,\psi$ oder $\mathcal{I}m\,\psi \in [\![\Lambda^{3,0}]\!]$ anzugeben, da der eine aus dem anderen Teil wie in Proposition 4.14 beschrieben rekonstruiert werden kann.

Im Folgenden wird ein Tensortripel (g, J, ψ) ebenfalls als $SU(3)$-Struktur bezeichnet. Dies wird durch die folgende Aussage gerechtfertigt, die sich etwa in [11] oder [8] findet und implizit in den meisten Abhandlungen[11] über $SU(3)$-und $U(3)$-Geometrie verwendet wird :

Proposition 4.11 *Für die Stabilisatoren von g, J, ψ gilt*

$$\begin{aligned} Stab_{GL(6,\mathbb{R})}(g) &\cong O(6,\mathbb{R}) \\ Stab_{GL(6,\mathbb{R})}(J) &\cong GL(3,\mathbb{C}) \subset GL(6,\mathbb{R}) \\ Stab_{GL(3,\mathbb{C})}(\psi) &\cong SL(3,\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Der Durchschnitt dieser Gruppen ist $SU(3)$. Damit existiert eine 1:1-Beziehung zwischen $SU(3)$-Strukturen auf M^6 und Tripeln (g, J, ψ) der oben genannten Tensoren auf der Mannigfaltigkeit.

Beweis Der Stabilisator von g ergibt sich direkt nach Definition. Ein Element $G \in GL(6,\mathbb{R})$ stabilisiert J genau dann, wenn $GJG^{-1} = J$, also wenn es mit J kommutiert und damit unter $\mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6$ einem $\mathbb{C}$-linearen Automorphismus entspricht. Der Stabilisator von

[11] Andere Autoren argumentieren umgekehrt und definieren die Gruppen als Stabilisatoren geeigneter Tensoren, so etwa [43] bei $U(n)$

ψ resultiert unmittelbar daraus, dass $GL(3,\mathbb{C})$ auf $\Gamma\left(\Lambda^{3,0}T^*M\right)$ durch die Determinante operiert. Der Durchschnitt dieser Gruppen ist $O(6,\mathbb{R})\cap GL(3,\mathbb{C})\cap SL(3,\mathbb{C}) = U(3)\cap SL(3,\mathbb{C}) = SU(3)$. Die 1:1-Entsprechung folgt dann aus Korollar 3.9 zu Theorem 3.7.

□

Bemerkung 4.12 Der Stabilisator von ω in $GL(6,\mathbb{R})$ ist $SP(3,\mathbb{R})$, der Schnitt mit den Stabilisatoren von g und ψ ist erneut $SU(3)$. Zur Fixierung der $SU(3)$-Struktur sind daher zwei der 3 Tensoren g, J, ω hinreichend. Der Beweis des Theorems zeigt, dass diese beiden bereits eine $U(3)$-Struktur festlegen und die Wahl von ψ eine weitere Reduktion auf $SU(3)$ bedeutet.

Definition 4.13 *Eine speziell fast-hermitesche Mannigfaltigkeit M^{2m} ist eine Mannigfaltigkeit, die eine $SU(m)$-Struktur, charakterisiert durch die Tensoren (g, J, ψ) oder (g, ω, ψ), trägt.*

Die $SU(3)$-Formen genügen gewissen Relationen, die unabhängig von weiteren Einschränkungen, etwa an die Torsion, gelten. Sie werden im verbleibenden Teil dieses Abschnitts diskutiert, wobei die oben erwähnte Identifizierung $TM \cong T^*M$ verwendet wird. Die folgenden beiden Propositionen sind elementare Konsequenzen aus dem Bigrad der betrachteten Formen und der Wahl von ω und ψ bzgl. Normierung und Orientierung. Sie finden sich etwa in [9] und [6] und werden dort durch Darstellung der Tensoren in adaptierten Basen, wie etwa in Korollar 4.8, verifiziert.

Proposition 4.14 *Die komplexe Volumenform erfüllt folgende Verträglichkeitsrelationen mit der fast-komplexen Struktur*

(a) $J\cdot\psi = -i\psi$ *und* $J_{(k)}\psi = i\psi$ *für* $k = 1,2,3$

(b) $J\cdot \mathcal{R}e\,\psi = \mathcal{I}m\,\psi \quad J\cdot\mathcal{I}m\,\psi = -\mathcal{R}e\,\psi$ *und* $J_{(k)}\mathcal{R}e\,\psi = -\mathcal{I}m\,\psi \quad J_{(k)}\mathcal{I}m\,\psi = \mathcal{R}e\,\psi$

(c) $X\wedge\mathcal{R}e\,\psi = -JX\wedge\mathcal{I}m\,\psi \qquad X\wedge\mathcal{I}m\,\psi = JX\wedge\mathcal{R}e\,\psi$

(d) $X\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi = -JX\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi \qquad X\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi = JX\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi$

Beweis (a) Da ψ eine (3,0)-Form ist, operiert $J\cdot$ als $i^3 = -i$. Die zweite Gleichung folgt daraus, dass ψ den Anteil $\Gamma\left(TM^{1,0}\right)\subset\Gamma\left(TM\otimes\mathbb{C}\right)$ annulliert und J auf $\Gamma\left(TM^{0,1}\right)$ durch $-i$ wirkt. (b) ergibt sich aus (a) durch Bilden von Real- bzw. Imaginärteil. Da weiter $(X - iJX) \cong g(X,\cdot) - iJg(X,\cdot)$ in $\Gamma\left(\Lambda^{1,0}T^*M\right)$ liegt und keine (4,0)-Formen existieren folgt $0 = (X - iJX)\wedge\psi$. Real- und Imaginärteil dieser Identität liefern (c). (d) folgt ganz analog, da Einsetzen von $X - iJX \in \Gamma\left(TM^{1,0}\right)$ in ψ ebenfalls 0 ergibt.

□

Proposition 4.15 *Für die Kählerform, die komplexe und reelle Volumenform sowie die fast-komplexe Struktur gelten die Relationen*

(a) $\omega^3 := \omega \wedge \omega \wedge \omega = 3! \cdot vol$

(b) $\psi \wedge \overline{\psi} = i\, vol \qquad 2\,\mathcal{R}e\,\psi \wedge \mathcal{I}m\,\psi = -vol \qquad \mathcal{R}e\,\psi \wedge \mathcal{R}e\,\psi = \mathcal{I}m\,\psi \wedge \mathcal{I}m\,\psi = 0$

(c) $\mathcal{R}e\,\psi \wedge \omega = \mathcal{I}m\,\psi \wedge \omega = \psi \wedge \omega = 0 \qquad \omega \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi = \omega \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi = \omega \lrcorner \psi = 0$

(d) Für $X \in \Gamma(TM)$ *gilt :*

$$(X \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi) \wedge \omega = (JX \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) \wedge \omega = X \wedge \mathcal{R}e\,\psi$$
$$(X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) \wedge \omega = -(JX \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi) \wedge \omega = -X \wedge \mathcal{I}m\,\psi$$

(e) Für $X \in \Gamma(TM)$ *gilt :*

$$\omega \lrcorner (X \wedge \mathcal{R}e\,\psi) = -\omega \lrcorner (JX \wedge \mathcal{I}m\,\psi) = JX \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi$$
$$\omega \lrcorner (X \wedge \mathcal{I}m\,\psi) = \omega \lrcorner (JX \wedge \mathcal{R}e\,\psi) = JX \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi$$

Beweis

(a) Da $\omega^3 \in \left[\Lambda^{3,3}\right] = \Gamma\left(\Lambda^6 T^*M\right) = \mathbb{R} \cdot vol$ folgt $\omega^3 = \mu\, vol$. Der Koeffizient ergibt sich aus

$$\mu = \left\langle \omega^3, vol \right\rangle = \frac{1}{6!} \sum_{i_1 \cdots i_6 = 1}^{6} \omega^3(E_{i_1}, \ldots, E_{i_6}) sign(i_1 \ldots i_6) = \omega^3(E_1, \ldots, E_6) = 3!$$

(b) Für die Basen aus (4.8) und (4.9) gilt $dF_\alpha \wedge d\overline{F}_\alpha = i\, dE_{(2\alpha-1)(2\alpha)}$ und folglich:

$$\psi \wedge \overline{\psi} = dF_{123} \wedge d\overline{F}_{123} = -(dF_1 \wedge d\overline{F}_1) \wedge (dF_2 \wedge d\overline{F}_2) \wedge (dF_3 \wedge d\overline{F}_3) = -i^3 vol$$

Weiter gilt $\psi \wedge \overline{\psi} = \mathcal{R}e\,\psi \wedge \mathcal{R}e\,\psi + \mathcal{I}m\,\psi \wedge \mathcal{I}m\,\psi - 2i\mathcal{R}e\,\psi \wedge \mathcal{I}m\,\psi$. Da die ersten beiden Terme für 3-Formen verschwinden, folgen die weiteren Gleichungen. Alternativ kann hier auch über Formengrad, Normierung und Orientierung argumentiert werden.

(c) Da $\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi$ in $[\![\Lambda^{3,0}]\!]$ und ω in $\left[\Lambda^{1,1}\right]$ liegen aber auf einer 6-dimensionalen Mannigfaltigkeit keine nicht-trivialen (4,1)-Formen existieren, folgt die erste Identität. Da $\omega\lrcorner$ nach Proposition 4.49 den Bigrad (-1,-1) hat, folgt analog auch die zweite Behauptung.

(d) Im Rahmen der Identifizierung gilt $X \lrcorner \omega = g(JX, \cdot) \cong JX$. Mit (c) und Lemma 4.1 folgt

$$0 = X \lrcorner (\mathcal{R}e\,\psi \wedge \omega) = X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi \wedge \omega - \mathcal{R}e\,\psi \wedge (X \lrcorner \omega) = X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi \wedge \omega + JX \wedge \mathcal{R}e\,\psi$$

Mit Proposition 4.14 folgt die zweite Gleichung, die erste folgt durch Substitution von X durch JX und Anwendung der genannten Proposition.

(e) Da $\lrcorner$ adjungiert zu $\wedge$ ist, ergibt sich für $\tau \in \Gamma\left(\Lambda^2 T^*M\right)$ und Teil (c):

$$\begin{aligned}\langle \omega \lrcorner (X \wedge \mathcal{R}e\,\psi), \tau\rangle &= \langle \mathcal{R}e\,\psi, X \lrcorner (\omega \wedge \tau)\rangle = \langle \mathcal{R}e\,\psi, JX \wedge \tau\rangle + \langle \mathcal{R}e\,\psi, \omega \wedge (X \lrcorner \tau)\rangle \\ &= \langle JX \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi, \tau\rangle + \langle \omega \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi, X \lrcorner \tau\rangle = \langle JX \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi, \tau\rangle\end{aligned}$$

Analog ergibt sich $\omega \lrcorner (X \wedge \mathcal{I}m\,\psi) = JX \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi$. Die beiden verbleibenden Identitäten folgen zusammen mit Proposition 4.14.

□

Bemerkung 4.16 Analog zu Proposition 4.15 (d) gelten Identitäten für $(X \lrcorner \psi) \wedge \omega$ sowie $(X \lrcorner \overline{\psi}) \wedge \omega$, die sich aus $\psi \wedge \omega = \overline{\psi} \wedge \omega = 0$ ergeben. Mit dem gleichen Verfahren resultieren auch Identitäten für Kontraktionen mit Multivektoren höherer Ordnung. Es gilt etwa:

$$((X \wedge Y) \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) \wedge \omega = -\omega(X,Y)\mathcal{R}e\,\psi + JX \wedge (Y \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) - JY \wedge (X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi)$$

Entsprechendes gilt wiederum für ψ bzw $\overline{\psi}$, wobei sich die Identitäten ggf. weiter vereinfachen, wenn X bzw. Y nur Anteile in $TM^{1,0}$ oder $TM^{0,1}$ haben.

Als Konsequenz einiger dieser Formeln ergeben sich die nützliche Aussagen:

Proposition 4.17 *Sei $X \in \Gamma(TM)$ ein reelles Vektorfeld, dann gilt mit $TM \cong T^*M$:*

(a) $\mathcal{R}e\,\psi \wedge (X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) = \mathcal{I}m\,\psi \wedge (X \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi) = \frac{1}{8} X \wedge \omega \wedge \omega$

(b) $\mathcal{R}e\,\psi \wedge (X \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi) = -\mathcal{I}m\,\psi \wedge (X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) = -\frac{1}{8} JX \wedge \omega \wedge \omega$

Beweis Explizites Ausschreiben ergibt

$$\begin{aligned} 4i\mathcal{R}e\,\psi \wedge (X \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi) &= \psi \wedge (X \lrcorner \psi) - \psi \wedge (X \lrcorner \overline{\psi}) + \overline{\psi} \wedge (X \lrcorner \psi) - \overline{\psi} \wedge (X \lrcorner \overline{\psi}) \\ &= -\psi \wedge (X \lrcorner \overline{\psi}) + \overline{\psi} \wedge (X \lrcorner \psi)\end{aligned}$$

denn der erste bzw. vierte Summand wäre vom Typ (5,0) bzw. (0,5) und verschwindet damit. Ein analoger Ausdruck ergibt sich für $4i\mathcal{I}m\,\psi \wedge (X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi)$, nur mit umgekehrten Vorzeichen. Also folgt:

$$\mathcal{R}e\,\psi \wedge (X \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi) = -\mathcal{I}m\,\psi \wedge (X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) \tag{4.10}$$

Durch Operation mit $J\cdot$ auf diese Gleichung ergibt sich daraus mit Proposition 4.14

$$\mathcal{R}e\,\psi \wedge (X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) = \mathcal{I}m\,\psi \wedge (X \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi) \tag{4.11}$$

denn es gilt $J \cdot (X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) = \mathcal{R}e\,\psi(X, J\cdot, J\cdot) = X \lrcorner (J_{(2)} J_{(3)} \mathcal{R}e\,\psi) = -X \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi$ etc.

Nach Proposition 4.15 gilt $\psi \wedge \overline{\psi} = ivol = i/6\,\omega^3$. Kontraktion mit $X - iJX \in \Gamma\left(TM^{1,0}\right)$ (oder $X + iJX$) dieser Identität auf zwei verschiedene Weisen liefert dann :

$$\begin{aligned}
&(X - iJX)\lrcorner\,\psi \wedge \overline{\psi} \\
&= (-1)^3 \psi \wedge \left((X - iJX)\lrcorner\,\overline{\psi}\right) \\
&= -(\mathcal{R}e\,\psi + i\mathcal{I}m\,\psi) \wedge (X\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi - iJX\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi - iX\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi - JX\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi) \\
&= -2\mathcal{R}e\,\psi \wedge (X\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi) - 2\mathcal{I}m\,\psi \wedge (X\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi) \\
&\quad + 2i\mathcal{R}e\,\psi \wedge (X\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi) - 2i\mathcal{I}m\,\psi \wedge (X\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&(X - iJX)\lrcorner\,\psi \wedge \overline{\psi} \\
&= \tfrac{i}{6}(X - iJX)\lrcorner\,\omega^3 \\
&= \tfrac{3i}{6}\left[(X - iJX)\lrcorner\,\omega\right] \wedge \omega \wedge \omega \\
&= \tfrac{1}{2}(JX\lrcorner\,\omega) \wedge \omega \wedge \omega + \tfrac{i}{2}(X\lrcorner\,\omega) \wedge \omega \wedge \omega
\end{aligned}$$

Da $JX \cong X\lrcorner\,\omega$ und $-X \cong JX\lrcorner\,\omega$ folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil:

$$X \wedge \omega \wedge \omega = 4\mathcal{R}e\,\psi \wedge (X\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi) + 4\mathcal{I}m\,\psi \wedge (X\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi) \tag{4.12}$$

$$JX \wedge \omega \wedge \omega = 4\mathcal{R}e\,\psi \wedge (X\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi) - 4\mathcal{I}m\,\psi \wedge (X\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi) \tag{4.13}$$

Substitution von (4.10) und (4.11) in (4.12) und (4.13) liefert die Formeln aus der Proposition.

□

Als Korollar zu diesen Identitäten resultieren Summenformeln, die in der Darstellung der äußeren Ableitungen von $\mathcal{R}e\,\psi$ und $\mathcal{I}m\,\psi$ durch die intrinsische Torsion benötigt werden:

Lemma 4.18

(a) $$\sum_i \mathcal{R}e\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) = \sum_i \mathcal{I}m\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) \wedge \mathcal{I}m\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) = \tfrac{1}{4}\omega^2$$

(b) $$\sum_i \mathcal{R}e\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) \wedge \mathcal{I}m\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) = 0$$

Beweis

(a) Nach Proposition 4.17 (a) gilt $\mathcal{R}e\,\psi \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) = \frac{1}{8}E_i \wedge \omega \wedge \omega$. Da $E_i\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) = 0$ ergibt Kontraktion mit E_i:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}e\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) &= \tfrac{1}{8}E_i\lrcorner\,(E_i \wedge \omega \wedge \omega) = \tfrac{1}{8}(E_i\lrcorner\,E_i) \wedge \omega^2 - \tfrac{1}{8}E_i \wedge (E_i\lrcorner\,(\omega \wedge \omega)) \\
&= \tfrac{1}{8}\omega^2 - \tfrac{1}{8}E_i \wedge 2JE_i \wedge \omega
\end{aligned}$$

Summation über i liefert mit Korollar 4.8 (c) den Wert $\frac{6}{8}\omega^2 - \frac{4}{8}\omega^2 = \frac{1}{4}\omega^2$. Die zweite Gleichung folgt ganz analog aus dem zweiten Teil von Proposition 4.17 (a)

(b) Wird Proposition 4.17 (b) in die Rechnung aus (a) eingesetzt, so ergibt sich auf der rechten Seite

$$-\tfrac{1}{8}(E_i \lrcorner JE_i) \wedge \omega^2 + \tfrac{1}{8}JE_i \wedge (E_i \lrcorner (\omega \wedge \omega)) = 0 + \tfrac{1}{4}JE_i \wedge JE_i \wedge \omega = 0$$

□

Der Hodge-Stern-Operator bildet $\Gamma\left(\Lambda^k T^*M\right)$ für $k = 1, 2, 3$ auf $\Gamma\left(\Lambda^{6-k}T^*M\right)$ ab und kann mit geeigneten Kombinationen den Abbildungen $J\cdot$, $\omega\wedge$, $\omega^2\wedge$ sowie $\omega\lrcorner$, die aus den $U(n)$-invarianten Tensoren resultieren, in Beziehung gesetzt werden. Die folgende Proposition beschreibt diese Relationen, die sich auf den $U(n)$-irreduziblen Komponenten von $\Lambda^k T^*M$ weiter vereinfachen, explizit. Umgekehrt können sie wie in [2] genutzt werden, um diese Zerlegung zu definieren bzw. charakterisieren. In Abschnitt 4.4 werden sie genutzt, um die $SU(3)$-Zerlegung von $\Lambda^{\geq 4}T^*M$ auf diejenige von $\Lambda^{\leq 2}T * M$ zurückzuführen. Desweiteren ergibt sich direkt die Wirkung des $*$-Operators auf den definierenden Formen der $SU(3)$-Struktur:

Proposition 4.19

(a) $*$ und J vertauschen auf $\Gamma(\Lambda T^*M)$

(b) Für $\beta \in \Gamma\left(\Lambda^3 T^*M\right)$ gilt:

$$*\beta = (\omega \lrcorner (J \cdot \beta)) \wedge \omega - J \cdot \beta$$

Eingeschränkt auf die $U(n)$-irreduziblen Anteile bedeutet dies:

$$\begin{aligned} *\beta &= +J \cdot \beta && \text{für } \beta \in \Gamma(T^*M) \wedge \omega \\ *\beta &= -J \cdot \beta && \text{für } \beta \in [\![\Lambda^{3,0}]\!] \oplus [\![\Lambda^{2,1}_0]\!] \end{aligned}$$

(c) Für $\beta \in \Gamma\left(\Lambda^2 T^*M\right)$ gilt:

$$*\beta = (\omega \lrcorner \beta) \wedge \omega \wedge \omega - (J \cdot \beta) \wedge \omega$$

Eingeschränkt auf die $U(n)$-irreduziblen Anteile bedeutet dies:

$$\begin{aligned} *\beta &= +\beta \wedge \omega && \text{für } \beta \in [\![\Lambda^{2,0}]\!] \\ *\beta &= -\beta \wedge \omega && \text{für } \beta \in [\Lambda^{1,1}_0] \\ *\beta &= 2\beta \wedge \omega && \text{für } \beta \in \mathbb{R}\omega \end{aligned}$$

(d) Für $\beta \in \Gamma\left(\Lambda^1 T^*M\right)$ gilt:

$$*\beta = J \cdot (\omega \wedge \omega \wedge \beta)$$

(e) $*\mathcal{R}e\,\psi \;=\; -\mathcal{I}m\,\psi \qquad *\,\mathcal{I}m\,\psi \;=\; \mathcal{R}e\,\psi \qquad *\,\psi = i\psi \qquad *\,\omega = \tfrac{1}{2}\omega \wedge \omega$

Beweis

(a) Für $\beta \in \Gamma(\Lambda^p T^*M)$, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^{n-p}T^*M)$ gilt wegen $J \cdot vol = vol$:

$$\alpha \wedge *J \cdot \beta = \langle \alpha, J \cdot \beta \rangle \, vol = -\langle J \cdot \alpha, \beta \rangle \, J \cdot vol = -J \cdot (J \cdot \alpha \wedge *\beta) = \alpha \wedge J \cdot *\beta$$

Da die Paarung durch $\wedge$ nicht-entartet ist, folgt die Behauptung. Die Invarianz des Skalarproduktes auf Formen unter $J\cdot$ folgt dabei direkt aus (8).

(b) Es genügt, $\beta = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$ zu betrachten. Da $\widehat{S}_{2,1} = \{(123), (132), (231)\}$ folgt mit Proposition 4.2

$$\begin{aligned} \omega \lrcorner J \cdot \beta &= \omega(JX_1, JX_2)JX_3 - \omega(JX_1, JX_3)JX_2 + \omega(JX_2, JX_3)JX_1 \\ &= \omega(X_1, X_2)JX_3 + \omega(X_2, X_3)JX_1 + \omega(X_3, X_1)JX_2 \end{aligned}$$

Für $*\beta$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} *\beta &= \beta \lrcorner vol = \tfrac{1}{6} X_3 \lrcorner X_2 \lrcorner X_1 \lrcorner \omega^3 \\ &= X_3 \lrcorner \left(\tfrac{1}{2}\omega(X_1, X_2)\omega \wedge \omega - \omega(X_1, \cdot) \wedge \omega(X_2, \cdot) \wedge \omega \right) \\ &\cong [\omega(X_1, X_2)JX_3 + \omega(X_3, X_1)JX_2 + \omega(X_2, X_3)JX_1] \wedge \omega - J \cdot (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \\ &= (\omega \lrcorner (J \cdot \beta)) \wedge \omega - J \cdot \beta \end{aligned}$$

Dies zeigt die allgemeine Gleichung.

Für $X \wedge \omega \cong \beta \in \Gamma(T^*M) \wedge \omega$ gilt einerseits $J \cdot (X \wedge \omega) = JX \wedge \omega$, dies ergibt sich aus $(J \cdot \omega)(X, Y) = g(J^2 X, Y) = -g(JY, X) = \omega(X, Y)$. Mit Proposition 4.49 (d) folgt:

$$\omega \lrcorner (J \cdot \beta) = \omega \lrcorner (JX \wedge \omega) = [\omega \lrcorner, \omega \wedge](JX) + \omega \wedge \omega \lrcorner JX = -(1-3)JX = 2JX$$

Es folgt $*\beta = 2JX \wedge \omega - J \cdot \beta = J \cdot \beta$. Da $[\![\Lambda^{3,0}]\!] \oplus [\![\Lambda_0^{2,1}]\!] = \ker(\omega \lrcorner) \subset \Gamma\left(\Lambda^3 T^*M\right)$ und beide Räume $U(3)$-invariant, also invariant unter $J\cdot$ sind, folgt $*\beta = -J \cdot \beta$ für $\beta \in [\![\Lambda^{3,0}]\!] \oplus [\![\Lambda_0^{2,1}]\!]$.

(c) Für $X \wedge Y \cong \beta \in \Gamma\left(\Lambda^2 T^*M\right)$ gilt:

$$\begin{aligned} *\beta &= \tfrac{1}{6} Y \lrcorner X \lrcorner \omega^3 = \tfrac{1}{2} Y \lrcorner \omega(X, \cdot) \wedge \omega^2 \cong \tfrac{1}{2}\omega(X, Y) \wedge \omega^2 - JX \wedge JY \wedge \omega \\ &\cong \tfrac{1}{2}(\omega \lrcorner \beta) \wedge \omega \wedge \omega - (J \cdot \beta) \wedge \omega \end{aligned}$$

Die Operation von $*$ auf den Komponenten $[\![\Lambda^{2,0}]\!] \oplus [\Lambda_0^{1,1}] = \ker(\omega \lrcorner)$ ergibt sich direkt aus $J\cdot = i^2 = -1$ bzw. $J\cdot = i(-i) = +1$ auf diesen beiden Summanden. Die verbleibende Aussage folgt aus $\frac{1}{2}(\omega \lrcorner \omega)\omega^2 - (J \cdot \omega) \wedge \omega = (\frac{3}{2} - 1)\omega^2$.

(d) Für $X \cong \beta \in \Gamma(T^*M)$ ergibt sich aus der J-Invarianz von ω:

$$*X = \tfrac{1}{6} X \lrcorner \omega^3 = \tfrac{1}{2} JX \wedge \omega^2 = \tfrac{1}{2} JX \wedge J \cdot \omega^2 = \tfrac{1}{2}(\omega^2 \wedge X)$$

(e) Die ersten beiden Behauptungen folgen sofort aus (b) und $J\cdot = J_{(1)}J_{(2)}J_{(3)}$ auf 3-Formen, die dritte aus (c).

□

Eine Aussage, die Proposition 4.17 entspricht, allerdings formuliert mit dem Hodge-Stern-Operator, findet sich in [6]:

Proposition 4.20 *Für eine beliebige 1-Form $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ gilt:*

(a) $*(*(\alpha \wedge \mathcal{R}e\,\psi) \wedge \mathcal{R}e\,\psi) = *(*(\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi) \wedge \mathcal{I}m\,\psi) = -\frac{1}{4}\alpha$

(b) $*(*(\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi) \wedge \mathcal{R}e\,\psi) = -*(*(\alpha \wedge \mathcal{R}e\,\psi) \wedge \mathcal{I}m\,\psi) = -\frac{1}{4}J\alpha$

Beweis Diese Aussage lässt sich im wesentlichen auf Proposition 4.17 zurückführen. Mit Hilfe der Identitäten

$$\begin{aligned} *(\alpha \wedge \mathcal{R}e\,\psi) &= (-1)^3 \alpha \lrcorner * \mathcal{R}e\,\psi = \alpha \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi \\ *\alpha &= \alpha \lrcorner\, vol = \tfrac{1}{6}\alpha \lrcorner \omega^3 = \tfrac{1}{2}(\alpha \lrcorner \omega) \wedge \omega^2 = \tfrac{1}{2}J\alpha \wedge \omega^2, \end{aligned}$$

die mit (4.5) aus Proposition 4.19 folgen, ergibt sich direkt mit Proposition 4.17

$$*(*(\alpha \wedge \mathcal{R}e\,\psi) \wedge \mathcal{R}e\,\psi) = *((\alpha \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi) \wedge \mathcal{R}e\,\psi) = *\left(\tfrac{1}{8}J\alpha \wedge \omega^2\right) = \tfrac{1}{4} *^2 \alpha = -\tfrac{1}{4}\alpha$$

Die anderen Aussagen ergeben sich durch geringfügige Variationen dieser Rechnung.

□

Korollar 4.21 *Für $X \in \Gamma(TM)$ gilt:*

(a) $\mathcal{R}e\,\psi \lrcorner (X \wedge \mathcal{R}e\,\psi) = \mathcal{I}m\,\psi \lrcorner (X \wedge \mathcal{I}m\,\psi) = -\frac{1}{4}X$

(b) $\mathcal{R}e\,\psi \lrcorner (X \wedge \mathcal{I}m\,\psi) = -\mathcal{I}m\,\psi \lrcorner (X \wedge \mathcal{R}e\,\psi) = -\frac{1}{4}JX$

Beweis Alle Identitäten ergeben sich aus Lemma 4.4 und der vorangehenden Proposition, z.B. ergibt sich:

$$-\tfrac{1}{4}X = *(*(X \wedge \mathcal{R}e\,\psi) \wedge \mathcal{R}e\,\psi) = \mathcal{R}e\,\psi \lrcorner * (X \wedge \mathcal{R}e\,\psi) \lrcorner\, vol = \mathcal{R}e\,\psi \lrcorner *^2 (X \wedge \mathcal{R}e\,\psi)$$

□

Als Konsequenz der vorangehenden Proposition (oder auch der Proposition 4.17) resultieren einige der folgenden Skalarprodukte, die im Verlauf der Krümmungsdiskussion benötigt werden.

Proposition 4.22 *Sei $F \in End(TM)$, dann gilt mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf Formen:*

$$\begin{aligned} \langle Der(F)\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle &= -\langle Der(F)\mathcal{I}m\,\psi, \mathcal{R}e\,\psi\rangle = \tfrac{1}{4}\operatorname{tr}(FJ) \\ \langle Der(F)\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{R}e\,\psi\rangle &= +\langle Der(F)\mathcal{I}m\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle = \tfrac{1}{4}\operatorname{tr}(F) \\ \langle Der(F)\omega, \omega\rangle &= -\operatorname{tr}(F) \end{aligned}$$

Beweis Sei F zunächst schiefsymmetrisch und folglich verträglich mit der Identifizierung $TM \cong T^*M$. Umschreiben des Skalarproduktes mit Hilfe von $*$ sowie Ausnutzung der Rechenregeln (4.6) und (4.5) für $*$ und $Der(F)$ ergibt:

$$\begin{aligned} \langle Der(F)\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle &= -*(Der(F)\mathcal{R}e\,\psi \wedge *\mathcal{I}m\,\psi) = *\sum_i dE_i \wedge (FE_i \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) \wedge \mathcal{R}e\,\psi \\ &= *\sum_i dE_i \wedge *(F(E_i) \wedge \mathcal{I}m\,\psi) \wedge \mathcal{R}e\,\psi \end{aligned}$$

Anwendung von $*$ auf Teil (b) der vorangehenden Proposition liefert die Identität $*(\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi) \wedge \mathcal{R}e\,\psi = \frac{1}{4} * J\alpha$ und folglich

$$\begin{aligned} \langle Der(F)\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle &= \tfrac{1}{4}\sum_i *(dE_i \wedge *J(FE_i)) = \tfrac{1}{4}\sum_i g(E_i, J(FE_i)) \\ &= \tfrac{1}{4}\sum_i g(JE_i, JFJE_i) = \tfrac{1}{4}\sum_i g(E_i, F(JE_i)) \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Summation bzgl. der Basis $\{JE_i\}$ ausgeführt. Ist F symmetrisch, so treten in der Rechnung 2 Vorzeichen auf, die sich herausheben. Da sich jeder Endomorphismus in einen symmetrischen und einen schiefen Anteil zerlegen lässt, folgt die Behauptung für allgemeines F. Die anderen Relationen, die $\mathcal{R}e\,\psi$ bzw. $\mathcal{I}m\,\psi$ beinhalten, ergeben sich analog.
Alternativ können die Formeln auch durch Auswertung des Ausdrucks $Der(F)vol$ bewiesen werden. Da $Der(F)$ auf vol durch $-\operatorname{tr}(F)$ operiert, ergibt sich auf diese Art und Weise mit $*\omega = \frac{1}{2}\omega^2$ die letzte Identität:

$$\langle Der(F)\omega, \omega\rangle\, vol = (Der(F)\omega) \wedge *\omega = \tfrac{1}{6} Der(F)\omega^3 = Der(F)vol = \operatorname{tr}(F)vol$$

□

4.3 Grundlagen der Darstellungstheorie von SU(3)

In diesem Abschnitt wird die Darstellungstheorie der kompakten Lie-Gruppe $SU(3)$, präziser die Beschreibung aller reellen, endlichdimensionalen, irreduziblen Darstellungen diskutiert, mit dem Ziel diese explizit anzugeben. Diese Theorie ist bekannt und im Vergleich zu anderen Gruppen verhältnismäßig einfach. Hier erfolgt, in Anlehnung an [5], [21] und [29], eine ausführliche Zusammenstellung aller Komponenten, die für eine komplette Darstellungszerlegung mit expliziter Realisierung der irreduziblen Summanden benötigt werden. Mit dieser Information kann dann jede beliebige andere Darstellung beschrieben bzw. zerlegt werden, da die Kompaktheit von $SU(3)$ die vollständige Reduzibilität aller endlichdimensionalen Darstellungen impliziert, siehe [5]. Zunächst wird das Problem auf die Beschreibung der irreduziblen komplexen $SU(3)$-Moduln zurückgeführt, die in 1:1-Beziehung zu den entsprechenden $\mathfrak{su}_3$-Moduln stehen. Letztere entsprechen wiederum genau den komplexen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{su}_3 \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ und es genügt daher, diese zu beschreiben. Um eine beliebige reelle Darstellung zu zerlegen, wird diese entsprechend dem skizzierten Verfahren zuerst komplexifiziert, die resultierende komplexe Darstellung in irreduzible Komponenten zerlegt und aus diesen schließlich die Zerlegung in reelle, irreduzible Summanden bestimmt.

Die Beschreibung der Beziehung zwischen reellen und komplexen $SU(3)$-Darstellungen folgt der Darstellung in [5], Kapitel II.6, die für beliebige kompakte Lie-Gruppen G gültig ist. Ausgangspunkt sind komplexe Darstellungen, die mit folgender Zusatzstruktur versehen sein können:

Definition 4.23 *Sei V eine komplexe $SU(3)$-Darstellung, dann heißt V*

(a) von reellem Typ, falls ein $J \in End_{\mathbb{R}}(V)$, das J $SU(3)$-invariant und $\mathbb{C}$-antilinear ist, existiert, s.d. $J^2 = \mathbb{1}_V$. J heißt reelle Struktur.

(b) von quaternionischem Typ, falls ein $J \in End_{\mathbb{R}}(V)$, das J $SU(3)$-invariant und $\mathbb{C}$-antilinear ist, existiert, s.d. $J^2 = -\mathbb{1}_V$. J heißt quaternionische Struktur.

Im reellen Fall entspricht J der Konjugation, im quaternionischen der Multiplikation mit $j \in \mathbb{H}$. Die Existenz von derartigen Strukturen ist (in naheliegender Weise) äquivalent zur Existenz einer $SU(3)$-invarianten, nicht-entarteten Bilinearformen (siehe [5], II.6.4), die im ersten Fall symmetrisch, im zweiten symplektisch ist. Tatsächlich existiert eine 1:1-Beziehung[12] zwischen komplexen Darstellungen reellen Typs und reellen Darstellungen, die nach [5] durch folgende Konstruktionen explizit gemacht werden kann:

$$\begin{array}{rcc} \text{reeller Modul } U & \longrightarrow & \text{komplexer Modul } U \otimes \mathbb{C} \\ \text{komplexer Modul } V \text{ reellen Typs} & \longrightarrow & \text{reeller Modul } V_+ = Eig(J, +1) \end{array}$$

Dies rechtfertigt das Vorgehen, im Folgenden nur komplexe Moduln mit geeigneter Zusatzstruktur zu betrachten. Für eine allgemeine Diskussion des Wechselspiels zwischen den verschiedenen Darstellungstypen werden weitere Abbildungen benötigt:

Definition 4.24 *Auf der Menge $Dst(\mathbb{K})$ der $SU(3)$-Darstellungen über $\mathbb{K}$ bzw. der Teilmenge $Irr(\mathbb{K})$ der irreduziblen Darstellungen seien folgende Abbildungen definiert:*

$$\begin{array}{lcccccccc} res & : & Dst(\mathbb{C}) & \longrightarrow & Dst(\mathbb{R}) & : & V & \mapsto & res(V) \\ ext & : & Dst(\mathbb{R}) & \longrightarrow & Dst(\mathbb{C}) & : & U & \mapsto & U \otimes \mathbb{C} \\ c & : & Dst(\mathbb{C}) & \longrightarrow & Dst(\mathbb{C}) & : & V & \mapsto & \overline{V} \end{array}$$

[12] Präziser wird auf diese Weise sogar eine natürliche Äquivalenz zwischen den Kategorien der beiden genannten Darstellungen vermittelt, siehe [5]

Dabei bezeichnet $res(V)$ die unterliegende reelle Darstellung, also eine Art Vergissfunktor und nicht eine Art Realteil. Mit Hilfe dieser Abbildungen können die genannten Räume in nicht a priori disjunkte Komponenten weiter zerlegt werden. Dies ist insbesondere für die Beschreibung des reell-komplex-Übergangs von irreduziblen Moduln nützlich und wird daher für Irr eingeführt:

Definition 4.25 *Bezeichne U eine reelle, V eine komplexe irreduzible $SU(3)$-Darstellung. Dann werden die Räume $Irr(\cdot)_{\mathbb{K}}$ durch folgende Tabelle definiert:*

k	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$
$U \in Irr(\mathbb{R})_k$	$ext(U) = V$ *ist von reellem Typ*	$U = res(V)$ *für* $V \ncong \overline{V}$	$U = res(V)$ *für* V *von quat. Typ*
$V \in Irr(\mathbb{C})_k$	V *von reellem Typ*	$V \ncong \overline{V}$	V *von quat. Typ*

Eine komplexe Darstellung mit $V \cong \overline{V}$ heißt auch selbstkonjugiert. Nach dieser Definition ist das genau dann der Fall, wenn V weder von reellem noch von quaternionischem Typ ist.

Die Komposition der Abbildungen aus Definition 4.24 ist leicht berechenbar, zusammengefasst wird in [5] gezeigt:

Proposition 4.26 *Sei $U \in Dst(\mathbb{R}), V \in Dst(\mathbb{C})$ dann gilt:*

$$\begin{aligned} res \circ ext(U) &\cong U \oplus U & \qquad exp \circ res(V) &\cong V \oplus \overline{V} \\ c \circ ext(U) &\cong ext(U) & res \circ c(V) &\cong res(V) \\ c^2(U) &\cong U \end{aligned}$$

Die Wirkung der Abbildungen res, ext, c auf die irreduziblen Darstellungen hängt sowohl von dem Körper ab, über dem sie definiert sind, als auch von der verfeinerten Zerlegung aus Definition 4.25. Die detaillierten Resultate sind in folgender Proposition aufgelistet, die ebenfalls [5] entnommen ist. Als Konsequenz ergibt sich zudem, dass die Anteile $Irr(\cdot)_k$ disjunkt sind. Die Tabelle in Definition 4.25 gibt damit tatsächlich eine Zerlegung von $Irr(\cdot)_k$ an.

Proposition 4.27

(a) Für die Wirkung von res, ext, c auf Moduln über $\mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} U \in Irr(\mathbb{R})_{\mathbb{R}} :&\quad ext(U) = V & \text{mit } V \in Irr(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \\ U \in Irr(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} :&\quad ext(U) = V \oplus \overline{V} & \text{mit } V \in Irr(\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \\ U \in Irr(\mathbb{R})_{\mathbb{H}} :&\quad ext(U) = V \oplus V & \text{mit } V \in Irr(\mathbb{C})_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

(b) Für die Wirkung von res, ext, c auf Moduln über $\mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} V \in Irr(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} :&\quad res(V) = U \oplus U & \text{mit } U \in Irr(\mathbb{R})_{\mathbb{R}} \\ V \in Irr(\mathbb{C})_{\mathbb{C}} :&\quad res(V) = U & \text{mit } U \in Irr(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \\ V \in Irr(\mathbb{C})_{\mathbb{H}} :&\quad res(V) = U & \text{mit } U \in Irr(\mathbb{R})_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

(c) *Es gilt* $Irr(\mathbb{K}) = Irr(\mathbb{K})_{\mathbb{R}} \sqcup Irr(\mathbb{K})_{\mathbb{C}} \sqcup Irr(\mathbb{K})_{\mathbb{H}}$, *insbesondere ist eine komplexe, selbstkonjugierte Darstellung entweder von reellem oder von quaternionischem Typ aber nicht von beidem gleichzeitig.*

Schließlich kann noch eine Notation für den „Realteil" einer komplexen Darstellung eingeführt werden, anknüpfend an die 3 Möglichkeiten aus Proposition 4.27. Dies ist insbesondere als Umkehrung einer vorangegangenen Komplexifizierung von Bedeutung:

Proposition 4.28 *Sei* $V \in Irr(\mathbb{C})_k$ *dann gilt:*

(a) $k = \mathbb{R}$: *Es existiert eine eindeutige Darstellung* $[V] \in Irr(\mathbb{R})_{\mathbb{R}}$, *s.d.*

$$[V] \otimes \mathbb{C} = V$$

(b) $k = \mathbb{C}, \mathbb{H}$: *Es existiert eine eindeutige Darstellung* $[\![V]\!] \in Irr(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ *bzw.* $Irr(\mathbb{R})_{\mathbb{H}}$, *s.d*

$$[\![V]\!] \otimes \mathbb{C} = V \oplus \overline{V} \quad \textit{bzw.} \quad [\![V]\!] \otimes \mathbb{C} = V \oplus V$$

Beweis Dies folgt sofort aus den Propositionen 4.26 und 4.27.

□

Nach der Diskussion des Übergangs „reell ↔ komplex" kann nun die Reduktion auf komplexe Darstellungen der Lie-Algebra erfolgen. Jede Darstellung $\Phi : SU(3) \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(V)$ definiert vermöge $d\Phi|_e : T_e SU(3) \cong \mathfrak{su}_3 \longrightarrow T_{\mathbb{1}} Aut_{\mathbb{C}}(V) \cong End_{\mathbb{C}}(V)$ eine eindeutig bestimmte Darstellung von $\mathfrak{su}_3$. Da die Lie-Gruppe $SU(3)$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist (siehe [5]), impliziert das folgende Theorem die Umkehrung und damit die angesprochene Bijektion zwischen $SU(3)$- und $\mathfrak{su}_3$-Darstellungen:

Theorem 4.29 *Seien G, H Lie-Gruppen und G zusammenhängend und einfach zusammenhängend. Sei* $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus* $\Phi : G \longrightarrow H$ *von Lie-Gruppen mit* $d\Phi|_e = \varphi$.

Beweis Siehe [47], Theorem 3.27.

□

Bezeichnet $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ die Exponentialabbildung von der Lie-Algebra in die Lie-Gruppe mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_3, End_{\mathbb{C}}(V)$ bzw. $G = SU(3), Aut_{\mathbb{C}}(V)$, so gilt einerseits

$$\exp \circ \, d\Phi|_e = \Phi \circ \exp \tag{4.14}$$

für jeden Homomorphismus $\Phi : SU(3) \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(V)$ und andererseits wird $d\Phi|_e$ durch diese Forderung bereits eindeutig festgelegt. Somit ergibt sich aus Theorem 4.29 im hier betrachteten Fall von Darstellungen:

Korollar 4.30 *Die endlichdimensionalen komplexen Darstellungen* Φ *von* $SU(3)$ *stehen in Bijektion zu den endlichdimensionalen komplexen Darstellungen* φ *von* $\mathfrak{su}_3$. *Diese Bijektion ist festgelegt durch die Bedingung* (4.14).

Aus dieser expliziteren Charakterisierung können desweiteren die benötigten Folgerungen über die Beziehung von Irreduzibilität, Äquivalenz und Typ der Darstellungen auf Gruppen- und derjenigen auf Algebrenlevel gezogen werden.

Proposition 4.31 *Seien* (Φ_i, V_i) *und* (φ_i, V_i), $i = 1, 2$, *einander nach Korollar 4.30 zugeordnete Darstellungen in den* $\mathbb{C}$*-Vektorräumen* V_i, *dann gilt:*

(a) (Φ_i, V_i) *ist irreduzibel* $\Longleftrightarrow$ (φ_i, V_i) *ist irreduzibel*

(b) $(\Phi_1, V_1) \cong (\Phi_2, V_2) \quad \Longleftrightarrow \quad (\varphi_1, V_1) \cong (\varphi_2, V_2)$

(c) (Φ_i, V_i) *hat denselben Typ wie* (φ_i, V_i).

Beweis Die Beweisführung in (a) folgt [29], (b) und (c) basieren auf derselben Technik, die die Eigenschaften der Exponentialabbildung auf $SU(3)$ ausnutzt.

(a) Sei (Φ_i, V_i) irreduzibel und $W \subset V_i$ invarianter Unterraum von (φ_i, V_i). Die Exponentialabbildung ist in den hier betrachteten Fällen auf der Banachalgebra $End_{\mathbb{C}}(V_i)$ durch die Exponentialreihe gegeben. Desweiteren ist sie auf der kompakten Lie-Gruppe $SU(3)$ nach [5], Theorem IV.2.2 surjektiv. Mit $SU(3) \ni g = exp(X)$ und $w \in W$ ergibt sich aus (1) dann

$$\Phi_i(g)(w) = \exp(\varphi(X))(w) = \sum_k \frac{1}{k!} (\varphi(X))^k (w) \in W$$

Demnach ist W auch invariant bzgl Φ_i, also $W = V_i$ oder $W = (0)$, d.h (φ_i, V_i) ist irreduzibel. Die Umkehrung ergibt sich analog aus

$$\varphi(X)(w) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Phi(\exp(tX))(w) \in W$$

(b) Ist $f : V_1 \longrightarrow V_2$ Isomorphismus der $\mathfrak{su}_3$-Darstellungen φ_i, d.h. gilt für $X \in V_1$, dass $\varphi_1(X)(f(v)) = f(\varphi_2(X)(v))$, so folgt für $g = \exp(X)$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(g)(f(v)) &= \Phi_1(\exp(X))(f(v)) = \exp(\varphi_1(X))(f(v)) = \sum_k \frac{1}{k!}\varphi_1(X)^k(f(v)) \\ &= f\left(\sum_k \frac{1}{k!}\varphi_2(X)^k(v)\right) = f(\exp(\varphi_2(X))(v)) = f(\Phi_2(g)(v))\end{aligned}$$

Umgekehrt ergibt sich für einen Isomorphismus f der $SU(3)$-Darstellungen:

$$\varphi_1(X)(f(v)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Phi_1(\exp(tX))(f(v)) = f\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Phi_2(\exp(tX))(v)\right) = f(\varphi_2(X)(v))$$

(c) Nach der Rechnung aus (b) ist eine reelle bzw. quaternionische Struktur bzgl. der Gruppenwirkung auch äquivariant bzgl. der Lie-Algebrenwirkung und umgekehrt.

□

Es genügt folglich, komplexe Darstellungen von $\mathfrak{su}_3$ zu untersuchen. Nach folgendem Lemma ist es sogar ausreichend, komplexe Darstellungen der komplexifizierten Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ zu betrachten.

Lemma 4.32 *Sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie-Algebra dann gilt:*

(a) Jede komplexe Darstellung φ von $\mathfrak{g}$ hat eine eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung zu einer Darstellung von $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Umgekehrt schränkt sich jede Darstellung von $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$ ein und die beiden Konstruktionen sind invers zueinander.

(b) φ ist genau dann irreduzibel als Darstellung von $\mathfrak{g}$, wenn sie es als Darstellung von $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ ist.

Beweis

(a) trivial.

(b) Die eine Richtung ist trivial, die andere ergibt sich daraus, dass $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ und damit ein $\mathfrak{g}$-invarianter Unterraum auch $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$-invariant ist.

□

Abschließend ist also noch die Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ zu diskutieren, dies geschieht auf der Grundlage von [21], Lecture 12 und 13. Ausgangspunkt ist die Zerlegung von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ in Wurzelräume. Als Cartan-Unteralgebra (d.h. maximale, abelsche Unteralgebra mit halbeinfachen Elementen) wird dabei

$$\mathfrak{h} := \{Diag(z_1, z_2, z_3) \,|z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$$

gewählt. Ihr Dualraum $\mathfrak{h}^*$ wird dann aufgespannt von Funktionalen L_i $(i = 1, 2, 3)$ definiert durch

$$L_i \;:\; \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C} \;:\quad L_i(Diag(z_1, z_2, z_3)) := z_i$$

die die Bedingung $L_1 + L_2 + L_3 = 0$ erfüllen. Mit ihrer Hilfe schreibt sich die Wurzelraumzerlegung, d.h. die Zerlegung in $\mathfrak{h}$-Eigenräume bezüglich der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ als

$$\mathfrak{sl}_3\mathbb{C} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} (\mathfrak{sl}_3\mathbb{C})_{L_i - L_j} \tag{4.15}$$

wobei der eindimensionale Eigenraum $(\mathfrak{sl}_3\mathbb{C})_{L_i-L_j}$ zum Eigenwert $L_i - L_j$ von $E_{ij} \in \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ aufgespannt wird . Die Wurzeln $L_i - L_j$ definieren darüber hinaus das sogenannte Wurzelgitter $\Gamma_R := \mathbb{Z}(L_2 - L_1) + \mathbb{Z}(L_3 - L_1) + \mathbb{Z}(L_3 - L_2)$, ein Untergitter des Gewichtsgitters $\Gamma_W := \mathbb{Z}L_1 + \mathbb{Z}L_2 + \mathbb{Z}L_3 \subset \mathfrak{h}^*$.

Eine Zerlegung in $\mathfrak{h}$-Eigenräume analog zu (4.15) existiert auch für Darstellungen V von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$, $V \cong \bigoplus_\alpha V_\alpha$ mit $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Auf diesen Gewichtsräumen V_α operiert $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ in besonders übersichtlicher Form, es gilt $(\mathfrak{sl}_3\mathbb{C})_\alpha(V_\beta) \subset V_{\alpha+\beta}$, s.d. die Zerlegung zur Klassifizierung und Konstruktion von Darstellungen verwendet werden kann. Ausgangspunkt für die Beschreibung irreduzibler Moduln sind ihre Höchstgewichtsvektoren[13] zum höchsten Gewicht $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, d.h. Vektoren $v \in V$, s.d.

(a) $\forall H \in \mathfrak{h} : H \cdot v = \alpha(H)v \quad$ (d.h. $v \in V_\alpha$)

(b) $E_{12} \cdot v = E_{13} \cdot v = E_{23} \cdot v = 0$

Die irreduziblen Darstellungen werden dann abstrakt beschrieben durch die folgende Proposition:

Proposition 4.33

(a) Jede irreduzible Darstellung V von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ besitzt ein eindeutiges höchstes Gewicht $\alpha \in \Gamma_W$. Der Gewichtsraum V_α ist eindimensional, d.h. V besitzt einen bis auf Multiplikation mit Skalaren eindeutigen Höchstgewichtsvektor.

(b) Sei V ein irreduzible Darstellung V von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ und $v \in V_\alpha$ ihr Höchstgewichtsvektor. Dann wird V erzeugt von den Bildern von v unter iterierter Anwendung von E_{21}, E_{31} und E_{32}. In der Gewichtszerlegung von V treten nur Gewichte β mit $\beta \equiv \alpha \mod \Gamma_R$ auf.

(c) Ist W eine beliebige $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$-Darstellung und $w \in W$ ein Höchstgewichtsvektor, so ist die Unterdarstellung, erzeugt durch iterierte Anwendung von E_{21}, E_{31} und E_{32}, irreduzibel.

Beweis Siehe [21], §12.

□

Nach Proposition 4.33 (b) sind zwei irreduzible Darstellungen genau dann isomorph, wenn ihre Gewichtsraumzerlegungen gleich sind, d.h. die Gewichte treten in beiden Darstellungen mit gleicher Multiplizität auf. Da sich jede Darstellung als Summe ihrer irreduziblen Anteile schreibt, sind 2 Darstellungen also genau dann isomorph, wenn ihre Gewichtsraumzerlegungen gleich sind.

Ein einfaches, aber später benötigtes Beispiel isomorpher Darstellungen lässt sich auf diese Weise identifizieren:

Beispiel 4.34 Bezeichnet $V \cong \mathbb{C}^3$ die Standarddarstellung, $V^* \cong \overline{V}$ die duale bzw. konjugierte Darstellung, die durch Identifizierung vermöge g isomorph sind, so treten in der Zerlegung von V die Gewichte $\{L_1, L_2, L_3\}$ jeweils einfach auf. Nach Definition der Operation von $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ (siehe Kapitel 4.1) treten dann für V^* die Gewichte $\{-L_1, -L_2, -L_3\}$, ebenfalls mit einfacher Multiplizität auf. Da die Lie-Algebra auf $\Lambda^2 V$ als Derivation wirkt, treten in

[13] Die im Folgenden gegebene Definition ist bereits auf den hier betrachteten Spezialfall $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ abgestimmt, Bedingung (a) kann für beliebige Lie-Algebren allgemeiner aber weniger explizit formuliert werden.

der Zerlegung von $\Lambda^2 V$ dann genau die Summen verschiedener Gewichte von V mit einfacher Multiplizität auf, also $\{L_1 + L_2, L_1 + L_3, L_2 + L_3\} = \{-L_1, -L_2, -L_3\}$. Es folgt:

$$\Lambda^2 V \cong V^* \cong \overline{V} \qquad\qquad \Lambda^2 \overline{V} \cong \Lambda^2 V^* \cong V$$

Diese Isomorphie kann auch durch die $SU(3)$-invariante Paarung $u \otimes v \wedge w \mapsto u \wedge v \wedge w \in \Lambda^3 V \cong \mathbb{C}$, die nicht-entartet ist, gezeigt werden. Wird der Isomorphismus $\Lambda^3 V \cong \mathbb{C}$ mit Hilfe einer komplexe Volumenform ψ (siehe Abschnitt 4.2) explizit fixiert und $V^* \cong \overline{V}$ identifiziert, so nehmen die Isomorphismen der Darstellungen folgende einfache Gestalt an:

$$\begin{array}{rclcl} V & \longrightarrow \Lambda^2\overline{V} & : & v \mapsto v \lrcorner \overline{\psi} \\ \Lambda^2\overline{V} & \longrightarrow V & : & \overline{v} \wedge \overline{w} \mapsto \overline{v} \wedge \overline{w} \lrcorner \psi \end{array} \qquad \begin{array}{rclcl} \overline{V} & \longrightarrow \Lambda^2 V & : & \overline{v} \mapsto \overline{v} \lrcorner \psi \\ \Lambda^2 V & \longrightarrow \overline{V} & : & v \wedge w \mapsto v \wedge w \lrcorner \overline{\psi} \end{array}$$

Diese Abbildungen sind jeweils invers zueinander, denn es gilt etwa:

$$(v \lrcorner \overline{\psi}) \lrcorner \psi = -i(v \lrcorner \overline{\psi}) \lrcorner * \psi = -i(\psi \wedge (v \lrcorner \overline{\psi})) \lrcorner vol = -(v \lrcorner vol) \lrcorner vol = - *^2 v = v$$

Diese explizite Form des Isomorphismus ist für die $SU(3)$-Zerlegung der Formenräume von Bedeutung.

Aus Proposition 4.33 (b) lässt sich die Form der Gewichtsraumzerlegung einer irreduziblen $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$-Darstellung bestimmen, d.h. die Art und Multiplizität der auftretenden Gewichte. Insbesondere sind alle auftretenden höchsten Gewichte α von der Form

$$\alpha = mL_1 - nL_3 =: (m, n) \quad \text{mit} \quad m, n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.16}$$

Die nach Proposition 4.33 stets existierenden irreduziblen Darstellungen zu diesen Höchstgewichten können relativ explizit beschrieben werden. Seien zu diesem Zwecke die Darstellungen V und $V^* \cong \overline{V} \ncong V$ wie in Beispiel 4.34 definiert.

Definition 4.35

$$\Sigma_{m,0} := \mathrm{Sym}^m(V) \quad \textit{mit} \quad X(v_1 \cdot \ldots \cdot v_m) = \sum_{i=1}^{m} v_1 \cdot \ldots \cdot X(v_i) \cdot \ldots \cdot v_m$$

$$\Sigma_{0,n} := \mathrm{Sym}^n(V^*) \quad \textit{mit} \quad X(\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_n) = -\sum_{i=1}^{n} \varphi_1 \cdot \ldots \cdot (\varphi_i \circ X) \cdot \ldots \cdot \varphi_n$$

Bemerkung 4.36 Der $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$-Darstellung $\Sigma_{m,0}$ entspricht eine komplexe Darstellung der Gruppe $SU(3)$ auf $\mathrm{Sym}^m V$, eindeutig charakterisiert durch (4.14) und ebenfalls mit $\Sigma_{m,0}$ bezeichnet. Die Operation von $SU(3)$ ist explizit gegeben durch

$$g(v_1 \cdot \ldots \cdot v_m) = g(v_1) \cdot \ldots \cdot g(v_m)$$

Analog ergibt sich die SU(3)-Darstellung $\Sigma_{0,n}$.

Durch explizite Konstruktion der Gewichtszerlegung lässt sich mit Proposition. 4.33 (c) auf die Irreduzibilität von $\Sigma_{m,0}$ bzw. $\Sigma_{0,n}$ schließen. Desweiteren enthalten sie in Form von $(e_1)^m := e_1 \cdot \ldots \cdot e_1$ bzw. $(e_1^*)^n$ Höchstgewichtsvektoren zu den Gewichten $(m,0)$ und $(0,n)$, liefern also einen Teil der zu den Gewichten in (4.16) „gehörenden“ Darstellungen. Allgemeiner kann die $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$-Darstellung $\Sigma_{n,m}$ zum höchsten Gewicht (m,n) mit Hilfe der Kontraktionsabbildung

$$\begin{array}{rcl} \iota_{m,n} : \mathrm{Sym}^m(V) \otimes \mathrm{Sym}^n(V^*) & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^{m-1}(V) \otimes \mathrm{Sym}^{n-1}(V^*) \\ v_1 \cdot \ldots \cdot v_n \otimes \varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_m & \mapsto & \sum_{ij} \varphi_j(v_i) v_1 \cdot \ldots \cdot \hat{v}_i \cdot \ldots \cdot v_n \otimes \varphi_1 \cdot \ldots \cdot \hat{\varphi}_j \cdot \ldots \cdot \varphi_m \end{array}$$

charakterisiert werden. Die Darstellungen $\Sigma_{m,n}$ ergeben sich aus der folgenden Proposition:

Proposition 4.37 *Zu jedem Gewicht α der Form* (4.16) *gibt es eine eindeutig bestimmte, irreduzible Darstellung $\Sigma_{m,n}$. Diese kann konkret realisiert werden als Kern der Abbildung $\iota_{m,n}$, im Falle $n = 0$ oder $m = 0$ ergibt sich also gerade* $\mathrm{Sym}^m(V)$ *bzw.* $\mathrm{Sym}^n(\overline{V})$. *Das Tensorprodukt* $\mathrm{Sym}^m(V) \otimes \mathrm{Sym}^n(\overline{V})$ *ist damit im allgemeinen nicht irreduzibel, es gilt*

$$\mathrm{Sym}^m(V) \otimes \mathrm{Sym}^n(\overline{V}) = \Sigma_{m,0} \otimes \Sigma_{0,n} \cong \bigoplus_{i=0}^{min(m,n)} \Sigma_{m-i,n-i}$$

Beweis Siehe [21], §13.2.

□

Da $\iota_{m,n}$ surjektiv ist, ergibt sich sofort folgendes Korollar:

Korollar 4.38 *Die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen zum höchsten Gewicht* (m,n) *sind gegeben durch*

$$dim_{\mathbb{C}} \Sigma_{m,n} = \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2)$$

Der einfachste Fall einer irreduziblen $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ -Darstellung, die nicht direkt in Form einer symmetrischen Potenz gegeben ist, also die Darstellung mit höchstem Gewicht $(1,1)$, ist leicht identifizierbar:

Beispiel 4.39 (Adjungierte Darstellung) Unter der Identifizierung $End(V) \cong V \otimes V^*$ geht die Kontraktion $\iota_{1,1} : V \otimes V^* \longrightarrow \mathbb{C}$ in die Spur $\mathrm{tr} : End(V) \longrightarrow \mathbb{C}$ über, also gilt

$$\ker \iota_{1,1} \ \cong \ \{A \in End(V) \,|\, \mathrm{tr} A = 0\} \ = \ \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$$

Die Wirkung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ auf $End(V)$ ist (unter Berücksichtigung der Identifizierung $End(V) \cong V \otimes V^*$) analog zu Definition 4.35 festgelegt. Für $X \in \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$, $v \otimes \varphi \in End(V)$ ergibt sich direkt die adjungierte Wirkung:

$$\begin{array}{rcl} X(v \otimes \varphi) & = & X(v) \otimes \varphi - v \otimes \varphi \circ X = X \circ (v \otimes \varphi) - (v \otimes \varphi) \circ X \\ & = & [X, v \otimes \varphi] = ad_X(v \otimes \varphi) \end{array}$$

Der Übergang von $\mathfrak{su}_3$- zu $SU(3)$-Darstellungen, charakterisiert durch (4.14), lässt sich für $\Sigma_{m,n}$ direkt aus Definition 4.35 ablesen:

Proposition 4.40 *Die irreduzible Darstellung von $SU(3)$ zum höchsten Gewicht (m, n), ebenfalls mit $\Sigma_{m,n}$ bezeichnet, ist gegeben durch die Räume aus Proposition 4.37 und die Operation*

$$g \cdot (v_1 \cdot \ldots \cdot v_m) := g \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot g \cdot v_m \qquad \textit{bzw.} \qquad g \cdot (\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_m) := \varphi_1 \circ g \cdot \ldots \cdot \varphi_m \circ g$$

Beweis Differentiation der angegebenen Gruppenwirkung liefert gerade die Operation der Lie-Algebra aus der zitierten Definition und erfüllt damit (4.14).

□

Insbesondere ist durch die Identifikation $End(V) \cong V \otimes V^*$ die adjungierte Wirkung von $SU(3)$ auf $End(V)$ gegeben. Diese wird im nächsten Abschnitt benötigt.

Die Zerlegung reeller Darstellungen V in irreduzible Komponenten durch Komplexifizierung erfordert nach Proposition 4.28 die Kenntnis des Typs (reell, komplex, quaternionisch) der auftretenden irreduziblen Summanden in $V \otimes \mathbb{C}$. Er ist nach Proposition 4.31 (c) durch den Typ der infinitesimalen Darstellung bestimmt ist. Die hier relevanten Fälle werden durch die folgende Proposition komplett abgehandelt, die die entsprechenden Resultate aus [21], Lecture 26 zusammenfasst:

Proposition 4.41 *Für die irreduziblen Darstellungen $\Sigma_{m,n}$ gilt:*

(a) $\overline{\Sigma}_{m,n} \cong \Sigma_{n,m}$

(b) $\overline{\Sigma}_{m,n} \cong \Sigma_{m,n} \quad \Longleftrightarrow \quad m = n$

(c) $\Sigma_{m,n}$ ist für $n = m$ von reellem Typ und ansonsten von komplexem Typ. Der quaternionische Fall tritt nicht auf.

Bemerkung 4.42 Diese Aussage verallgemeinert sich nicht auf $SU(n)$- bzw. $\mathfrak{su}_n$-Darstellungen für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sondern gilt nur für ungerade n, siehe [5] und [21].

Im Beweis der Proposition werden folgende Kriterien für den Typ bestimmter Darstellungen benötigt:

Lemma 4.43

(a) Tensorprodukte zweier reeller oder quaternionischer Darstellungen sind von reellem Typ. Dasselbe gilt für zwei komplexe Darstellungen, die zueinander konjugiert sind.

(b) Sei V von reellem oder quaternionischem Typ mit einem höchsten Gewicht λ, das in der Gewichtszerlegung mit Multiplizität 1 auftritt. Dann hat die irreduzible Unterdarstellung mit diesem höchsten Gewicht, V_λ, denselben Typ wie V.

Beweis

(a) Durch $J(v \otimes w) := J(v) \otimes J(w)$ wird auf $V \otimes W$ offenbar eine reelle Struktur definiert. Im Falle komplexer Darstellungen leistet $J(v \otimes w) := w \otimes v$ das Gewünschte.

(b) Die antilineare, bijektive Abbildung $J : V \longrightarrow V$ bildet V_λ auf sich ab. Andernfalls würde J nach dem Schur'schen Lemma einen Isomorphismus $V_\lambda \cong \overline{U} \cong U^*$ für einen von V_λ verschiedenen irreduziblen Summanden $U \subset V$ induzieren. Ganz analog zu der Diskussion im Beweis von Proposition 4.41 (a) würde dann aber folgen, dass das höchste Gewicht von $U \cong (V_\lambda)^*$ ebenfalls λ ist im Widerspruch zur Annahme. Folglich ist $J|_{V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ eine reelle bzw. quaternionische Struktur.

□

Beweis von Proposition 4.41

(a) Es gilt stets $V^* \cong \overline{V}$ und die Gewichte der ersten Darstellung sind gerade durch die negativen Gewichte von V gegeben. Das Gewichtsgitter einer irreduziblen $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$-Darstellung ist invariant unter der Spiegelung σ_2 an der von L_2 erzeugten Gerade. Eine elementargeometrische Überlegung zeigt dann, dass $\overline{(m,n)}$ durch $\sigma_2((m,n))$ gegeben ist (Bilder, die diese Überlegung veranschaulichen, finden sich etwa in [21]). Da unter der Spiegelung σ_2 das Gewicht L_1 auf L_3 abgebildet wird (und umgekehrt, denn $(\sigma_2)^2 = 1$), folgt:
$$\overline{(m,n)} = \sigma_2(mL_1 - nL_3) = nL_1 - mL_3 = (n,m)$$
Alternativ kann die explizite Form aus Proposition 4.37 benutzt werden. Unter dem Isomorphismus $\overline{\mathrm{Sym}^a V \otimes \mathrm{Sym}^b \overline{V}} \longrightarrow \mathrm{Sym}^b V \otimes \mathrm{Sym}^a \overline{V}$ wird dann $\overline{\ker \iota_{a,b}}$ auf $\ker \iota_{b,a}$ abgebildet.

(b) Folgt direkt aus (a) und der linearen Unabhängigkeit von (L_1, L_3).

(c) Gilt $m \neq n$, so ist $\Sigma_{m,n}$ nach (b) komplex. Für $m = n \neq 0$ sind $\Sigma_{(m,0)}$ und $\Sigma_{(0,n)}$ komplex und nach (b) konjugiert zueinander. Nach Proposition 4.37 ist (m,n) ein höchstes Gewicht für $\Sigma_{(m,0)} \otimes \Sigma_{(0,n)}$ und tritt in dessen Zerlegung einfach auf. Da nach Teil (a) des vorangehenden Lemmas $\Sigma_{(m,0)} \otimes \Sigma_{(0,n)}$ von reellem Typ ist, folgt aus Teil (b) des gleichen Lemmas, dass dies auch für $\Sigma_{(m,n)}$ gilt.
Ein alternativer, nicht auf [21] aufbauender Beweis besteht im Nachweis der Existenz einer invarianten, symmetrischen, nicht-entarteten Bilinearform auf $\Sigma_{m,n}$. Das $SU(3)$-invariante, hermitesche Skalarprodukt auf $\mathrm{Sym}^m V \subset V^m$ induziert eine invariante, nicht-entartete Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathrm{Sym}^m V \times \mathrm{Sym}^m \overline{V}$. Das Skalarprodukt schreibt sich dann $\langle \cdot, \kappa(\cdot) \rangle$, wobei $\kappa : \mathrm{Sym}^m V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^m \overline{V}$ die kanonische Abbildung bezeichnet. Vermöge
$$(v \otimes \varphi, w \otimes \psi) \mapsto \langle v, \psi \rangle \langle w, \varphi \rangle =: B(v \otimes \varphi, w \otimes \psi)$$
wird dann eine symmetrische und $SU(3)$-invariante Bilinearform auf dem Produkt $\mathrm{Sym}^m V \otimes \mathrm{Sym}^m \overline{V} \times \mathrm{Sym}^m V \otimes \mathrm{Sym}^m \overline{V}$ definiert. Ist $\{e_i\}$ eine ONB bezüglich des Skalarproduktes, so liegt mit $\sum_{ij} a_{ij} e_i \otimes \kappa(e_j)$ auch $\sum_{ij} \overline{a}_{ij} e_j \otimes \kappa(e_i)$ in $\ker \iota_{mm}$. Folglich

ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\ker \iota_{mm}$ nicht-entartet, denn Einsetzen dieser Elemente liefert:

$$B\Big(\sum_{ij} a_{ij} e_i \otimes \kappa(e_j), \sum_{kl} \overline{a}_{kl} e_l \otimes \kappa(e_k)\Big) = \sum_{ijkl} a_{ij}\overline{a}_{kl} \langle e_i, \kappa(e_k)\rangle \langle e_l, \kappa(e_j)\rangle = \sum_{ij} |a_{ij}|^2$$

$\square$

4.4 Komplexe Formen und Formenraumzerlegung

Im letzten Teil des Kapitels 4 sollen zunächst die wichtigsten Resultate über komplexe Formen sowie über die Zerlegung der Formenräume zusammengestellt werden, als Referenz können [32] und [43] dienen. Unter Verwendung der im vorangehenden Kapitel diskutierten $SU(3)$-Darstellungstheorie werden anschließend die reellen äußeren Potenzen $\Lambda^k T^*M,\ k = 2,3,4,5$ in $SU(3)$-irreduzible Summanden zerlegt und alle auftretenden Projektoren und Isomorphismen explizit angegeben. Auf dieser Basis kann dann in Abschnitt 5.2 die intrinsische Torsion einer fixierten $SU(3)$-Struktur präzise durch $d\omega$ und $d\mathcal{R}e\,\psi$ bzw. $d\mathcal{I}m\,\psi$ ausgedrückt werden.

Die orthogonale, fast-komplexe Struktur $J \in End(TM)$ induziert eine natürliche orthogonale, fast-komplexe Struktur auf T^*M, definiert durch

$$J(\varphi) := -\varphi \circ J \qquad (4.17)$$

Diese Festlegung stimmt mit den Operationen in Abschnitt 4.1 sowie in [6] überein, unterscheidet sich aber von den Operationen in [32] und [43] um ein Vorzeichen. Als Konsequenz annullieren (1,0)-Formen hier (1,0)-Vektoren und umgekehrt, siehe auch Lemma 4.45.
Ziel ist die Zerlegung von Tensoren in Eigenräume bzgl. J. Da J die Eigenwerte $\pm i$ hat, müssen alle reellen Bündel komplexifiziert und die faserweise $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{C}$-linear fortgesetzt werden. Tangential- und Kotangentialbündel werden so zu komplexen Vektorbündeln, die mit einer natürlichen Konjugationsabbildung $\overline{\cdot}$ versehen sind, und J zu einem $\mathbb{C}$-linearen Endomorphismus. Die genannten Bündel zerlegen sich dann in Eigenräume zu J, die die Definition weiterer Bündel ermöglichen :

Definition 4.44
(a) $(T^*M)^{1,0} \oplus (T^*M)^{0,1} := Eig(J,+i) \oplus Eig(J,-i) = T^*M \otimes \mathbb{C}$

(b) $\Lambda^{p,q}T^*M := \Lambda^p(T^*M)^{1,0} \otimes \Lambda^q(T^*M)^{0,1}$

(c) $\mathrm{Sym}^{p,q}T^*M := \mathrm{Sym}^p(T^*M)^{1,0} \otimes \mathrm{Sym}^q(T^*M)^{0,1}$

Das Paar (p,q) in (b) und (c) wird als Bigrad bezeichnet. Analog werden die Bündel $TM^{1,0}$, $TM^{0,1}$, $\Lambda^{p,q}TM$ sowie $\mathrm{Sym}^{p,q}TM$ definiert.

Für die Zerlegung von $TM \otimes \mathbb{C}$ und $T^*M \otimes \mathbb{C}$ ergeben sich direkt aus der Definition folgende Charakterisierungen:

Lemma 4.45

(a) $TM^{1,0/0,1} = \{v \mp iJv \,|v \in TM \otimes \mathbb{C}\}$

(b) $(T^*M)^{1,0/0,1} = \{f \in T^*M \otimes \mathbb{C} \,|\, f(Jv) = \mp if(v)\} \cong (TM^{0,1/1,0})^*$, *insbesondere annullieren Formen aus* $T^*M^{1,0}$ *Vektoren aus* $TM^{0,1}$ *und umgekehrt.*

Da die Antisymmetrisierung $\Lambda^{p,q}T^*M \longrightarrow \Lambda^{p+q}T^*M \otimes \mathbb{C}$, definiert durch $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \wedge \beta$, injektiv ist, kann $\Lambda^{p,q}T^*M$ mit einem Unterbündel von $\Lambda^{p+q}T^*M \otimes \mathbb{C}$ identifiziert werden. Unter Verwendung der Basen aus (4.8) schreibt sich die Umkehrung der Antisymmetrisierung für $\sigma \in \Gamma\left(\Lambda^{p,q}T^*M\right) \subset \Gamma\left(\Lambda^{p+q}T^*M \otimes \mathbb{C}\right)$ als

$$\vee(\sigma) = \sum_{I=\alpha_1<\ldots<\alpha_q} (F_I \lrcorner\, \sigma) \otimes d\overline{F}_I = \sum_{I=\alpha_1<\ldots<\alpha_p} dF_I \otimes (\overline{F}_I \lrcorner\, \sigma) \tag{4.18}$$

Analoge Aussagen gelten für $\Lambda^{p,q}TM$ und die symmetrischen Potenzen.

Diese so definierten (p,q)-Formen besitzen folgende Eigenschaften (siehe [32]):

Proposition 4.46

(a) *Für* $p > m$ *oder* $q > m$ *folgt* $\Lambda^{p,q}T^*M = \{0\}$

(b) *Die komplexen k-Formen zerfallen in die direkte Summe der (p,q)-Potenzen passenden Grades:*

$$\Lambda^k T^*M \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}T^*M$$

(c) *Konjugation auf* $\Lambda^k T^*M \otimes \mathbb{C}$ *vertauscht mit* $\wedge$ *und definiert damit folgenden* $\mathbb{C}$*-Anti-Isomorphismus:*

$$\Lambda^{p,q}T^*M \cong \Lambda^{q,p}T^*M \quad \text{mit} \quad \overline{\Lambda^{p,q}T^*M} = \Lambda^{q,p}T^*M$$

(d) *Das* $\wedge$*-Produkt hat den Bigrad (0,0), d.h. es gilt:*

$$\Lambda^{p,q}T^*M \times \Lambda^{r,s}T^*M \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{p+r,q+s}T^*M$$

(e) *Äußere Differentiation hat ändert den Grad einer Form um* $+1$*, hat aber keinen festen Bigrad. Eine Einschränkung an den Bigrad ergibt sich im Spezialfall einer komplexen Mannigfaltigkeit. Präziser gilt:*
J ist genau dann eine integrable fast-komplexe Struktur und wird damit induziert von einer komplexen Struktur, wenn die äußere Differentiation folgender Einschränkung genügt:

$$d(\Gamma\left(\Lambda^{p,q}T^*M\right)) \subset \Gamma\left(\Lambda^{p+1,q}T^*M \oplus \Lambda^{p,q+1}T^*M\right)$$

Mit der Notation aus Proposition 4.28 ergibt sich aus Teil (c) der Proposition:

Korollar 4.47 *Für die Realteile der (p,q)-Formen gilt:*

$$[\![\Lambda^{p,q}T^*M]\!] \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{p,q}T^*M \oplus \Lambda^{q,p}T^*M \qquad [\Lambda^{p,p}T^*M] \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{p,p}T^*M$$

$[\![\Lambda^{p,q}T^*M]\!]$ *und* $[\Lambda^{p,p}T^*M]$ *werden im Folgenden durch* $[\![\Lambda^{p,q}]\!]$ *und* $[\Lambda^{p,p}]$ *abgekürzt.* $[\![\mathrm{Sym}^{p,q}]\!]$ *und* $[\mathrm{Sym}^{p,p}]$ *sind analog definiert.*

Aus der Zerlegung in Proposition 4.46(b) folgt die Existenz von Projektoren

$$\Pi^{p,q} : \Lambda^{p+q}T^*M \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \Lambda^{p,q}T^*M$$

Die Räume $\Lambda^{p,q}T^*M$ bzw. die Projektoren $\Pi^{p,q}$ können teilweise durch die Fortsetzung der fast-komplexen Struktur J aus (4.17) als Gruppenelement bzw. als Derivation charakterisiert werden, entsprechendes gilt für einige der Projektoren $\mathbb{P}^{p,q}$ und $\mathbb{P}^{p,p}$ auf die reellen Bündel $[\![\Lambda^{p,q}]\!]$ bzw. $[\Lambda^{p,p}]$. Dies resultiert aus der Tatsache, dass für einen Endomorphismus F mit genau zwei (verschiedenen) Eigenwerten λ_1, λ_2 die Projektoren auf die Eigenräume durch

$$\mathbb{P}_{Eig(\lambda_1)} = \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(F - \lambda_2 1\!\!1) \qquad \mathbb{P}_{Eig(\lambda_2)} = \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(F - \lambda_1 1\!\!1) \tag{4.19}$$

explizit gegeben sind.

Lemma 4.48

(a) *Für die Projektoren* $\Pi^{m,ev/od}$ *auf die Unterbündel* $\Lambda^{p,q}T^*M$ *mit geradem/ungeradem p gilt mit* $dim(M) = 2m$:

$$\Pi^{m,ev} = \bigoplus_{j=0, j\,even}^{m} \Pi^{j,m-j} = \frac{1}{2}\Big(1\!\!1 + i^m J\cdot\Big)$$
$$\Pi^{m,od} = \bigoplus_{j=0, j\,odd}^{m} \Pi^{j,m-j} = \frac{1}{2}\Big(1\!\!1 - i^m J\cdot\Big)$$

(b) *Es gilt* $\Lambda^{p,q}T^*M = Eig(Der(J), i(p-q))$. *Eine einfache explizite Konstruktion des Projektors analog zu (a) existiert aber nicht.*

(c) *Die Projektoren auf die einzelnen Summanden in* $\Lambda^2T^*M = [\![\Lambda^{2,0}]\!] \oplus [\Lambda^{1,1}]$ *sowie* $\Lambda^3T^*M = [\![\Lambda^{3,0}]\!] \oplus [\![\Lambda^{2,1}]\!]$ *lauten:*

$$\mathbb{P}^{2,0} = \tfrac{1}{2}\big(1\!\!1 - J\cdot\big) \qquad \mathbb{P}^{1,1} = \tfrac{1}{2}\big(1\!\!1 + J\cdot\big)$$
$$\mathbb{P}^{3,0} = -\tfrac{1}{8}\big((Der(J))^2 + 1\!\!1\big) \qquad \mathbb{P}^{2,1} = \tfrac{1}{8}\big((Der(J))^2 + 9 1\!\!1\big)$$

Beweis Die Operationen von J erfüllen für $\alpha \in \Gamma\left(\Lambda^{p,q}T^*M\right)$:

$$Der(J)\alpha = i(p-q)\alpha \qquad J \cdot \alpha = i^p(-i)^q\alpha$$

Daraus folgt (b) und mit den Formeln aus (4.19) auch (a). Diese Formeln liefern ebenfalls die Projektoren in (c), denn die Abbildung $J\cdot$ hat auf 2-Formen die Eigenwerte -1 und $+1$ mit zugehörigen Eigenräumen $\left[\!\left[\Lambda^{2,0}\right]\!\right] \otimes \mathbb{C}$ und $\left[\Lambda^{1,1}\right] \otimes \mathbb{C}$. Ebenso hat $(Der(J))^2$ die Eigenwerte -9 und -1 sowie Eigenräume $\left[\!\left[\Lambda^{3,0}\right]\!\right] \otimes \mathbb{C}$ und $\left[\!\left[\Lambda^{2,1}\right]\!\right] \otimes \mathbb{C}$. Die reellen Projektoren ergeben sich direkt als Restriktion auf den Realteil.

□

Da die Methode aus (4.19) nur Projektoren auf eine Zerlegung in 2 Summanden liefert, können i.a. auf diese Weise weder die einzelnen $\Pi^{p,q}$ für $p+q \geq 2$ noch die $\mathbb{P}^{p,q}$ für $p+q \geq 4$ dargestellt werden da jeweils mindestens 3 Summanden auftreten. Der hier vor allem relevante Fall $m = 3$ ist allerdings gerade der Grenzfall, in dem diese Beschreibung noch ausreichend ist, denn es ist aufgrund des $*$-Isomorphismus hinreichend (siehe auch Diskussion im Verlauf diese Abschnitts über die Zerlegung in irreduzible Komponenten), die Projektoren für $p+q \leq 3$ zu bestimmen.

Nach Lemma 4.45 (b) gilt $\Lambda^{p,q}T^*M = \ker(Der(J) - i(p-q)\mathbb{1})$ und folglich sind diese Räume als Kerne $U(m)$-invarianter Endomorphismen selbst invariant. Dies gilt auch für $[\![\Lambda^{p,q}]\!]$ und $[\Lambda^{p,p}]$, beide Darstellungen sind jedoch im allgemeinen weder $SU(m)$- noch $U(m)$-irreduzibel. Eine zusätzlich Aufspaltung der genannten Räume resultiert aus der von J induzierten Kählerform $\omega(X,Y) := g(JX,Y)$ bzw. der durch sie induzierten Abbildungen

$$\omega\wedge : \Lambda T^*M \longrightarrow \Lambda T^*M \qquad\qquad \omega\lrcorner : \Lambda T^*M \longrightarrow \Lambda T^*M$$

Im Rahmen der Identifizierung $TM \cong T^*M$ sind sie adjungiert zueinander. Eigenschaften der Abbildungen $\omega\wedge$ und $\omega\lrcorner$ nach [32] sind in folgender Proposition aufgelistet:

Proposition 4.49 *Für $\omega\wedge$ und $\omega\lrcorner$ gilt:*

(a) $\omega\wedge$ ist vom Bigrad (1,1), insbesondere gilt $\omega \wedge \Lambda^{p,q}T^*M = \{0\}$ für $p \geq m$ oder $q \geq m$.

(b) $\omega\lrcorner$ ist vom Bigrad (-1,-1), insbesondere gilt $\omega\lrcorner\Lambda^{p,q}T^*M = \{0\}$ für $p = 0$ oder $q = 0$.

(c) Es gilt $\omega\lrcorner = *^{-1} \circ \omega \wedge \circ *$.

(d) Mit dem verschobenem Zähloperator[14] $H := Der(\mathbb{1}) - m\ \mathbb{1}|_{\Lambda T^*M}$ gilt:

$$[H, \omega\wedge] = 2\omega\wedge \qquad [H, \omega\lrcorner] = -2\omega\lrcorner \qquad [\omega\wedge, \omega\lrcorner] = H$$

(e) Für $\alpha \in \Gamma\left(\Lambda^k T^*M\right)$ gilt:

$$[(\omega\wedge)^i, \omega\lrcorner]\alpha = i(k-m+i-1)(\omega\wedge)^{i-1}\alpha$$
$$[(\omega\lrcorner)^i, \omega\wedge]\alpha = i(-k+i-1)(\omega\lrcorner)^{i-1}\alpha$$

[14]Der Zähloperator $Der(J) = -\sum_i dE_i \wedge E_i\lrcorner$ gibt für eine k-Form gerade den Grad der Form wieder, d.h. wirkt auf $\Lambda^k T^*M$ durch $k \cdot \mathbb{1}$. Der verschobene Zähloperator wirkt auf den Summanden durch $(k-m)\mathbb{1}$

Beweis Die Beweise für (a) bis (d) sowie die erste Aussage in (e) finden sich in [32]. Die zweite Aussage in (e) kann ganz analog zur ersten Aussage wie in [32], Korollar 1.2.28 durch Induktion bewiesen werden.

□

Mit Hilfe von $\omega\lrcorner$ können weitere $U(m)$-invariante Unterräume definiert werden:

Definition 4.50 *Die primitiven (p,q)- bzw. k-Formen sind definiert als*

$$\Lambda_0^{p,q}T^*M := \ker(\omega\lrcorner : \Lambda^{p,q}T^*M \longrightarrow \Lambda^{p-1,q-1}T^*M)$$
$$\Lambda_0^{k}T^*M := \ker(\omega\lrcorner : \Lambda^{k}T^*M \longrightarrow \Lambda^{k-2}T^*M)$$

Analog zu $[\![\Lambda^{p,q}]\!]$ *können dann* $[\![\Lambda_0^{p,q}]\!]$ *und* $[\Lambda_0^{p,p}]$ *definiert werden.*

Proposition 4.49 (d) impliziert, dass durch die Zuordnung $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \omega\wedge, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \omega\lrcorner$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \mapsto H$ ein Lie-Algebra-Homomorphismus $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow End(\Lambda T^*M)$ definiert wird. Anwendung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Darstellungstheorie (für eine allgemeine Diskussion siehe [21]) auf ΛT^*M liefert eine Zerlegung der äußeren Algebra. Zusammen mit Proposition 4.49 folgt dann (siehe [32])

Theorem 4.51 *Für die reellen k-Formen existiert die folgende Zerlegung als direkte Summe:*

$$\Lambda^k T^*M = \bigoplus_{i\geq 0}(\omega\wedge)^i(\Lambda_0^{k-2i}T^*M)$$

Diese sogenannte Lefschetz-Zerlegung ist orthogonal bzgl. des Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *auf* ΛT^*M*. Innerhalb dieser Zerlegung gilt desweiteren:*

(a) Die primitiven Formen können wie folgt charakterisiert werden:

$$\begin{aligned} k > m \quad &: \quad \Lambda_0^k T^*M = \{0\} \\ k \leq m \quad &: \quad \Lambda_0^k T^*M = \ker((\omega\wedge)^{m-k+1} : \Lambda^k T^*M \longrightarrow \Lambda^{m+1}T^*M) \end{aligned}$$

(b) Für $k \leq m$ *ist* $(\omega\wedge)^{m-k} : \Lambda^k T^*M \longrightarrow \Lambda^{2m-k}T^*M$ *ein Isomorphismus. Insbesondere ist* $(\omega\wedge)^{m-k} : \Lambda_0^k T^*M \longrightarrow \Lambda^{2m-k}T^*M$ *injektiv.*

Aufbauend auf diese Zerlegung können sowohl die Projektoren auf die primitiven Anteile aus Definition 4.50, bezeichnet mit $\mathbb{P}_0^{p,q}$ etc., als auch auf die Anteile der Zerlegungen aus Theorem 4.51, bezeichnet mit $\mathbb{P}_0^k$, $\mathbb{P}_\omega^k$ etc., explizit angegeben werden. Für die hier vor allem interessanten Fälle von Formengrad 2, 3 und 4 ergibt sich:

Proposition 4.52 *Die Projektoren* $\mathbb{P}_0^2$, $\mathbb{P}_0^3$ *auf* $\Lambda_0^2T^*M$ *bzw.* $\Lambda_0^3T^*M$ *sowie* $\mathbb{P}_\omega^4$ *auf* $\Lambda_0^2T^*M\wedge\omega$ *lauten:*

$$\mathbb{P}_0^2 = 1\!\!1 - \tfrac{1}{3}\omega\wedge\omega\lrcorner \qquad \mathbb{P}_0^3 = 1\!\!1 - \tfrac{1}{2}\omega\wedge\omega\lrcorner \qquad \mathbb{P}_\omega^4 = \omega\wedge\omega\lrcorner - \tfrac{1}{3}\omega\wedge\omega^2\lrcorner$$

Beweis Sei $\alpha \in \Gamma\left(\Lambda^2 T^*M\right) = \Gamma\left(\Lambda^2_0 T^*M\right) \oplus \mathbb{R}\omega$ (Zerlegung nach Theorem 4.51), so gilt $\alpha = \mathbb{P}^2_0(\alpha) + \lambda\omega$. Aus $0 = \omega\lrcorner\mathbb{P}^2_0(\alpha) = \omega\lrcorner\alpha - \lambda\omega\lrcorner\omega$ folgt $3\lambda = \omega\lrcorner\alpha$. Auflösen liefert den Projektor $\mathbb{P}^2_0$.
Ganz analog zerlegt sich $\alpha \in \Gamma\left(\Lambda^3 T^*M\right)$ in $\alpha = \mathbb{P}^3_0(\alpha) + \mu \wedge \omega$ für ein $\mu \in \Gamma\left(T^*M\right)$. Mit Hilfe von Proposition 4.49 ergibt sich:

$$0 = \omega\lrcorner\alpha - \omega\lrcorner\omega \wedge \mu = \omega\lrcorner\alpha + [\omega\wedge, \omega\lrcorner]\mu - \omega \wedge \omega\lrcorner\mu = \omega\lrcorner\alpha + H(\mu) = \omega\lrcorner\alpha - 2\mu$$

Es folgt direkt $\mu = \frac{1}{2}\omega\lrcorner\alpha$ und damit der angegebene Projektor.
Im Falle der Form $\gamma \in \Gamma\left(\Lambda^4 T^*M\right)$ liefert das Theorem die Zerlegung $\gamma = \sigma \wedge \omega + \nu\omega^2$ für ein $\sigma \in \Gamma\left(\Lambda^2_0 T^*M\right)$. Es folgt

$$\omega\lrcorner\gamma = [\omega\lrcorner, \omega\wedge]\sigma + \omega \wedge \omega\lrcorner\sigma + \nu\omega\lrcorner(\omega^2) = -H\sigma + 3\nu\omega = \sigma + 3\nu\omega$$

Nochmaliges Operieren mit $\omega\lrcorner$ liefert $9\nu = (\omega^2)\lrcorner\gamma$ und Substitution von ν in der vorangehenden Gleichung dann den Projektor $\mathbb{P}^4_\omega$.

□

Damit sind alle Unterräume diskutiert, die in der $SU(3)$-Zerlegung von $\Lambda^k T^*M$ auftreten. Da sich die Grade $k = 4, 5, 6$ durch Hodge-Dualität ergeben und für $k = 0, 1$ bereits Irreduzibilität vorliegt, bleiben im wesentlichen die Fälle $k = 2, 3$ zu diskutieren. Für den Fall $k = 3$ wird zunächst noch die explizite Identifizierung von zwei bestimmten Darstellungen benötigt:

Lemma 4.53 *Bezeichnet U die definierende oder die duale Darstellung von $SU(3)$ so existieren folgende Isomorphismen:*

$$\Lambda^{2,1}_0 U \cong \mathrm{Sym}^{0,2} U \qquad \Lambda^{1,2}_0 U \cong \mathrm{Sym}^{2,0} U \qquad [\![\Lambda^{2,1}_0 U]\!] \cong [\![\mathrm{Sym}^{2,0} U]\!]$$

Insbesondere folgt, dass die jeweils links stehenden Darstellungen irreduzibel sind. Isomorphismen können explizit angegeben werden :

$$\begin{array}{lll} \Lambda^{2,1}U \longrightarrow U^{0,1} \otimes U^{0,1} : & & u \wedge v \wedge \overline{w} \mapsto \overline{w} \otimes ((u \wedge v)\lrcorner\overline{\psi}) \\ U^{0,1} \otimes U^{0,1} \longrightarrow \Lambda^{2,1}U : & & \overline{v} \otimes \overline{w} \mapsto (\overline{w}\lrcorner\psi) \wedge \overline{v} \end{array}$$

Die anderen Fälle ergeben sich durch die offensichtlichen Modifikationen.

Beweis Das Tensorprodukt $\Lambda^{2,1}U$ zerlegt sich unter Verwendung von $V := U^{1,0}$, $\overline{V} = U^{0,1}$ und des durch ψ induzierten Isomorphismus' aus Beispiel 4.34 wie folgt:

$$\Lambda^{2,1}U = \Lambda^2 V \otimes \overline{V} \cong \overline{V} \otimes \overline{V} = \mathrm{Sym}^2\overline{V} \oplus \Lambda^2\overline{V} \cong \mathrm{Sym}^2\overline{V} \oplus V \tag{4.20}$$

Dies ist nach Kapitel 4.3 die Summe der irreduziblen Moduln zum höchsten Gewicht (0,2) und (1,0). Desweiteren resultiert aus Komplexifizierung und Projektion auf den (2,1)-Anteil der Lefschetz-Zerlegung aus Theorem 4.51 die Dekomposition $\Lambda^{2,1}U = \Lambda^{2,1}_0 U \oplus U^{1,0} \wedge \omega$. Die

Einschränkung des Isomorphismus aus (4.20) zeigt daher die erste Behauptung. Die zweite und dritte Isomorphie folgt direkt durch Konjugation bzw. Bildung des Realteils aus der bereits diskutierten.

Die Isomorphismen ergeben sich direkt durch Komposition der Abbildungen, die in Rechnung (4.20) verwendet wurden. Die erste Abbildung ergibt sich etwa unter Rückgriff auf (4.18):

$$u \wedge v \wedge \overline{w} \mapsto \sum_\alpha (F_\alpha \lrcorner\, u \wedge v \wedge \overline{w}) \otimes \overline{F}_\alpha \mapsto \sum_\alpha \overline{F}_\alpha \otimes (F_\alpha \lrcorner\, u \wedge v \wedge \overline{w}) \lrcorner\, \overline{\psi} = \overline{w} \otimes (u \wedge v \lrcorner\, \overline{\psi}) \quad (4.21)$$

Die Vertauschung der Tensorfaktoren im vorletzten Schritt ist $SU(3)$-invariant und nützlich für die Identifizierung von $U \otimes U$ mit Endomorphismen in Proposition 4.55.

□

Bemerkung 4.54 Die Aussage aus Lemma 4.53, dass die angegebenen Abbildungen die irreduziblen Unterdarstellungen korrekt aufeinander abbilden, kann alternativ zu dem dort gegebenem Argument auch direkt nachgerechnet werden.
Anwenden des Projektors $\mathbb{P}_0^3$ auf ein homogenes Element $\xi = v \wedge w \wedge \overline{u} \in \Lambda^{2,1}U$ ergibt zunächst $\xi_0 = \xi - \frac{1}{2}(\omega \lrcorner\, \xi) \wedge \omega \in \Lambda_0^{2,1}U$. Um zu zeigen, dass dies auf $\mathrm{Sym}^2 U^{0,1}$ abgebildet wird genügt es zu zeigen, dass die Antisymmetrisierung des Bildes verschwindet. Für den zweiten Summanden $\frac{1}{2}(\omega \lrcorner\, \xi) \wedge \omega$ von ξ_0 ergibt sich mit $\mu := \omega \lrcorner\, \xi \in U^{1,0}$ nach (4.21):

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha \overline{F}_\alpha \wedge \Big((F_\alpha \lrcorner\, (\mu \wedge \omega)) \lrcorner\, \overline{\psi}\Big) = -\frac{1}{2}\sum_\alpha \overline{F}_\alpha \wedge JF_\alpha \lrcorner\, (\mu \lrcorner\, \overline{\psi}) = \frac{1}{2} Der(J)(\mu \lrcorner\, \overline{\psi}) = -i\mu \lrcorner\, \overline{\psi}$$

Der letzte Schritt ergibt sich wegen $\mu \lrcorner\, \overline{\psi} \in \Lambda^{0,2}U$ aus Lemma 4.48 (b). Dieser Term kann unter Ausnutzung der Identität aus Bemerkung 4.16 (verwendet im dritten Schritt der folgenden Rechnung) weiter umgeformt werden, dazu gelte $s \wedge t \in \Lambda^{2,0}U$:

$$\begin{aligned} \big\langle \mu \lrcorner\, \overline{\psi}, s \wedge t \big\rangle &= \big\langle \overline{\psi}, (\omega \lrcorner\, (v \wedge w \wedge \overline{u})) \wedge s \wedge t \big\rangle = \big\langle \omega \wedge ((s \wedge t) \lrcorner\, \overline{\psi}), v \wedge w \wedge \overline{u} \big\rangle \\ &= \big\langle Js \wedge (t \lrcorner\, \overline{\psi}) - Jt \wedge (s \lrcorner\, \overline{\psi}), v \wedge w \wedge \overline{u} \big\rangle = \big\langle i(v \wedge w) \lrcorner\, \overline{\psi}, \overline{u} \lrcorner\, (s \wedge t) \big\rangle \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $(-i(\omega \lrcorner\, (v \wedge w \wedge \overline{u})) \lrcorner\, \overline{\psi} = \overline{u} \wedge ((v \wedge w) \lrcorner\, \overline{\psi})$, damit verschwindet die Antisymmetrisierung des Bildes von ξ_0.
Für die zweite Abbildung aus Lemma 4.53 ist zu zeigen, dass das Bild von $\mathrm{Sym}^{0,2}U$ im Kern von $\omega \lrcorner$ liegt. Homogene Elemente aus $U^{0,1} \otimes U^{0,1}$ werden auf $(\overline{v} \lrcorner\, \psi) \wedge \overline{w}$ abgebildet, für derartige Formen gilt:

$$\langle \omega \lrcorner\, ((\overline{v} \lrcorner\, \psi) \wedge \overline{w}), \overline{u} \rangle = \langle \overline{v} \lrcorner\, \psi, \overline{w}(\omega \wedge \overline{u}) \rangle = \langle \psi, \overline{v} \wedge J(\overline{v}) \wedge \overline{u} \rangle$$

Aus $\overline{v} \wedge J(\overline{w}) = -i\overline{v} \wedge \overline{w} = -\overline{w} \wedge J(\overline{v})$ folgt damit, dass $\omega \lrcorner\, ((\overline{v} \lrcorner\, \psi) \wedge \overline{w})$ schief in $\overline{v}, \overline{w}$ ist und Bilder von Elementen aus $\mathrm{Sym}^2 U^{0,1}$ im Kern von $\omega \lrcorner$ liegen.

Wie in Proposition 5.8 und Bemerkung 5.3 diskutiert, kann $[\![U^{1,0} \otimes U^{1,0}]\!] = [\![U^{0,1} \otimes U^{0,1}]\!]$ mit den (symmetrischen und schiefsymmetrischen) Endomorphismen $End^{J-}(U)$, die mit J antikommutieren, identifiziert werden. Dies ermöglicht folgende Beschreibung des Isomorphismus aus Lemma 4.53 bzw. (4.20) zwischen den reellen Darstellungen:

Proposition 4.55 *Der $SU(3)$-Isomorphismus zwischen $End^{J-}(U) \cong [\![\mathrm{Sym}^2 U^{1,0}]\!] \oplus [\![\Lambda^2 U^{1,0}]\!]$ und $[\![\Lambda^{2,1}]\!] \cong [\![\Lambda^{2,1}_0]\!] \oplus U^* \wedge \omega$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} End^{J-}(U) &\longrightarrow [\![\Lambda^{2,1}]\!] &: \quad & S \mapsto -2Der(S)(\mathcal{R}e\,\psi) \\ [\![\Lambda^{2,1}]\!] &\longrightarrow End^{J-}(U) &: \quad & \eta \mapsto 2(\,\cdot\,\lrcorner\,\eta)\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi \end{aligned}$$

Die Isomorphismen zwischen den Summanden gleicher Dimension werden dann durch die Restriktion beschrieben.

Beweis Nach Identifizierung der reellen Darstellungen $U \cong U^*$ wirkt ein Element $v \otimes w \cong S \in End(U)$ wie folgt auf $\mathcal{R}e\,\psi$:

$$\begin{aligned} Der(S)(\mathcal{R}e\,\psi)(X,Y,Z) &= -\mathcal{R}e\,\psi(SX,Y,Z) - \mathcal{R}e\,\psi(X,SY,Z) - \mathcal{R}e\,\psi(X,Y,SZ) \\ &= -\mathcal{R}e\,\psi(w,Y,Z)v(X) - \mathcal{R}e\,\psi(X,w,Z)v(Y) - \mathcal{R}e\,\psi(X,Y,w)v(Z) \\ &= -\left((w\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi) \wedge v\right)(X,Y,Z) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Jedes Element in $S \in [\![U^{1,0} \otimes U^{1,0}]\!] \cong End^{J-}(U)$ schreibt sich in der allgemeinen Form $S = \sum_i v_i \otimes w_i + \overline{v}_i \otimes \overline{w_i}$ für $v_i, w_i \in U^{1,0}$. Anwendung der Isomorphismen aus Lemma 4.53 auf diese Summanden aus $U^{1,0} \otimes U^{1,0}$ bzw. $U^{0,1} \otimes U^{0,1}$ liefert dann mit (4.22):

$$\begin{aligned} S \mapsto \sum_i (w_i\lrcorner\,\overline{\psi}) \wedge v_i + \sum_i (\overline{w}_i\lrcorner\,\psi) \wedge \overline{v}_i &= 2\sum_i (w_i\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi) \wedge v_i + 2\sum_i (\overline{w}_i\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi) \wedge \overline{v}_i \\ &= -2Der(S)(\mathcal{R}e\,\psi) \end{aligned}$$

Für $\eta = \sum_i v_i \wedge w_i \wedge \overline{u}_i + \sum_i \overline{v}_i \wedge \overline{w}_i \wedge u_i \in [\![\Lambda^{2,1}]\!]$ folgt aus der Tatsache, dass die Kontraktion von (1,1)-Vektoren mit $\overline{\psi}$ verschwindet:

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \overline{F}_\alpha \otimes (F_\alpha\lrcorner\,\eta)\lrcorner\,\overline{\psi} &= \sum_\alpha \overline{F}_\alpha \otimes \left(\sum_i v_i \wedge w_i \wedge (F_\alpha\lrcorner\,\overline{u}_i) + \sum_i F_\alpha\lrcorner\,(\overline{v}_i \wedge \overline{w}_i) \wedge u_i\right)\lrcorner\,\overline{\psi} \\ &= \sum_i \left(\sum_\alpha (F_\alpha\lrcorner\,\overline{u}_i)\,\overline{F}_\alpha\right) \otimes (v_i \wedge w_i)\lrcorner\,\overline{\psi} \\ &= \sum_i \overline{u}_i \otimes (v_i \wedge w_i)\lrcorner\,\overline{\psi} \end{aligned}$$

Mit dieser sowie der analogen Identität für Kontraktion mit ψ folgt dann aus Lemma 4.53

der Endomorphismus, auf den η abgebildet wird:

$$\begin{aligned}X \mapsto &\sum_i \overline{u}_i(X) \otimes ((v_i \wedge w_i) \lrcorner \overline{\psi}) + \sum_i u_i(X) \otimes ((\overline{v}_i \wedge \overline{w}_i) \lrcorner \psi)\\ &= \sum_\alpha \overline{F}_\alpha(X) \otimes (F_\alpha \lrcorner \eta) \lrcorner q\psi + F_\alpha(X) \otimes (\overline{F}_\alpha \lrcorner \eta) \lrcorner \psi\\ &= 2\Bigg(\sum_\alpha (\overline{F}_\alpha(X) F_\alpha + F_\alpha(X) \overline{F}_\alpha) \lrcorner \eta\Bigg) \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi\end{aligned}$$

Da die Summe den Wert X hat, folgt die Behauptung.

□

Proposition 4.56 *Die Bündel $\Lambda^k T^*M$ $(k = 2,3,4,5)$ zerfallen in folgende (reelle) $SU(3)$-irreduzibele Unterdarstellungen:*

$$\begin{aligned}\Lambda^2 T^*M &= [\![\Lambda^{2,0}]\!] \oplus [\Lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}\omega\\ \Lambda^3 T^*M &= \mathbb{R}\mathcal{R}e\,\psi \oplus \mathbb{R}\mathcal{I}m\,\psi \oplus [\![\Lambda_0^{2,1}]\!] \oplus \Lambda^1 T^*M \wedge \omega\\ \Lambda^4 T^*M &= [\![\Lambda^{3,1}]\!] \oplus [\Lambda^{2,2}] = [\![\Lambda^{2,0}]\!] \wedge \omega \oplus [\Lambda_0^{1,1}] \wedge \omega \oplus \mathbb{R}\omega^2\\ \Lambda^5 T^*M &= [\![\Lambda^{3,2}]\!] = \Lambda^1 T^*M \wedge \omega^2\end{aligned}$$

Beweis Es wird in das in Kapitel 4.3 beschriebene Verfahren angewendet. Mit der Abkürzung $V := T^*M^{1,0} \cong TM^{0,1}$ und $\overline{V} = T^*M^{0,1} \cong TM^{1,0}$ existieren die beiden Isomorphismen $\Lambda^2\overline{V} \cong \Lambda^2 V^* \cong V$ sowie $\Lambda^2 V \cong \overline{V}$, die durch die komplexen Volumenelemente ψ und $\overline{\psi}$ induziert werden. Für $\Lambda^2 T^*M$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}(\Lambda^2 T^*M) \otimes \mathbb{C} &\cong \Lambda^2(T^*M \otimes \mathbb{C}) = \Lambda^2(V \oplus \overline{V})\\ &\cong \Lambda^2 V \otimes \mathbb{C} \oplus \Lambda^2 \overline{V} \otimes \mathbb{C} \quad\oplus\quad V \otimes \overline{V}\\ &= \underbrace{[\![\Lambda^2 V]\!] \otimes \mathbb{C}}_{(1,0)+(0,1)} \quad\oplus\quad \underbrace{\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}}_{(1,1)} \quad\oplus\quad \underbrace{\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}}_{(0,0)}\end{aligned}$$

Der von g induzierte $SU(3)$-Isomorphismus $End(V) \cong V \otimes \overline{V} = \Lambda^{1,1} V$, $T \mapsto g(T\cdot, \cdot)$ schränkt sich ein zu $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C} \cong \Lambda_0^{1,1} V$, denn es gilt $\omega \lrcorner g(T\cdot,\cdot) = -i\sum_\alpha g(TF_\alpha, \overline{F}_\alpha) = -i\,\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(T)$, d.h. $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C} \cong [\Lambda_0^{1,1}] \otimes \mathbb{C}$. Die Zerlegung von $\Lambda^2 T^*M$ ergibt sich dann durch Bilden des Realteils.

Analog ergibt sich die Zerlegung des Raumes der 3-Formen:

$$\begin{aligned}(\Lambda^3 T^*M) \otimes \mathbb{C} &\cong \Lambda^3(V \oplus \overline{V})\\ &\cong \Lambda^3 V \otimes \mathbb{C} \quad\oplus\quad \Lambda^2 V \otimes \overline{V} \quad\oplus\quad V \otimes \Lambda^2 \overline{V} \quad\oplus\quad \Lambda^3 \overline{V} \otimes \mathbb{C}\\ &\cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \quad\oplus\quad \overline{V} \otimes \overline{V} \quad \oplus V \quad \otimes V\\ &\cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \quad\oplus\quad \mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathrm{Sym}^2 \overline{V} \quad\oplus\quad \Lambda^2 V \oplus \Lambda^2 \overline{V}\\ &\cong \underbrace{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}}_{2\cdot(0,0)} \quad\oplus\quad \underbrace{\mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathrm{Sym}^2 \overline{V}}_{(2,0)+(0,2)} \quad\oplus\quad \underbrace{\overline{V} \oplus V}_{(0,1)+(1,0)}\\ &= (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \quad\oplus\quad [\![\mathrm{Sym}^2 V]\!] \otimes \mathbb{C} \quad\oplus\quad [\![V]\!] \otimes \mathbb{C}\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.53 gilt $[\![\mathrm{Sym}^2 V]\!] \cong [\![\Lambda_0^{2,1} V]\!]$ als $SU(3)$-Darstellung, der Realteil liefert damit die Zerlegung von $\Lambda^3 T^* M$.

Die 4-Formen können nach Theorem 4.51 zerlegt werden. Nach Teil (a) gilt $\Lambda_0^4 T^* M = \{0\}$, und da Formen in $[\![\Lambda^{3,0}]\!]$ nach Proposition 4.49 immer primitiv sind liefert die Zerlegung aus dem Theorem

$$\begin{aligned}\Lambda^4 T^* M &= \Lambda_0^4 T^* M \oplus \Lambda_0^2 T^* M \wedge \omega \oplus \mathbb{R}\omega^2 = [\![\Lambda^{2,0}]\!] \wedge \omega \oplus \left[\Lambda_0^{1,1}\right] \wedge \omega \oplus \mathbb{R}\omega^2 \\ &= *([\![\Lambda^{2,0}]\!]) \oplus *(\left[\Lambda_0^{1,1}\right]) \oplus *(\mathbb{R}\omega)\end{aligned}$$

Die $*$-Identitäten im letzten Schritt ergeben sich direkt aus Proposition 4.19 und zeigen insbesondere, wie unter dem $SU(3)$-Isomorphismus $*$ die irreduziblen Komponenten von $\Lambda^2 T^* M$ auf diejenigen aus $\Lambda^4 T^* M$ abgebildet werden. Die Aussage über 5-Formen ergibt sich analog. □

Als Konsequenz dieser Zerlegung ergibt sich folgende Aufspaltung von 3- bzw. 4-Formen:

Korollar 4.57 *Die Formen $\alpha \in \Gamma\left(\Lambda^3 T^* M\right)$ und $\beta \in \Gamma\left(\Lambda^4 \in T^* M\right)$ zerlegen sich in folgende, der Zerlegung in Proposition 4.56 entsprechende, orthogonale Summanden:*

$$\begin{aligned}\alpha &= \lambda \mathcal{R}e\,\psi + \mu \mathcal{I}m\,\psi - 2Der(S)\mathcal{R}e\,\psi + \varphi \wedge \omega \\ \beta &= \sigma \wedge \omega + \rho \wedge \omega + \nu\omega^2\end{aligned}$$

Dabei sind $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ (präziser in $C^\infty(M)$), $\varphi \in \Gamma(T^* M)$, $\sigma \in [\![\Lambda^{2,0}]\!]$, $\rho \in \left[\Lambda_0^{1,1}\right]$ sowie $S \in [\![\mathrm{Sym}^{2,0}]\!] \subset End(TM)$ eindeutig durch α und β bestimmt.

Beweis Existenz, Eindeutigkeit und Orthonalität der Zerlegungen folgt aus den diskutierten Dekompositionen von $\Lambda^3 T^* M$ und $\Lambda^4 T^* M$. Die Eindeutigkeit von σ, ρ und φ folgt aus der Injektivität von $\omega\wedge$ (Theorem 4.51) auf den entsprechenden Bündeln, diejenige von S aus Proposition 4.55.
Es bleibt lediglich zu zeigen, dass die Summanden $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ punktweise von $\mathcal{R}e\,\psi$ bzw. $\mathcal{I}m\,\psi$ aufgespannt werden. Wegen $\Gamma\left(\Lambda^{3,0} T^* M\right) = \mathbb{C}(\psi)$ bildet $\{\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\}$ein $\mathbb{R}$-Basis für $[\![\Lambda^{3,0}]\!]$ und beide Basiselemente sind $SU(3)$-invariant, denn da die Gruppe auf dem komplexen Volumenelement ψ durch die Determinante operiert, gilt für $g \in SU(3)$:

$$g \cdot \mathcal{R}e\,\psi + ig \cdot \mathcal{I}m\,\psi = g \cdot \psi = det(g)\psi = \mathcal{R}e\,\psi + i\mathcal{I}m\,\psi$$

Also sind die beiden Basisvektoren invariant.

□

Bemerkung 4.58 Die Summanden aus Proposition 4.56 sind, mit Ausnahme von $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ in der Zerlegung von $\Lambda^3 T^* M$, alle $U(3)$-invariant und irreduzibel, da sie diese Eigenschaft sogar bzgl. $SU(3)$ aufweisen. Als $U(3)$-Darstellung zerfällt $[\![\Lambda^{3,0}]\!]$ nicht in zwei triviale Summanden, denn unter der Wirkung von $J \in SO(6) \cap GL(3, \mathbb{C}) = U(3)$ wird $\mathcal{R}e\,\psi$ nach Proposition

4.14 $\mathcal{R}e\,\psi$ auf $\mathcal{I}m\,\psi$ abgebildet, d.h. die zweidimensionale Darstellung ist irreduzibel bzgl. der Gruppe $U(3)$. Damit folgt zudem $J \notin SU(3)$, dies ist auch direkt aus $\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(J) = 3i$ ersichtlich. Die Reduktion der Strukturgruppe von $U(3)$ auf $SU(3)$ durch Wahl eines komplexen Volumenelements führt also zu einer Aufspaltung einiger $U(3)$-Darstellungen, die direkt durch ψ beschrieben wird, da $\mathcal{R}e\,\psi$ und $\mathcal{I}m\,\psi$ die Unterräume charakterisieren.

5 Torsionsklassifizierung von SU(3)-Strukturen

5.1 Irreduzible Komponenten der intrinsischen Torsion

Sei im Folgenden (M, g, J, ψ) eine speziell fast-hermitesche Mannigfaltigkeit. Die intrinsische Torsion der $SU(3)$-Struktur ist nach Proposition 3.24 und (3.5) durch einen Tensor $\tau \in \Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^\perp$ festgelegt. Mit der üblichen Operation

$$g \cdot (\phi \otimes x) = (g \cdot \phi) \otimes (g \cdot x) = \left(\phi \circ g^{-1}\right) \otimes Ad_g(x)$$

wird dieser Raum zu einem reduziblen $SU(3)$-Modul, dessen Zerlegung in irreduzible Komponenten im Folgenden beschrieben wird. Dabei werden die auftretenden irreduziblen Summanden mit $\mathcal{W}_i$ und die resultierenden Projektionen mit $\mathcal{P}_i : \Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^\perp \twoheadrightarrow \mathcal{W}_i$ bezeichnet.

Die Zerlegung der intrinsischen Torsion einer $U(3)$-Struktur wurde erstmals in [26] diskutiert. Bei weiterer Reduktion der Strukturgruppe auf $SU(3)$ wurde in [9] gezeigt, dass weitere Aufspaltungen und eine neuer Summand auftreten. Eine umfangreichere Diskussion dieser Fragestellung wird in [6] gegeben. Die im Folgenden entwickelte Zerlegung unterscheidet sich von den beiden genannten vor allem durch die Aufspaltung des Torsionsanteils in $\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^\perp$. Dieser Raum ist als $SU(3)$-Darstellung äquivalent zu $End(TM)$ dessen Dekomposition mit den Verfahren aus Abschnitt 4.3 durchgeführt wird.

Im Verlauf dieses Abschnitts wird die explizite Beschreibung der Zerlegung von $\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^\perp$ im wesentlichen auf die Aufspaltungen von $End(TM)$ zurückgeführt. Dafür werden folgende beiden Zerlegungen benötigt:

Lemma 5.1 *$End(TM)$ zerfällt in symmetrische und schiefsymmetrische Endomorphismen : $End(TM) = End(TM)^+ \oplus End(TM)^-$. Die Projektionen auf die beiden Anteile haben für $A \in End(TM)$ die Form*

$$A^\pm = \frac{1}{2}\left(A \pm A^t\right)$$

Lemma 5.2 *$End(TM)$ zerfällt in $\mathbb{C}$-lineare (d.h mit J kommutierende) und $\mathbb{C}$-antilineare (d.h mit J antikommutierende) Endomorphismen, $End(TM) = End(TM)^{J+} \oplus End(TM)^{J-}$. Die Projektionen auf die beiden Anteile haben für $A \in End(TM)$ die Form*

$$A^{J\pm} = \frac{1}{2}\left(A \mp JAJ\right)$$

Beweis Wegen $J(A \pm JAJ) = -JAJ^2 \mp AJ = \mp(A \pm JAJ)J$ (anti)kommutiert $A^{J\pm}$ mit J. Für $A \in End^{J\pm}(TM)$ gilt zudem $A - JAJ = A \mp J^2 A = A \pm A$ und folglich ist die angegebene Abbildung Projektor auf $End^{J+}(TM)$. Analoges gilt für die zweite Abbildung.

□

Bemerkung 5.3 Mit $TM \otimes \mathbb{C} = TM^{1,0} \oplus TM^{0,1}$ und analog für T^*M schreiben sich unter der Identifizierung $End_{\mathbb{C}}(TM \otimes \mathbb{C}) \cong (TM \otimes \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (T^*M \otimes \mathbb{C})$ diese komplexen Endomorphismen als

$$\begin{aligned} End_{\mathbb{C}}(TM \otimes \mathbb{C}) &\cong \left(TM^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} T^*M^{1,0} \oplus \overline{TM^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} T^*M^{1,0}}\right) \\ &\quad \oplus \left(TM^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} T^*M^{0,1} \oplus \overline{TM^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} T^*M^{0,1}}\right) \\ &= [\![TM^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} T^*M^{1,0}]\!] \otimes \mathbb{C} \ \oplus \ [\![TM^{1,0} \otimes_{\mathbb{C}} T^*M^{0,1}]\!] \otimes \mathbb{C} \end{aligned}$$

Aus dieser Zerlegung und der Wirkung von J auf $TM^{1,0}, TM^{0,1}$ ist ebenfalls direkt ersichtlich, dass die beiden Summanden die Komplexifizierungen des $\mathbb{C}$-linearen bzw. des $\mathbb{C}$-antilinearen Anteils in $End(TM)$ darstellen.

Auf den schiefsymmetrischen Endomorphismen End^-TM sei im Folgenden das Skalarprodukt gewählt, das dort von $\Lambda^2 TM$ nach der Identifizierung $TM \cong TM^*$ induziert wird. Es unterscheidet sich gerade um den Faktor 2 von dem üblichen, durch die Spur definierten Skalarprodukt, also

$$\langle X, Y \rangle_{\Lambda^2} = \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_{End} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X \circ Y^t) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(X \circ Y)$$

Die folgenden Eigenschaften des Produktes auf $End(TM)$ übertragen sich daher direkt:

Lemma 5.4

(a) Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{End}$ ist $SU(3)$-invariant.

(b) Die Abbildungen $End(TM) \longrightarrow End(TM)$ definiert durch $F \mapsto J \circ F$ und $F \mapsto F \circ J$ sind orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{End}$.

(c) Die Zerlegungen aus Lemma 5.1 und Lemma 5.2 sind orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{End}$.

Beweis

Für $U \in SU(3)$ ergibt sich (a) direkt aus Zyklizität der Spur:

$$\langle U \cdot X, U \cdot Y \rangle_{End} = \operatorname{tr}(UXU^{-1}UY^tU^t) = \operatorname{tr}(XY^t) = \langle X, YY \rangle_{End}$$

Mit $J^t = -J$ folgt (b) ganz analog:

$$\langle JX, JY \rangle_{End} = \operatorname{tr}(JXY^t(-J)) = \operatorname{tr}(XY^t) = \langle X, Y \rangle_{End}$$

Für $X \in End^+, Y \in End^-$ folgt die Orthogonalität in (c) aus

$$-\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(XY^t) = \operatorname{tr}((XY^t)^t) = \operatorname{tr}(YX^t) = \operatorname{tr}(XY)$$

Die zweite Orthogonalität ergibt sich unter Verwendung von (b) durch Einsetzen von Endomorphismen $X \in End^{J+}, Y \in End^{J-}$:

$$\langle X, Y \rangle_{End} = \langle JX, JY \rangle_{End} = \langle XJ, -YJ \rangle_{End} = -\langle X, Y \rangle_{End}$$

□

Aus der Zerlegung $\mathfrak{u}_3 \cong \mathfrak{su}_3 \oplus \mathbb{R}$ folgt $\mathfrak{su}_3^\perp \cong \mathfrak{u}_3^\perp \oplus \mathbb{R}$. Der $\mathbb{R}$-Summand dieser Zerlegung ist wegen $\mathfrak{su}_3 = \{A \in \mathfrak{u}_3 \,|\, \mathrm{tr}_{\mathbb{C}^3} A = 0\}$ durch den Spuranteil definiert, wobei $\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}$ die Spur auf $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3) \subset End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^6)$ bezeichnet. Die hier relevante Darstellung zerlegt sich damit in

$$\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^\perp \cong \Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^\perp \oplus T^*M =: \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}_5$$

Die Projektion auf die so definierte $\mathcal{W}_5$-Komponente kann explizit angegeben werden, sie erfolgt analog zu [6]:

Proposition 5.5 *Mit der Form $\alpha \in \Lambda^1(\mathfrak{su}_3^\perp)^*$, $\alpha(F) := -1/6\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(JF)$ gilt:*

$$\begin{array}{cccccc} \mathcal{P}_5: & \Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^\perp & \longrightarrow & \Lambda^1 T^*M \otimes \mathbb{R}J & \cong & \Lambda^1 T^*M \\ & \varphi \otimes F & \mapsto & \varphi \otimes \alpha(F) J & \cong & \varphi\alpha(F) \end{array}$$

Aufgefasst als Abbildung $\Gamma(TM) \longrightarrow \mathbb{R}J \cong \mathbb{R}$ schreibt sich die $\mathcal{W}_5$-Komponente damit als

$$X \mapsto \alpha(\tau(X))J \cong \alpha(\tau(X))$$

Zum Beweis dieser Proposition wird die folgende Relation zwischen reellen und komplexen Spuren benötigt, die auf der Identifizierung $\mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6$, fixiert durch die Wahl der Basen $\{F_\alpha\}$ bzw. $\{E_i\}$ in (4.9) , beruht:

Lemma 5.6 *Sei $End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$ gemäß der genannten Identifizierung in $End(\mathbb{R}^6)$ eingebettet, $J \in End(\mathbb{R}^6)$ die auf $\mathbb{R}^6$ induzierte fast-komplexe Struktur und seien mit $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}$ die Spur auf diesen Räumen bezeichnet, dann gilt:*

$$2\mathcal{R}e\,\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(F) = \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(F) \qquad -2\mathcal{I}m\,\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(F) = \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(JF)$$

Beweis Für $S \in End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3) \subset End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^6)$ resultiert aus (4.9) und den weiteren dort angegebenen Identitäten:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(S) &= \sum_\alpha d\overline{F}_\alpha(SF_\alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_\alpha \Big(dE_{2\alpha-1}(SE_{2\alpha-1}) + dE_{2\alpha}(SE_{2\alpha})\Big) + \tfrac{i}{2}\sum_\alpha \Big(dE_{2\alpha}(SE_{2\alpha-1}) - dE_{2\alpha-1}(SE_{2\alpha})\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_i dE_i(SE_i) + \tfrac{i}{2}\sum_i dE_i(SJE_i) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(S) - \tfrac{i}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(JS) \end{aligned}$$

Daraus folgen beide Identitäten.

□

Beweis von Proposition 5.5 Zu zeigen ist nur, dass $\alpha \otimes J$ auf den Spuranteil im Sinne komplexer Endomorphismen projiziert. Für $F = A + iB$ schiefhermitesch gilt $\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(F) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(iB) = \mathcal{I}m\,\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(F) \cdot i$, damit ist der Spuranteil von F gegeben durch

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(F) \otimes \mathbb{1} = \frac{1}{dim_{\mathbb{C}} V} \mathcal{I}m\,\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(F) \otimes (i\mathbb{1})$$

Mit der Projektion aus Lemma 5.2 auf den $\mathbb{C}$-linearen Anteil von $F \in \mathfrak{su}_3^{\perp}$, der Umformulierung der Spur aus Lemma 5.6 und $i\mathbb{1} = J$ ergibt sich für $dim_{\mathbb{C}} V = 3$

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}(F^{J+}) \otimes \mathbb{1} = -\frac{1}{6}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(JF^{J+}) \otimes J = -\frac{1}{6}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}\left(J\frac{1}{2}(F - JFJ)\right) \otimes J = -\frac{1}{6}\,\mathrm{tr}(JF) \otimes J$$

Folglich ist $\alpha(X) \otimes J$ gerade der komplexe Spuranteil von $X \in \mathfrak{su}_3^{\perp}$.

□

Nach Abspaltung der $\mathcal{W}_5$-Komponente von $\tau \in \Gamma\left(\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^{\perp}\right)$ genügt es, den verbleibenden Anteil $\tau - \mathcal{P}_5(\tau) \in \Gamma\left(\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^{\perp}\right)$ zu zerlegen. Dies erweist sich einfacher in der zu $\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^{\perp}$ isomorphen Darstellung $End(TM)$. Im Folgenden wird die durch g induzierte Identifizierung $TM \cong T^*M$ verwendet, sie impliziert $End(TM) \cong TM \otimes TM$ sowie $\mathfrak{so}(M) \cong \Lambda^2 TM$.

Proposition 5.7 *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} [\cdot]^{\psi} : End(TM) & \longrightarrow & \Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^{\perp} \\ B & \mapsto & [B]^{\psi} = (X \mapsto [B]^{\psi}_X \ := \ {}^{\flat}\mathcal{R}e\,\psi(BX, \cdot, \cdot)) \end{array}$$

die eindeutig durch die Bedingung

$$g([B]^{\psi}_X\, Y, Z) = \mathcal{R}e\,\psi(BX, Y, Z) \text{ für } X, Y, Z \in \Gamma(TM) \tag{5.1}$$

bestimmt wird, ist ein $SU(3)$-äquivarianter Isomorphismus von Vektorbündeln, d.h. es existiert eine Isomorphie von $SU(3)$-Darstellungen $End(TM) \cong \Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^{\perp}(TM)$.

Beweis

- *Wohldefiniertheit:* Die Lie-Algebra $\mathfrak{u}_3$ besteht genau aus den Elementen aus $\mathfrak{so}_6$, die mit J kommutieren. Nach Lemma 5.4 ist die Zerlegung in $\mathbb{C}$-linearen und $\mathbb{C}$-antilinearen Anteil orthogonal, daher gilt $\mathfrak{u}_3^{\perp} = \{X \in \mathfrak{so}_6 \,|\{X, J\} = 0\}$. Da für $B \in End(TM)$ das Bild $[B]^{\psi}$ nach (5.1) schiefsymmetrisch ist, ergibt sich die Wohldefiniertheit direkt aus

$$\begin{aligned} g([B]^{\psi}_X\, JY, Z) &= \mathcal{R}e\,\psi(BX, JY, Z) = \mathcal{R}e\,\psi(BX, Y, JZ) = g([B]^{\psi}_X\, Y, JZ) \\ &= g(J\,[B]^{\psi}_X\, Y, J^2 Z) = -g(J\,[B]^{\psi}_X\, Y, Z) \end{aligned}$$

  denn damit antikommutiert $[B]^{\psi}$ mit J.

- *Bijektivität:* Es genügt zu zeigen, dass $[\cdot]^\psi$ faserweise bijektiv ist. Nach Lemma 4.9 (a) und (5.1) gilt für $[B]^\psi = 0$

$$\begin{aligned} BX &= 2\sum_{\sigma\in S_3^+}\big(\mathcal{R}e\,\psi(BX,\overline{F}_{\sigma_1},\overline{F}_{\sigma_2})\overline{F}_{\sigma_3} + \mathcal{R}e\,\psi(BX,F_{\sigma_1},F_{\sigma_2})F_{\sigma_3}\big) \\ &= 2\sum_{\sigma\in S_3^+}\Big(g([B]^\psi_X\,\overline{F}_{\sigma_1},\overline{F}_{\sigma_2})\overline{F}_{\sigma_3} + g([B]^\psi_X\,F_{\sigma_1},F_{\sigma_2})F_{\sigma_3}\Big) = 0 \end{aligned}$$

  d.h. $[\cdot]^\psi$ ist injektiv. Da $\dim\mathfrak{u}_3^\perp = \dim\mathfrak{so}_6 - \dim\mathfrak{u}_3 = 6$ und damit für die Dimensionen $\dim End(T_mM) = \dim T^*_mM\cdot\dim\mathfrak{u}_3^\perp$ gilt, folgt bereits faserweise Isomorphie.

- *Äquivarianz:* Auf $End(TM)\supset\mathfrak{u}_3^\perp$ operiert $SU(3)$ durch adjungiert Wirkung, d.h. $U\cdot B = U\circ B\circ U^{-1}$. Aus der $SU(3)$-Invarianz von ψ sowie $SU(3)\subset SO(6)$ ergibt sich direkt:

$$\begin{aligned} g([U\cdot B]^\psi_X\,Y,Z) &= g(\big[UBU^{-1}\big]^\psi_X\,Y,Z) = \mathcal{R}e\,\psi(UBU^{-1}X,Y,Z) \\ &= (U^{-1}\cdot\mathcal{R}e\,\psi)(BU^{-1}X,U^{-1}Y,U^{-1}Z) \\ &= \mathcal{R}e\,\psi(BU^{-1}X,U^{-1}Y,U^{-1}Z) \\ &= g([B]^\psi_{U^{-1}X}\,U^{-1}Y,U^{-1}Z) = g(U\,[B]^\psi_{U^{-1}X}\,U^{-1}Y,Z) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow [U\cdot B]^\psi_X = U\circ[B]^\psi_{U^{-1}X}\circ U^{-1} = U\cdot\Big([B]^\psi_X\Big)$$

$\square$

Es bleibt die Zerlegung von $End(TM)$ in irreduzible Komponenten anzugeben. Dazu wird zunächst hinsichtlich der Merkmale $\mathbb{C}$-(anti)linear sowie (schief)symmetrisch unterteilt und anschließend in den $\mathbb{C}$-linearen Summanden noch ein Spuranteil abgespalten.

Proposition 5.8 *Die in nachfolgender Tabelle (in Klammern die Dimensionen) angegebene Aufspaltung von $End(TM)$ ist $SU(3)$-irreduzibel.*

	$End^{J+}(TM)$	End^{J-}
$End^+(TM)$	$\mathbb{R}\mathbb{1}\oplus J\mathfrak{su}_3(M)$ (1+8)	$[\![\mathrm{Sym}^2(TM^{1,0})]\!]$ (12)
$End^-(TM)$	$\mathbb{R}J\oplus\mathfrak{su}_3$ (1+8)	TM (6)

Beweis Die Komponenten in den 4 Kästen der Tabelle sind nach Lemma 5.4 orthogonal bzgl. des $SU(3)$-invarianten Produktes auf Λ^2TM und damit selbst invariant. Die $\mathbb{C}$-linearen, schiefsymmetrischen Endomorphismen sind genau $\mathfrak{u}_3\subset\mathfrak{so}_6$, nach Abspaltung der Spur resultiert die $SU(3)$-Zerlegung im linken unteren Eintrag. Die Zerlegung links oben kann durch Multiplikation mit J auf die darunter zurückgeführt werden da sich aus

$F \in End^+(TM) \cap End^{J+}(TM)$ direkt $JF \in End^-(TM) \cap End^{J+}(TM)$ ergibt.

Die Irreduzibilität wird mit den Verfahren aus Kapitel 4.2 nachgewiesen, die direkt auf die adjungierte Wirkung auf $End(TM)$ bzw. $End(TM) \otimes \mathbb{C}$ angewendet werden können. Mit der Abkürzung $V := TM^{1,0}$ folgt unmittelbar $V \cong T^*M^{0,1}$ (als $\mathbb{C}$-Darstellung) sowie $\overline{V} \cong TM^{0,1} \cong T^*M^{1,0}$. Die Komplexifizierung liefert:

$$\begin{aligned} End(TM) \otimes \mathbb{C} &\cong (TM \otimes \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (TM \otimes \mathbb{C})^* \cong \left(V \oplus \overline{V}\right) \otimes_{\mathbb{C}} \left(\overline{V} \oplus V\right) \\ &\cong \left[V \otimes_{\mathbb{C}} V \oplus \overline{V} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{V}\right] \oplus \left[V \otimes_{\mathbb{C}} \overline{V} \oplus \overline{V} \otimes_{\mathbb{C}} V\right] \qquad (5.2) \\ &\cong (\mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathrm{Sym}^2 \overline{V}) \oplus (\Lambda^2 V \oplus \Lambda^2 \overline{V}) \oplus End(V) \oplus End(V) \\ &\cong \underbrace{(\mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathrm{Sym}^2 \overline{V})}_{(2,0)+(0,2)} \oplus \underbrace{(\overline{V} \oplus V)}_{(0,1)+(1,0)} \oplus \underbrace{(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})}_{2\cdot(0,0)} \oplus \underbrace{(\mathfrak{sl}_3\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sl}_3\mathbb{C})}_{2\cdot(1,1)} \qquad (5.3) \end{aligned}$$

Dabei wurde die Zerlegung $V \otimes V \cong \mathrm{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V$, Beispiel 4.39 sowie der Isomorphismus $\Lambda^2 V \cong \overline{V}$ benutzt. Bei den Summanden handelt es sich um die irreduzible Darstellungen zu den darunter angegebenen höchsten Gewichten, die in Kapitel 4.37 beschrieben wurden. Nach Proposition 4.41 sind die ersten vier Summanden komplex und paarweise zueinander konjugiert, die letzten 4 Summanden reell. Aus Proposition 4.28 folgt daher die Zerlegung von $End(TM)$ in reell-irreduzible $SU(3)$-Darstellungen:

$$\begin{aligned} End(TM) &= \mathcal{Re}\,(End(TM) \otimes \mathbb{C}) \\ &= [\![\mathrm{Sym}^2(TM^{1,0})]\!] \oplus [\![TM^{1,0}]\!] \oplus [TM^{1,0}] \oplus [TM^{1,0}] \oplus [\mathbb{C}] \oplus [\mathbb{C}] \\ &\cong [\![\mathrm{Sym}^2(TM^{1,0})]\!] \oplus TM \oplus \mathfrak{su}_3 \oplus \mathfrak{su}_3 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \qquad (5.4) \end{aligned}$$

Die Aufspaltung aus (5.2) in 2 Summanden entspricht der Aufspaltung hinsichtlich $\mathbb{C}$-Linearität. Elemente aus dem ersten Summanden, $V \otimes V \cong TM^{1,0} \otimes T^*M^{0,1}$, antikommutieren dabei offenbar mit J, die aus $V \otimes \overline{V} \cong TM^{1,0} \otimes T^*M^{1,0}$ kommutieren mit ihm. Die ersten beiden Summanden aus (5.3) bzw. (5.4) entsprechen also der ersten Spalte der Tabelle, die restlichen der zweiten. Dabei entspricht $[\![\mathrm{Sym}^2 TM^{1,0}]\!]$ symmetrischen und $[\![TM^{1,0}]\!] \cong [\![\Lambda^2 TM^{0,1}]\!]$ antisymmetrischen Endomorphismen. Damit sind alle Bestandteile identifiziert und die Dimensionen folgen direkt aus Korollar 4.38.

□

Aufbauend auf die vorangegangene Diskussion können nun die zu Anfang des Kapitels eingeführten Summanden $\mathcal{W}_i$ sowie die zugehörigen Projektoren $\mathcal{P}_i$ konkret angegeben werden:

Definition 5.9 *Die irreduziblen Komponenten der intrinsischen Torsion in* $\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^\perp$ *werden wie folgt bezeichnet:*

	$End^{J+}(TM)$			$End^{J-}(TM)$		
$End^+(TM)$	$\mathcal{W}_1^+ \oplus \mathcal{W}_2^+$	$=$	$\mathbb{R}\mathbb{I} \oplus J\mathfrak{su}_3$	$\mathcal{W}_3$	$=$	$[\![\mathrm{Sym}^2(TM^{1,0})]\!]$
$End^-(TM)$	$\mathcal{W}_1^- \oplus \mathcal{W}_2^-$	$=$	$\mathbb{R}J \oplus \mathfrak{su}_3$	$\mathcal{W}_4$	$=$	TM

Die zusätzliche Komponente in $\mathfrak{su}_3^\perp$ lautet

$$\boxed{\mathcal{W}_5 = T^*M}$$

Aus der Beschreibung in Proposition 5.7 und Lemma 5.1, 5.2 ergibt sich schließlich die explizite Form der Projektoren. Bezeichnet $A_\tau \in End(TM)$ im Folgenden den für $\tau \in \Gamma\left(\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^\perp\right)$ eindeutig durch $[A_\tau]^\psi = \tau$ bestimmten Endomorphismus, so ergibt sich:

Proposition 5.10 *Für die Projektionen $\mathcal{P}_i : \Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^\perp \longrightarrow \mathcal{W}_i$ gilt:*

$$\begin{array}{rclrcl}
\mathcal{P}_1^+(\tau) & = & +\frac{1}{6}\operatorname{tr}(A_\tau)\mathbb{1} & \mathcal{P}_2^+(\tau) & = & A_\tau^{+,J+} - \frac{1}{6}\operatorname{tr}(A_\tau)\mathbb{1} \\
\mathcal{P}_1^-(\tau) & = & -\frac{1}{6}\operatorname{tr}(JA_\tau)J & \mathcal{P}_2^-(\tau) & = & A_\tau^{-,J+} + \frac{1}{6}\operatorname{tr}(JA_\tau)J \\
\mathcal{P}_3(\tau) & = & A_\tau^{+,J-} & & & \\
\mathcal{P}_4(\tau) & = & A_\tau^{-,J-} & & & \\
\mathcal{P}_5(\tau) & = & -\frac{1}{6}\operatorname{tr}(J\tau) = \alpha(\tau) & & &
\end{array}$$

Beweis Zu beweisen ist nur explizite Form der Zerlegung $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_1^+ \oplus \mathcal{W}_1^-$, also der Koeffizient vor $\mathbb{1}$ bzw. J. Nach Proposition 5.8 gilt allgemein $A_\tau^{+,J+} = \alpha\mathbb{1} + Jx$ sowie $JA_\tau^{-,J+} = -\beta\mathbb{1} + Jy$ (nach Multiplikation mit J) für geeignete $x, y \in \mathfrak{su}_3$. Spurbildung liefert mit Lemma 5.6 im ersten Fall

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(A^{+,J+}) = 6\alpha + \operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(Jx) = 6\alpha - 2\mathcal{I}m\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(x) = 6\alpha$$

und im zweiten Fall völlig analog $\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(JA_\tau^{-,J+}) = -6\beta$. Für die weitere Vereinfachung werden zwei Spuridentitäten benötigt. Neben den schiefen sind auch die Endomorphismen $F \in End(TM)^{J-}$ stets spurfrei, denn es gilt:

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(F) = -\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(FJ^2) = \operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(JFJ) = \operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(FJ^2) = -\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(F)$$

Für $F^{\pm,J+}$ folgt aus dem Kommutieren mit J desweiteren $JF^{\pm,J+} \in End(TM)^{\mp,J+}$ und mit $F^{J\pm}$ liegt auch $JF^{J\pm}$ in $End(TM)^{J\pm}$. Zerlegung von $F \in End(TM)$ in die 4 Anteile führt damit auf die beiden Identitäten

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(JF) = \operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(JF^{-,J+}) \qquad \operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(F) = \operatorname{tr}_{\mathbb{R}}(F^{+,J+}) \tag{5.5}$$

Es folgen die angegebenen Formeln für die Torsionskomponenten.

□

Damit ist eine vollständige Zerlegung der intrinsischen Torsion gegeben. Das Verschwinden von einem oder mehrerer dieser Anteile übersetzt sich in Eigenschaften der geometrischen Objekte, die die Reduktion der Strukturgruppe definieren, i.e. der Kählerform ω und der komplexen Volumenform ψ bzw. deren Real- und Imaginärteil. Dies wird in den nächsten

Abschnitten diskutiert.

Durch J wird eine fast-komplexe Struktur auf $End(TM)$ und auf $\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^\perp$ induziert. Diese sind mit dem Isomorphismus $[\cdot]^\psi$ verträglich:

Proposition 5.11

(a) Durch $B \mapsto J \circ B$ wird eine fast-komplexe Struktur auf $End(TM)$ definiert.

(b) Durch $\varphi \otimes F \mapsto \varphi \otimes (F \circ J)$ wird eine fast-komplexe Struktur auf $\Lambda^1 T^*M \otimes u_3^\perp$ definiert.

(c) $[\cdot]^\psi$ ist Intertwiner der Strukturen aus (a) und (b): $\quad [J \circ B]^\psi = [B]^\psi \circ J$

Beweis Die Abbildung in (a) quadriert offenbar zu $-\mathbb{1}_{End}$ und ist nach Lemma 5.4 orthogonal. Wie im Beweis zu Proposition 5.7 ergibt sich, dass $FJ \in \mathfrak{u}_3^\perp$ falls $F \in \mathfrak{u}_3^\perp$. Damit wird in (b) ganz analog zu (a) eine fast-komplexe Struktur definiert. Teil (c) folgt direkt aus der Rechnung

$$g([JB]^\psi_X Y, Z) = \mathcal{R}e\,\psi(JBX, Y, Z) = \mathcal{R}e\,\psi(BX, JY, Z) = g([B]^\psi_X JY, Z)$$

$\square$

5.2 Formendarstellung der intrinsischen Torsion

Eine Charakterisierung der irreduziblen Komponenten der intrinsischen Torsion von ∇ durch Anteile der Formen $d\mathcal{R}e\,\psi$, $d\mathcal{I}m\,\psi$ und $d\omega$ wurde in [9] gegeben. Aufbauend auf die hier entwickelte Torsionszerlegung werden die genannten Formen in Abhängigkeit von der intrinsischen Torsion berechnet. Vergleich mit dem bekannten Ergebnis zeigt ein abweichendes Resultat für die Form $(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1}$ und die $\mathcal{W}_5$-Komponente, das aber für die später diskutierten halbflachen Geometrien allerdings nicht relevant ist.

Ausgangspunkt ist die Darstellung des Differentials bzw. des Kodifferentials einer k-Form durch den Levi-Civita-Zusammenhang ∇, die im ersten Fall einfach durch seine Antisymmetrisierung gegeben ist:

Lemma 5.12 *Für einen lokalen, orthonormalen Rahmen $\{E_i\}$ von $TM \cong T^*M$ gilt*

$$d = \sum_i dE_i \wedge \nabla_{E_i} \qquad\qquad \delta = -(-1)^{nk} * d* = -\sum_i E_i \lrcorner \nabla_{E_i}$$

wobei gilt: $\quad d : \Gamma\left(\Lambda^k T^*M\right) \longrightarrow \Gamma\left(\Lambda^{k+1} T^*M\right)$ *und* $\delta : \Gamma\left(\Lambda^{k+1} T^*M\right) \longrightarrow \Gamma\left(\Lambda^k T^*M\right)$.

Diese Aussagen können direkt in geeigneten Koordinaten (etwa riemannsche Normalkoordinaten) unter Verwendung der Torsionsfreiheit des Zusammenhangs, also $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, durch Nachrechnen der Axiome der äußere Ableitung verifiziert werden. Sie resultieren aber eleganter aus der folgenden Aussage

Lemma 5.13 *Sei ∇ ein torsionsfreier Zusammenhang auf TM und werde der induzierte Zusammenhang auf $\Lambda^k T^*M$ ebenfalls mit ∇ bezeichnet, dann gilt für $\alpha \in \Gamma\left(\Lambda^k T^*M\right)$:*

$$d\alpha(X_0,\ldots,X_k) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^k \left(\nabla_{X_l}\alpha\right)(X_0,\ldots,\widehat{X_l},\ldots,X_k)$$

Beweis Die Lieklammer zweier Vektorfelder berechnet sich wegen der Torsionsfreiheit von ∇ und Definition 3.16 nach $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Mit der Darstellung der äußeren Ableitung einer Form durch die Lieklammer der eingesetzten Vektorfelder (siehe [47] Proposition 2.25), die im ersten Schritt der folgenden Rechnung verwendet wird, ergibt sich :

$$\begin{aligned}
d\alpha(X_0,\ldots,X_k) &= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l X_l \alpha(X_0,\ldots,\widehat{X_l},\ldots,X_k) \\
&\quad + \sum_{l<m} (-1)^{l+m} \alpha([X_l,X_m],X_0,\ldots,\widehat{X_l},\ldots,\widehat{X_m},\ldots,X_k) \\
&= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l X_l \alpha(X_0,\ldots,\widehat{X_l},\ldots,X_k) \\
&\quad - \sum_{l<m} (-1)^l \alpha(X_0,\ldots,\widehat{X_l},\ldots,\nabla_{X_l}X_m,\ldots,X_k) \\
&\quad - \sum_{l>m} (-1)^l \alpha(X_0,\ldots,\nabla_{X_l}X_m,\ldots,\widehat{X_l},\ldots,X_k) \\
&= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \left(\nabla_{X_l}\alpha\right)(X_0,\ldots,\widehat{X_l},\ldots,X_k)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wird lediglich die Definition des Zusammenhangs auf Formen aus (3.2) eingesetzt.

□

Beweis von Lemma 5.12 Die erste Formel ergibt sich unmittelbar aus dem vorangehenden Lemma, denn Einsetzen in das $\wedge$ -Produkt liefert

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i dE_i \wedge \nabla_{E_i}\alpha\right)(X_0,\ldots,X_k) &= \sum_{l=0}^{k}\sum_i (-1)^l dE_i(X_l)\left(\nabla_{E_i}\alpha\right)(X_0,\ldots,\widehat{X_l},\ldots,X_k) \\
&= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \left(\nabla_{X_l}\alpha\right)(X_0,\ldots,\widehat{X_l},\ldots,X_k)
\end{aligned}$$

Die zweite Identität folgt aus den den Rechenregeln in (4.5) durch Überprüfung des korrekten Vorzeichens unter Ausnutzung der Tatsache, dass ∇ und $*$ vertauschen. Letzteres folgt aus der $SO(n)$-Invarianz von $*$ und Theorem 3.19, denn als metrischer Zusammenhang ist ∇ ein

$O(n)$-Zusammenhang, wegen $\mathfrak{o}_n \cong \mathfrak{so}_n$ also auch $SO(n)$-Zusammenhang. Die Invarianz von $*$, i.e. $(g\cdot) * (g^{-1}\cdot) = *$ für $g \in SO(n)$, ergibt sich dabei wie folgt:

$$\begin{aligned}\alpha \wedge (g \cdot *g^{-1} \cdot g\beta) &= g \cdot ((g^{-1} \cdot \alpha) \wedge *(g^{-1} \cdot g\beta)) = \left\langle g^{-1} \cdot \alpha, g^{-1} \cdot \beta \right\rangle g \cdot vol \\ &= \langle \alpha, \beta \rangle \det(g) vol = \alpha \wedge *\beta\end{aligned}$$

Da $\wedge$ nicht-entartet ist, folgt $(g\cdot) * (g^{-1}\cdot)\beta = *\beta$.

□

Durch die Beziehung $\nabla = \widetilde{\nabla} - \tau$ zwischen intrinsischer Torsion τ, Levi-Civita-Zusammenhang und dem minimalen $SU(3)$-Zusammenhang $\widetilde{\nabla}$ sowie der Darstellung der äußeren Ableitung in Lemma 5.12 ergibt sich eine Verknüpfung zwischen $d\mathcal{R}e\,\psi$ bzw. $d\omega$ und τ. Dem Vorgehen in Kapitel 5 folgend, erfolgt mit $X \in \Gamma(TM)$ zunächst die Aufspaltung in die Summanden $\mathfrak{u}_3^\perp \oplus \mathbb{R}$:

$$\tau(X) = \underbrace{\tau(X) - \mathcal{P}_5(\tau)(X)}_{\in\, \mathfrak{u}_3^\perp} + \mathcal{P}_5(\tau)(X) = [A]^\psi_X + \alpha(\tau(X))J$$

Der Endomorphismus A ist dabei eindeutig durch τ bestimmt. Im Folgenden wird für fixierte intrinsische Torsion kurz $\alpha(X) := \alpha(\tau(X))$ geschrieben.

Proposition 5.14 *Für die kovarianten Ableitungen von $J, \omega, \mathcal{R}e\,\psi$ und $\mathcal{I}m\,\psi$ gilt:*

(a) $$\nabla_X J = [J, [A]^\psi_X] = -2\,[JA]^\psi_X$$

(b) $$\nabla_X \omega = 2(JAX) \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi = 2(AX) \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi$$

(c) $$\nabla_X \mathcal{R}e\,\psi = 3\alpha(X)\mathcal{I}m\,\psi + \sum_i \mathcal{R}e\,\psi(E_i, AX, \cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i, \cdot, \cdot)$$

(d) $$\nabla_X \mathcal{I}m\,\psi = -3\alpha(X)\mathcal{R}e\,\psi - \sum_i \mathcal{R}e\,\psi(E_i, JAX, \cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i, \cdot, \cdot)$$

Dabei ist $\{E_i\}$ die anfangs festgelegte reelle Orthonormalbasis.

Zum Beweis der Aussagen (c) und (d), die die Orthonormalbasis $\{E_i\}$ involvieren, wird folgendes algebraische Lemma benötigt:

Lemma 5.15 *Sei $F \in End(TM)$, dann gilt mit der Abbildung $[\,\cdot\,]^\psi$ aus Proposition 5.7 :*

$$\begin{aligned}Der([F]^\psi_X)\mathcal{R}e\,\psi &= -\sum_i \mathcal{R}e\,\psi(E_i, FX, \cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i, \cdot, \cdot) \\ Der([F]^\psi_X)\mathcal{I}m\,\psi &= +\sum_i \mathcal{R}e\,\psi(E_i, JFX, \cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i, \cdot, \cdot)\end{aligned}$$

Beweis Expansion eines schiefen Endomorphismus $S \in End^-(TM)$ in der gewählten Orthonormalbasis liefert $S = \sum_i g(E_i, S\cdot)E_i = -\sum_i g(SE_i, \cdot)E_i$. Dies angewendet auf $[F]^\psi_X$

ergibt

$$\begin{aligned} Der([F]_X^{\psi})\mathcal{R}e\,\psi &= -\sum_i Der(g([F]_X^{\psi}\,E_i,\cdot)E_i)\mathcal{R}e\,\psi = -\sum_i Der(\mathcal{R}e\,\psi(FX,E_i,\cdot)E_i)\mathcal{R}e\,\psi \\ &= \sum_{ij} dE_j \wedge \mathcal{R}e\,\psi(FX,E_i,E_j)E_i \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi = \sum_i \mathcal{R}e\,\psi(FX,E_i,\cdot)\wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) \end{aligned}$$

Nach Vertauschen der beiden Einträge in den Formen $\mathcal{R}e\,\psi(FX,E_i,\cdot)$ entfällt das globale Vorzeichen und es verbleibt genau die im Lemma angegeben Summe über die $\wedge$-Produkte. Dies zeigt die erste Identität. Unter Verwendung von Proposition 4.14 (b) ergibt sich daraus auch die zweite :

$$\begin{aligned} Der([F]_X^{\psi})\mathcal{I}m\,\psi &= Der([F]_X^{\psi})(J\cdot \mathcal{R}e\,\psi) = -J\cdot Der([F]_X^{\psi})\mathcal{R}e\,\psi \\ &= J\cdot \sum_i \mathcal{R}e\,\psi(E_i,FX,\cdot)\wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) \\ &= \sum_i \mathcal{R}e\,\psi(E_i,JFX,\cdot)\wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i,\cdot,\cdot) \end{aligned}$$

$\square$

Beweis der Proposition Die kovariante Ableitung bzgl. des $SU(3)$-Zusammenhangs aller oben genannten Tensoren ζ verschwindet nach Theorem 3.19. Damit gilt für alle $X \in \Gamma(TM)$:

$$\nabla_X T = -\tau(X)\cdot\zeta$$

wobei „·“ die Standardoperation von $\mathfrak{su}_m^{\perp} \subset \mathfrak{so}_n \subset End(TM)$ auf TM und ebenso die induzierten Wirkungen auf den verschiedenen Tensoren bezeichnet, die im Folgenden separat diskutiert werden.

(a) Analog zu Beispiel 4.39 operiert $\mathfrak{su}^{\perp}(TM)$ auf $J \in End(TM) \cong TM \otimes T^*M$ durch die adjungierte Darstellung, also folgt mit den Propositionen 5.5 und 5.11:

$$\nabla_X J = -ad_{\tau(X)}(J) = [\,J,[A]_X^{\psi} + \alpha(X)J\,] = J\,[A]_X^{\psi} - [A]_X^{\psi}\,J = -2\,[A]_X^{\psi}\,J = -2\,[JA]_X^{\psi}$$

(b) $\mathfrak{su}^{\perp}(TM)$ operiert als Derivation auf 2-Formen, d.h $F\cdot(\alpha\wedge\beta) = -(\alpha\circ F)\wedge\psi - \varphi\wedge(\beta\circ F)$. Im konkreten Fall ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \nabla_X\omega &= -Der(\tau(X))\omega = \omega(\tau(X)\cdot,\cdot)\omega(\cdot,\tau(X)\cdot) \\ &= g(J([A]_X^{\psi} + \alpha(X)J)\cdot,\cdot) + g(J\cdot,([A]_X^{\psi} + \alpha(X)J)\cdot) \\ &= g(J\,[A]_X^{\psi}\cdot,\cdot) - \alpha(X)g + g(J\cdot,[A]_X^{\psi}\cdot) + \alpha(X)g \\ &= -2g([A]_X^{\psi}\,J\cdot,\cdot) = -2g([JA]_X^{\psi}\cdot,\cdot) \end{aligned}$$

wobei die Orthogonalität von J eingeht. Im letzten Schritt wurde erneut Proposition 5.11 verwendet. Nach Definition von $[\cdot]^{\psi}$ und nach Proposition 4.14 ist dies gerade gleich $-2\mathcal{R}e\,\psi(JAX,\cdot,\cdot) = -\mathcal{I}m\,\psi(AX,\cdot,\cdot)$.

(c) Die Operation auf 3-Formen ist analog zu (b) durch Derivation gegeben:

$$\begin{aligned}\nabla_X \mathcal{R}e\,\psi &= -Der(\tau(X)\mathcal{R}e\,\psi = -Der([A]^{\psi}_X - \alpha(X)J)\mathcal{R}e\,\psi \\ &= -\alpha(X)Der(J)\mathcal{R}e\,\psi - Der([A]^{\psi}_X)\mathcal{R}e\,\psi \\ &= +3\alpha(X)\mathcal{I}m\,\psi + \sum_i \mathcal{R}e\,\psi(E_i, AX, \cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_i, \cdot, \cdot)\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die erste Identität aus Lemma 5.15 verwendet.

(d) Der Ausdruck für $\nabla_X \mathcal{I}m\,\psi$ ergibt sich völlig analog zu Teil (c) unter der Verwendung der zweiten Identität aus Lemma 5.15.

□

Bemerkung 5.16 Aus den Beweisen zu Teil (a) und (b) des vorangehenden Lemmas ist ersichtlich, dass die $\mathcal{W}_5$-Komponente der intrinsischen Torsion a posteriori nicht zu den kovarianten Ableitungen von J und ω beiträgt. Dies ist konsistent mit den bisherigen Überlegungen, denen zu Folge die Wahl von ω bzw. J eine Reduktion auf $U(3)$ implizieren, die „zusätzliche“ fünfte Komponente aber überhaupt erst bei einer weiteren Reduktion auf $SU(n)$ auftritt. Die Tatsache, dass die Wahl von ψ in den Isomorphismus $[\cdot]^{\psi}$ eingeht und damit implizit auch in A steht nicht im Widerspruch dazu, denn ψ bzw. $\mathcal{R}e\,\psi$ geht an dieser Stelle lediglich in die Aufspaltung der $\mathcal{W}_1$- und $\mathcal{W}_2$-Komponente in $SU(3)$-irreduzible Summanden ein.

Durch Antisymmetrisierung können aus den kovarianten Ableitungen dann die äußeren Ableitungen der strukturdefinierenden Formen bestimmt werden:

Proposition 5.17 *Für die äußeren Ableitungen von $\omega, \mathcal{R}e\,\psi$ und $\mathcal{I}m\,\psi$ gilt:*

$$\begin{aligned}
\text{(a)}\quad d\omega &= -2\sum_i dE_i \wedge (JAE_i \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) = 2Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi \\
&= -2\sum_i dE_i \wedge (AE_i \lrcorner \mathcal{I}m\,\psi) = 2Der(A)\mathcal{I}m\,\psi \\
\text{(b)}\quad d\mathcal{R}e\,\psi &= 3\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi + \tfrac{1}{8}\sum_i dE_i \wedge (AE_i \lrcorner \omega^2) = 3\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi - \tfrac{1}{8}Der(A)\omega^2 \\
&= 3\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi - \tfrac{1}{4}(Der(A)\omega) \wedge \omega \\
\text{(c)}\quad d\mathcal{I}m\,\psi &= -3\alpha \wedge \mathcal{R}e\,\psi - \tfrac{1}{8}\sum_i dE_i \wedge (JAE_i \lrcorner \omega^2) = -3\alpha \wedge \mathcal{R}e\,\psi + \tfrac{1}{8}Der(JA)\omega^2 \\
&= -3\alpha \wedge \mathcal{R}e\,\psi + \tfrac{1}{4}(Der(JA)\omega) \wedge \omega
\end{aligned}$$

Beweis Aus Lemma 5.12, Proposition 5.14 und der Darstellung (4.6) für die Wirkung als Derivation ergibt sich

$$d\omega = \sum_i dE_i \wedge \nabla_{E_i}\omega = -2\sum_i dE_i \wedge (JAE_i \lrcorner \mathcal{R}e\,\psi) = 2Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi,$$

die verbleibenden Aussagen in (a) folgen aus den Relationen in Proposition 4.14.

Der Beweis von (b) und (c) verläuft analog und wird hier nur für (b) geführt. Mit der Identität

$$AE_i \lrcorner (\mathcal{R}e\,\psi(E_j,\cdot,\cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_j,\cdot,\cdot)) = 2\mathcal{R}e\,\psi(E_j, AE_i, \cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_j,\cdot,\cdot)$$

Proposition 5.14 sowie Korollar 4.18 folgt:

$$\begin{aligned}
d\mathcal{R}e\,\psi &= -\sum_i dE_i \wedge \nabla_{E_i}\mathcal{R}e\,\psi \\
&= 3\sum_i dE_i \wedge \alpha(E_i)\mathcal{I}m\,\psi + \sum_{ij} dE_i \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_j, AE_i, \cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_j,\cdot,\cdot) \\
&= 3\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi + \tfrac{1}{2}\sum_i dE_i \wedge \Big(AE_i \lrcorner \sum_j \mathcal{R}e\,\psi(E_j,\cdot,\cdot) \wedge \mathcal{R}e\,\psi(E_j,\cdot,\cdot)\Big) \\
&= 3\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi + \tfrac{1}{8}\sum_i dE_i \wedge (AE_i \lrcorner\, \omega^2) \\
&= 3\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi - \tfrac{1}{8}Der(A)\omega^2
\end{aligned}$$

Aus der Identität $Der(A)\omega^2 = (Der(A)\omega) \wedge \omega + \omega \wedge (Der(A)\omega) = 2(Der(A)\omega) \wedge \omega$, die sich direkt aus den Rechenregeln von Derivationen auf 2-Formen ergibt, folgen die verbleibenden Aussagen in (b).

□

Die reellen Räume $\Lambda^3 T^*M$ und $\Lambda^4 T^*M$ tragen die Struktur von $SU(3)$-Moduln, deren Zerlegung in irreduzible Komponenten in Proposition 4.56 dargestellt ist. Die Formen $d\omega, d\mathcal{R}e\,\psi$ und $d\mathcal{I}m\,\psi$ können nach Korollar 4.57 in die zugehörigen Anteile zerlegt werden. Diese Anteile entsprechen dann gerade verschiedenen Komponenten der intrinsischen Torsion der gewählten $SU(3)$-Struktur. Den präzisen Zusammenhang beschreibt die folgende Proposition:

Theorem 5.18 *Die äußeren Ableitungen der Formen $\omega, \mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi$ hängen in folgender Weise von der intrinsischen Torsion ab:*

$$
\begin{aligned}
(d\omega)^{3,0} &= \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(JA)\mathcal{R}e\,\psi - \mathrm{tr}(A)\mathcal{I}m\,\psi \\
(d\omega)^{2,1}_0 &= 2Der(JA^{+,J-})\mathcal{R}e\,\psi \\
(d\omega)^{2,1}_\omega &= 2Der(JA^{-,J-})\mathcal{R}e\,\psi = 2(\omega(JA^{-,J-}\cdot,\cdot)\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi)\wedge\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1} &= 3\alpha\wedge\mathcal{I}m\,\psi - \tfrac{1}{4}(Der(A^{-,J-})\omega)\wedge\omega \\
&= -3(\alpha\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi)\wedge\omega + \tfrac{1}{2}\omega(A^{-,J-}\cdot,\cdot)\wedge\omega \\
(d\mathcal{R}e\,\psi)^{2,2}_\omega &= -\tfrac{1}{4}(Der(A^{+,J+} - \tfrac{1}{6}\,\mathrm{tr}(A)\mathbb{1})\omega)\wedge\omega \\
(d\mathcal{R}e\,\psi)^{2,2}_{\omega^2} &= \tfrac{1}{12}\,\mathrm{tr}(A)\omega^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1} &= -3\alpha\wedge\mathcal{R}e\,\psi + \tfrac{1}{4}(Der(JA^{-,J-})\omega)\wedge\omega \\
&= -3(\alpha\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi)\wedge\omega - \tfrac{1}{2}\omega(JA^{-,J-}\cdot,\cdot)\wedge\omega \\
(d\mathcal{I}m\,\psi)^{2,2}_\omega &= \tfrac{1}{4}(Der(J(A^{-,J+} + \tfrac{1}{6}\,\mathrm{tr}(JA)J))\omega)\wedge\omega \\
(d\mathcal{I}m\,\psi)^{2,2}_{\omega^2} &= -\tfrac{1}{12}\,\mathrm{tr}(JA)\omega^2
\end{aligned}
$$

Beweis
Dekomposition von $d\omega$:
Nach Korollar 4.57 und Proposition 5.17 gilt allgemein (Notation wie im zitierten Korollar, A bezeichnet weiter den Endomorphismus, der den $U(3)$-Teil der intrinsischen Torsion beschreibt):

$$2Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi = d\omega = \lambda\mathcal{R}e\,\psi + \mu\mathcal{I}m\,\psi - 2Der(S)\mathcal{R}e\,\psi + \varphi\wedge\omega \tag{5.6}$$

Aufgrund der Orthogonalität der Summanden in (5.6) können λ und μ mit Hilfe von Proposition 4.22 und (5.5) berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\lambda &= 2\left\langle Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{R}e\,\psi\right\rangle = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(JA) \\
\tfrac{1}{2}\mu &= 2\left\langle Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\right\rangle = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(JAJ) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(A)
\end{aligned}
$$

Der Endomorphismus S sowie die Form φ berechnen sich aus der Aufspaltung des Ausdrucks $2Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi$ in (3,0)+(0,3)- bzw. (2,1)+(1,2)-Anteil nach Lemma 4.48. Definition 4.5 impliziert direkt, dass $Der(\cdot)$ und $[\cdot,\cdot]$ (Kommutator von Endomorphismen) vertauschen. Mit dieser Regel sowie Proposition 4.14 folgt:

$$\begin{aligned}
&Der(J)^2 Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi \\
&\quad = Der(J)\big(Der([J,JA]) + Der(JA)Der(J)\big)\mathcal{R}e\,\psi \\
&\quad = Der([J,[J,JA]])\mathcal{R}e\,\psi + 2Der([J,JA])Der(J)\mathcal{R}e\,\psi + Der(JA)Der(J)Der(J)\mathcal{R}e\,\psi \\
&\quad = Der(2AJ - 2JA)\mathcal{R}e\,\psi - 6Der([J,JA])\mathcal{I}m\,\psi - 9Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi \\
&\quad = -4Der(AJ)\mathcal{R}e\,\psi - 5Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich unmittelbar die gesuchten Anteile:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{3,0}(2Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi) &= Der(AJ + JA)\mathcal{R}e\,\psi = 2Der(JA^{J+})\mathcal{R}e\,\psi \\
\mathbb{P}^{2,1}(2Der(JA)\mathcal{R}e\,\psi) &= -Der(AJ - JA)\mathcal{R}e\,\psi = 2Der(JA^{+,J-} + JA^{-,J-})\mathcal{R}e\,\psi
\end{aligned}$$

Das Ergebnis für den (3,0)+(0,3)-Anteil ist konsistent mit den vorangegangenen Berechnungen, denn wie im Beweis zu Proposition 5.10 gezeigt hängen die beiden Spuren nur von A^{J+} ab. Nach Proposition 4.55 folgt aus der Darstellung des (2,1)+(1,2)-Anteils, dass S durch den (symmetrischen) Endomorphismus $-JA^{+,J-}$ und der verbleibende Teil durch $\varphi \wedge \omega = 2Der(JA^{-,J-})\mathcal{R}e\,\psi$ gegeben ist. Mit Proposition 4.52 und Lemma 4.6 (b) lässt sich φ unter Berücksichtigung von $\omega \wedge \mathcal{R}e\,\psi = 0$ berechnen:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\omega\lrcorner(2Der(JA^{-,J-})\mathcal{R}e\,\psi) = -(Der(JA^{-,J-})\omega)\lrcorner\mathcal{R}e\,\psi = 2\omega(JA^{-,J-}\cdot,\cdot)\lrcorner\mathcal{R}e\,\psi \tag{5.7}$$

Im letzten Schritt wurde dabei ausgenutzt, dass die Symmetrieeigenschaften von $A^{-,J-}$ die Relation $\omega(\cdot, JA^{-,J-}\cdot) = \omega(JA^{-,J-}\cdot,\cdot)$ implizieren.

Dekomposition von $d\mathcal{R}e\,\psi$:
Für die in Proposition 5.17 berechnete 4-Form $d\mathcal{R}e\,\psi$ existiert nach Korollar 4.57 die Zerlegung

$$3\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi - \tfrac{1}{4}(Der(A)\omega) \wedge \omega = d\mathcal{R}e\,\psi = \sigma \wedge \omega + \rho \wedge \omega + \nu\omega^2$$

Da $\mathcal{I}m\,\psi$ in $[\![\Lambda^{3,0}]\!]$ liegt, folgt für den ersten Summanden: $3\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi \in [\![\Lambda^{3,1}]\!]$. Sein Beitrag σ_1 zu σ berechnet sich mit dem Projektor aus Proposition 4.52 (wobei für eine Form aus $[\![\Lambda^{3,1}]\!]$ nur der erste Summand beiträgt) sowie Proposition 4.15 zu

$$\sigma_1 = 3\omega\lrcorner(\alpha \wedge \mathcal{I}m\,\psi) = 3(J\alpha\lrcorner\mathcal{I}m\,\psi) = -3\alpha\lrcorner\mathcal{R}e\,\psi$$

Nach Theorem 4.51 ist $\omega\wedge : \Lambda^2 T^*M \longrightarrow \Lambda^4 T^*M$ ein Isomorphismus, mit dessen Hilfe die Zerlegung des zweiten Summanden aus $d\mathcal{R}e\,\psi$ auf diejenige von $-\frac{1}{4}Der(A)\omega$ aus Proposition 4.56 zurückgeführt werden kann. Die Anteile dieser Form in $[\![\Lambda^{2,0}]\!]$ und $[\Lambda^{1,1}]$ ergeben sich mit den Projektoren aus Lemma 4.48:

$$\begin{aligned}
(Der(A)\omega)^{2,0} &= \tfrac{1}{2}(\mathbb{1} - J\cdot)(Der(A)\omega) \\
&= \tfrac{1}{2}(-\omega(A\cdot,\cdot) - \omega(\cdot,A\cdot) + \omega(AJ\cdot,\cdot) + \omega(\cdot,AJ\cdot)) \\
&= -\omega(\tfrac{1}{2}(A + JAJ)\cdot,\cdot) - \omega(\cdot,\tfrac{1}{2}(A + JAJ)\cdot) \\
&= Der(A^{J-})\omega = Der(A^{-,J-})\omega
\end{aligned}$$

$$(Der(A)\omega)^{1,1} = Der(A^{J+})\omega = Der(A^{+,J+})\omega$$

Dabei verläuft die zweite Rechnung völlig analog zur ersten. Im jeweils letzten Schritt wird verwendet, dass die J-Invarianz von ω die Identität $Der(A^{-,J+})\omega = Der(A^{+,J-})\omega = 0$ impliziert. Der erste Teil dieser Rechnung liefert den zweiten Anteil $\sigma_2 = -\frac{1}{4}Der(A^{-,J-})\omega = \frac{1}{2}\omega(A^{-,J-}\cdot,\cdot)$ zu $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

Die Aufspaltung der (1,1)-Komponente beruht auf der Identität

$$\omega\lrcorner(Der(A^{+,J+})\omega) = \langle Der(A^{+,J+})\omega, \omega\rangle = -\operatorname{tr}(A^{+,J+}) = -\operatorname{tr}(A),$$

die aus Proposition 4.22 und (5.5) folgt. Mit Proposition 4.52 ergeben sich dann die direkt die beiden Koeffizienten :

$$\begin{aligned}
&\rho = -\tfrac{1}{4}(Der(A)\omega)_0^{1,1} = -\tfrac{1}{4}Der(A^{+,J+})\omega - \tfrac{1}{12}\operatorname{tr}(A)\omega = -\tfrac{1}{4}Der(A^{+,J+} - \tfrac{1}{6}\operatorname{tr}(A)\mathbb{1})\omega \\
&\nu = \tfrac{1}{12}\operatorname{tr}(A)
\end{aligned}$$

Die Dekomposition von $d\mathcal{I}m\,\psi$ berechnet sich analog der von $d\mathcal{R}e\,\psi$.

□

Durch Vergleich mit den expliziten Torsionskomponenten aus Proposition 5.10 ergibt sich direkt die Zerlegung von $d\omega$, $d\mathcal{R}e\,\psi$, $d\mathcal{I}m\,\psi$ in Termen der angesprochenen Komponenten $\mathcal{P}_i(\tau)$:

Korollar 5.19

$$\begin{aligned}
(d\omega)^{3,0} &= 6(\mathcal{P}_1(\tau)J)\cdot\mathcal{R}e\,\psi = 6(\mathcal{P}_1^+(\tau)J)\cdot\mathcal{R}e\,\psi + 6(\mathcal{P}_1^-(\tau)J)\cdot\mathcal{R}e\,\psi \\
(d\omega)_0^{2,1} &= 2Der(J\mathcal{P}_3(\tau))\mathcal{R}e\,\psi \\
(d\omega)_\omega^{2,1} &= 2Der(J\mathcal{P}_4(\tau))\mathcal{R}e\,\psi = 2(\omega(J\mathcal{P}_4(\tau)\cdot,\cdot)\lrcorner\mathcal{R}e\,\psi)\wedge\omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1} &= 3\mathcal{P}_5(\tau)\wedge\mathcal{I}m\,\psi - \tfrac{1}{4}(Der(\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\wedge\omega \\
&= -3(\mathcal{P}_5(\tau)\lrcorner\mathcal{R}e\,\psi)\wedge\omega + \tfrac{1}{2}\omega(\mathcal{P}_4(\tau)\cdot,\cdot)\wedge\omega \\
(d\mathcal{R}e\,\psi)_\omega^{2,2} &= -\tfrac{1}{4}(Der(\mathcal{P}_2^+(\tau))\omega)\wedge\omega \\
(d\mathcal{R}e\,\psi)_{\omega^2}^{2,2} &= \tfrac{1}{2}\mathcal{P}_1^+(\tau)\omega^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1} &= -3\mathcal{P}_5(\tau)\wedge\mathcal{R}e\,\psi + \tfrac{1}{4}(Der(J\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\wedge\omega \\
&= -3(\mathcal{P}_5(\tau)\lrcorner\mathcal{I}m\,\psi)\wedge\omega - \tfrac{1}{2}\omega(J\mathcal{P}_4(\tau)\cdot,\cdot)\wedge\omega \\
(d\mathcal{I}m\,\psi)_\omega^{2,2} &= \tfrac{1}{4}(Der(J\mathcal{P}_2^-(\tau))\omega)\wedge\omega \\
(d\mathcal{I}m\,\psi)_{\omega^2}^{2,2} &= \tfrac{1}{2}\mathcal{P}_1^-(\tau)\cdot\omega^2
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.20

(a) Das vorangehende Korollar zeigt, dass durch $d\omega$ nicht alle Komponenten der $U(3)$-Torsion bestimmt werden. Dies resultiert daraus, dass die $U(3)$-Struktur, wie in Bemerkung 4.12 diskutiert, erst durch (g,ω) oder (J,ω) eindeutig festgelegt ist. Zur Bestimmung des $\mathcal{W}_2$-Anteils der Torsion könnte etwa ∇J herangezogen werden, im Falle einer $SU(3)$-Struktur werden zweckmäßigerweise $d\mathcal{R}e\,\psi$ und $d\mathcal{I}m\,\psi$ verwendet.

(b) Die Aufspaltung von $(d\omega)^{3,0}$ in die Summanden $6(\mathcal{P}_1^+(\tau)J)\cdot\mathcal{R}e\,\psi$ und $6(\mathcal{P}_1^-(\tau)J)\cdot\mathcal{R}e\,\psi$ hängt wesentlich von der Fixierung der Basis $(\mathcal{R}e\,\psi,\mathcal{I}m\,\psi)$ von $[\![\Lambda^{3,0}]\!]$ und damit von der $SU(3)$-Struktur ab. Bei Vorliegen einer $U(3)$-Struktur würde dieser Torsionssummand, wie in Bemerkung 4.58 diskutiert, nicht in eindimensionale Summanden zerfallen.

Korollar 5.19 bietet die Möglichkeit, die Torsionsbeiträge bei gegebenen äußeren Ableitungen der strukturdefinierenden Formen, zerlegt in irreduzible Summanden, explizit zu berechnen:

Theorem 5.21 *Die Torsionskomponenten $\mathcal{P}_i$ berechnen sich wie folgt aus den Formen $d\omega, d\mathcal{R}e\,\psi$ sowie $d\mathcal{I}m\,\psi$:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1^+(\tau) &= -\tfrac{1}{3}(\mathcal{I}m\,\psi\lrcorner(d\omega)^{3,0})\mathbb{1} = \tfrac{1}{6}(\omega^2\lrcorner(d\mathcal{R}e\,\psi)^{2,2}_{\omega^2})\mathbb{1}\\
\mathcal{P}_1^-(\tau) &= -\tfrac{1}{3}(\mathcal{R}e\,\psi\lrcorner(d\omega)^{3,0})J = \tfrac{1}{6}(\omega^2\lrcorner(d\mathcal{I}m\,\psi)^{2,2}_{\omega^2})J\\
\mathcal{P}_2^+(\tau) &= -\tfrac{1}{2}{}^\flat(\omega\lrcorner(d\mathcal{R}e\,\psi)^{2,2}_{\omega})\circ J\\
\mathcal{P}_2^-(\tau) &= \tfrac{1}{2}{}^\flat(\omega\lrcorner(d\mathcal{I}m\,\psi)^{2,2}_{\omega})\\
\mathcal{P}_3(\tau) &= -2(\cdot\lrcorner(d\omega)^{2,1}_0)\lrcorner\mathcal{R}e\,\psi\\
\mathcal{P}_4(\tau) &= -2(\cdot\lrcorner(d\omega)^{2,1}_\omega)\lrcorner\mathcal{R}e\,\psi\\
\mathcal{P}_5(\tau) &= -\tfrac{4}{3}\mathcal{I}m\,\psi\lrcorner(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1} + \tfrac{1}{6}\omega\lrcorner *d\omega = -\tfrac{4}{3}\mathcal{I}m\,\psi\lrcorner(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1} + \tfrac{1}{6}\omega\lrcorner J\cdot d\omega\\
&= +\tfrac{4}{3}\mathcal{R}e\,\psi\lrcorner(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1} + \tfrac{1}{6}\omega\lrcorner *d\omega = +\tfrac{4}{3}\mathcal{R}e\,\psi\lrcorner(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1} + \tfrac{1}{6}\omega\lrcorner J\cdot d\omega
\end{aligned}$$

Beweis Die Komponenten $\mathcal{P}_1^\pm(\tau)$ ergeben sich unmittelbar durch Projektion aus Korollar 5.19, wobei $\mathcal{R}e\,\psi\lrcorner\mathcal{R}e\,\psi = \frac{1}{2}$ und $\omega^2\lrcorner\omega^2 = 12$ eingeht. Proposition 4.55 liefert direkt die Ausdrücke für $\mathcal{P}_3(\tau)$ und $\mathcal{P}_4(\tau)$.
Der Endomorphismus $\mathcal{P}_2^+(\tau)$ ist wegen $Der(P_2^+(\tau))\omega = -2g(J\mathcal{P}_2^+(\tau)\cdot,\cdot)$ bis auf einen Vorfaktor durch das metrische Dual (verknüpft mit J) der Form $\rho = \omega\lrcorner(d\mathcal{R}e\,\psi)^{2,2}_0$ aus dem Beweis zu Theorem 5.18 gegeben. Analog berechnet sich $\mathcal{P}_2^-(\tau)$.

Die 1-Form $\mathcal{P}_5(\tau)$ ergibt sich durch Auflösen des Ausdrucks für $(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1}$ (und analog für $(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1}$) nach $\alpha\wedge\mathcal{I}m\,\psi$ und Anwenden der Identitäten aus Korollar 4.21. Es resultieren die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_5(\tau) &= -\tfrac{4}{3}\mathcal{I}m\,\psi\lrcorner\,(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1} - \tfrac{1}{3}\mathcal{I}m\,\psi\lrcorner\,(\omega\wedge Der(\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\\ \mathcal{P}_5(\tau) &= \tfrac{4}{3}\mathcal{R}e\,\psi\lrcorner\,(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1} + \tfrac{1}{3}(Der(J\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi \end{aligned}\tag{5.8}$$

Die $\mathcal{P}_4(\tau)$-abhängigen Summanden können wie folgt vereinfacht werden: Unter Ausnutzung von Proposition 4.15 folgt zunächst

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{I}m\,\psi\lrcorner\,((Der(\mathcal{P}_4)\omega)\wedge\omega),X\rangle &= -\,\langle((Der(\mathcal{P}_4)\omega)\wedge\omega),JX\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi\rangle\\ &= \langle J\cdot(((Der(\mathcal{P}_4)\omega)\wedge\omega)\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi),X\rangle\end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 4.6 folgt dann:

$$\mathcal{I}m\,\psi\lrcorner\,(((Der(\mathcal{P}_4)\omega)\wedge\omega)) = (J\cdot Der(\mathcal{P}_4)\omega)\lrcorner\,(J\cdot\mathcal{I}m\,\psi) = (Der(\mathcal{P}_4)\omega))\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi$$

Eine entsprechende Rechnung gilt für den Summanden $\mathcal{R}e\,\psi\lrcorner\,(\omega\wedge Der(J\mathcal{P}_4(\tau))\omega)$ in (5.8), s.d. sich für $\mathcal{P}_5(\tau)$ die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_5(\tau) &= -\tfrac{4}{3}\mathcal{I}m\,\psi\lrcorner\,(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1} - \tfrac{1}{3}(Der(\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi\\ \mathcal{P}_5(\tau) &= \tfrac{4}{3}\mathcal{R}e\,\psi\lrcorner\,(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1} + \tfrac{1}{3}(Der(J\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi\\ &= \tfrac{4}{3}\mathcal{R}e\,\psi\lrcorner\,(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1} - \tfrac{1}{3}(Der(\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi\end{aligned}\tag{5.9}$$

In der zweiten Identität wurde dabei folgende Umformung verwendet, die auf Proposition 4.14 und (4.6) beruht:

$$\begin{aligned}(Der(J\mathcal{P}_4)\omega)\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi &= -\sum_i(E_i\wedge(J\mathcal{P}_4E_i\lrcorner\,\omega))\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi = -\sum_i(\mathcal{P}_4E_i\lrcorner\,\omega)\lrcorner\,JE_i\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi\\ &= \sum_i(\mathcal{P}_4E_i\lrcorner\,\omega)\lrcorner\,E_i\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi = -(Der(\mathcal{P}_4)\omega)\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi\end{aligned}$$

Um den in der Proposition angegeben Ausdruck zu erhalten, muss $\mathcal{P}_4(\tau)$ durch $d\omega$ ausgedrückt werden. Gleichung (5.7) aus dem Beweis zu Theorem 5.18 liefert zusammen mit dem Projektor aus 4.52:

$$-\tfrac{1}{2}\omega\lrcorner\,d\omega = -\tfrac{1}{2}(\omega\lrcorner\,(d\omega)^{2,1}_{\omega}) = -\varphi = (Der(J\mathcal{P}_4(\tau)))\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi$$

Aus den Definitionen folgt direkt $J\cdot(Der(J\mathcal{P}_4(\tau))\omega) = -Der(J\mathcal{P}_4(\tau))\omega$. Zusammen mit den vorangegangen Gleichungen und Lemma 4.6 ergibt sich dann

$$\begin{aligned}(Der(\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi &= -(Der(J\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi = J\cdot((Der(J\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi)\\ &= -\tfrac{1}{2}(J\cdot\omega)\lrcorner\,(J\cdot(d\omega)^{2,1}_{\omega}) = -\tfrac{1}{2}\omega\lrcorner\,(J\cdot(d\omega)^{2,1}_{\omega})\end{aligned}$$

Da $J\cdot$ und $*$ die Zerlegung von $\Lambda^3T^*M = \Lambda^3_0T^*M\oplus\Lambda^1T^*M\wedge\omega$ invariant lassen, folgt mit den Beziehungen zwischen den beiden Operatoren aus Proposition 4.19 (b):

$$(Der(J\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\lrcorner\,\mathcal{I}m\,\psi = -(Der(\mathcal{P}_4(\tau))\omega)\lrcorner\,\mathcal{R}e\,\psi = \tfrac{1}{2}\omega\lrcorner\,J\cdot d\omega = \tfrac{1}{2}\omega\lrcorner\,*\,d\omega$$

Zusammen mit (5.9) folgen die angegebenen Ausdrücke für $\mathcal{P}_5(\tau)$.

□

Bemerkung 5.22 Die Aussage der vorangehenden Proposition entspricht etwa dem Zugang, der in [9] und [8] gewählt wird, um $SU(3)$-Strukturen durch ihre intrinsische Torsion zu klassifizieren. Dort werden Anteile W_i, die den irreduziblen Komponenten $\mathcal{W}_i$ der Torsion entsprechen und von ω, $d\omega$, $d\mathcal{R}e\,\psi$ sowie $d\mathcal{I}m\,\psi$ abhängen, definiert sowie folgendes Resultat angeben:

Theorem *Die fünf Komponenten der intrinsischen Torsion sind durch $d\mathcal{R}e\,\psi, d\mathcal{I}m\,\psi$ und $d\omega$ auf die folgende Art und Weise bestimmt:*

$$\begin{aligned} W_1 &\longleftrightarrow (d\omega)^{3,0} \\ W_2 &\longleftrightarrow ((d\mathcal{R}e\,\psi)_0^{1,1}, (d\mathcal{I}m\,\psi)_0^{1,1}) \\ W_3 &\longleftrightarrow (d\omega)_0^{2,1} \\ W_4 &\longleftrightarrow \omega \wedge d\omega \\ W_5 &\longleftrightarrow (d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1} \text{ oder } (d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1} \end{aligned}$$

Die Komponenten $W_1^{\pm}, W_2^{\pm}, W_3$ und W_4 stimmen mit den oben angegebenen Resultaten überein, da durch den Isomorphismus $\omega\wedge$ die Formenanteile $(d\mathcal{R}e\,\psi)_0^{1,1}$ und $(d\mathcal{R}e\,\psi)_\omega^{2,2}$ identifiziert werden (Analoges gilt für $d\mathcal{I}m\,\psi$) und desweiteren nach Theorem 4.51 (a) die Identität $\omega \wedge (d\omega)_\omega^{2,1} = \omega \wedge d\omega$ gilt. Für die $\mathcal{W}_5$-Komponente wurde allerdings in Theorem 5.21 ein abweichendes Resultat erzielt, da die Formen $(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1}$ bzw. $(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1}$ im allgemeinen sowohl von der $\mathcal{W}_4$- als auch von der $\mathcal{W}_5$-Komponente abhängen. Erst durch die geeignete Kombination mit dem $\mathcal{W}_4$-Anteil, der bereits durch $d\omega$ bestimmt ist, kann die $\mathcal{W}_5$-Komponente aus $(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1}$ oder $(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1}$ bestimmt werden. Insbesondere ist es denkbar, dass $(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1} \neq 0$ gilt, obwohl die intrinsische Torsion keinen $\mathcal{W}_5$-Beitrag aufweist. Es besteht nicht die Möglichkeit, die beiden Anteile in $(d\mathcal{R}e\,\psi)^{3,1}$ bzw. $(d\mathcal{I}m\,\psi)^{3,1}$ aufbauend auf eine $SU(3)$-irreduzible Zerlegung der entsprechenden 4-Formen zu trennen.

5.3 Geometrische Bedeutung der intrinsischen Torsion & Halbflachheit

Nachdem die intrinsische Torsion bzw. die entsprechende $SU(3)$-Darstellung in irreduzible Komponenten zerlegt wurde, soll im Folgenden an einigen Beispielklassen gezeigt werden, wie sich geometrische Bedingungen in Termen der intrinsischen Torsion einer $SU(3)$-Struktur bzw. $U(3)$-Struktur reformulieren lassen. Konkret werden hermitesche Mannigfaltigkeiten (definiert durch die Integrabilität der orthogonalen fast-komplexen Struktur), Almost Kähler Mannigfaltigkeiten ($d\omega = 0$) und Nearly Kähler Mannigfaltigkeiten ($(\nabla_X J)X = 0\ \forall X \in \Gamma(TM)$) sowie die durch Holonomiereduktion auf $U(n)$ bzw. $SU(n)$ definierten Kähler- und Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten betrachtet. Eine derartige Klassifikation wurde für $U(n)$-Strukturen bereits in [26] durchgeführt. Sie soll auf der Basis des hier gewählten Zugang zur

Torsionszerlegung erneut diskutiert werden.

Die Integrabilität einer fast-komplexen Struktur J kann durch den Nijenhuis-Tensor

$$N_J(X,Y) := [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]$$

charakterisiert werden. Dieser lässt sich wie folgt durch die intrinsische Torsion der $SU(3)$-Struktur ausdrücken:

Lemma 5.23 *Der Nijenhuis-Tensor der fast-komplexen Struktur J kann wie folgt in Termen der intrinsischen Torsion ausgedrückt werden:*

$$N_J(X,Y) = 4\Big([\mathcal{P}_1(\tau) + \mathcal{P}_2(\tau)]^\psi_Y X - [\mathcal{P}_1(\tau) + \mathcal{P}_2(\tau)]^\psi_X Y\Big)$$

Beweis Unter Ausnutzung von $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ sowie $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y$ folgt:

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= +(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y(JX)) \\ &\quad + J(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY} X) - (\nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX)) \\ &= J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y - J(\nabla_Y J)X + (\nabla_{JY} J)X \end{aligned}$$

Mit Proposition 5.14 (a) und 5.11 sowie der Identität $[A]^\psi_{JX} = [AJ]^\psi_X$, die sich direkt aus der Definition von $[\cdot]^\psi$ ergibt, folgt damit:

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= -2J\,[JA]^\psi_X\,Y + 2\,[JA]^\psi_{JX}\,Y + J\,[JA]^\psi_Y\,X - 2\,[JA]^\psi_{JY}\,X \\ &= -2\,[A]^\psi_X\,Y + 2\,[JAJ]^\psi_X\,Y + 2\,[A]^\psi_Y\,X - 2\,[JAJ]^\psi_Y\,X \\ &= 4(\big[A^{J+}\big]^\psi_Y X - \big[A^{J+}\big]^\psi_X Y) \end{aligned}$$

Mit den Torsionskomponenten aus Proposition 5.10 folgt die Behauptung.

□

Proposition 5.24 *Für eine speziell fast-hermitesche Mannigfaltigkeit übersetzen sich die oben genannten geometrischen Konzepte wie folgt in Restriktionen an die intrinsische Torsion der Struktur:*

$$\begin{aligned} &(M,g,J,\psi) \text{ ist hermitesch} &&\Longleftrightarrow && \mathcal{P}_3(\tau) = \mathcal{P}_4(\tau) = 0 \\ &(M,g,J,\psi) \text{ ist Almost Kähler} &&\Longleftrightarrow && \mathcal{P}_1(\tau) = \mathcal{P}_3(\tau) = \mathcal{P}_4(\tau) = 0 \\ &(M,g,J,\psi) \text{ ist Nearly Kähler} &&\Longleftrightarrow && \mathcal{P}_2(\tau) = \mathcal{P}_3(\tau) = \mathcal{P}_4(\tau) = 0 \\ &(M,g,J,\psi) \text{ ist Kähler} &&\Longleftrightarrow && \tau = \mathcal{P}_5(\tau)J \\ & &&\Longleftrightarrow && A = 0 \\ &(M,g,J,\psi) \text{ ist Calabi-Yau} &&\Longleftrightarrow && \tau = 0 \end{aligned}$$

BEWEIS Die Charakterisierungen ergeben sich in den 5 Fällen wie folgt:

- J ist genau dann eine integrable komplexe Struktur, wenn der Nijenhuis-Tensor verschwindet, siehe [34], Theorem IX.2.5. Die Behauptung folgt dann direkt aus Lemma 5.23 und der Tatsache, dass J orthogonal bzgl. g ist.

- Nach Definition ist die Struktur genau dann Almost Kähler, wenn $d\omega = 0$. Diese Eigenschaft impliziert nach Theorem 5.21: $\mathcal{P}_1(\tau) = \mathcal{P}_3(\tau) = \mathcal{P}_4(\tau) = 0$. Umgekehrt folgt aus der genannten Einschränkung an die Torsion mit Theorem 5.18, dass $d\omega$ verschwindet.

- Nach Definition ist die Struktur genau dann Naerly Kähler, wenn $(\nabla_X J)X = 0$ für alle $X \in \Gamma(TM)$. Wegen Proposition 5.14 und (5.1) ist dies äquivalent zu der Bedingung $0 = [JA]_X^{\psi} X = \mathcal{R}e\,\psi(JAX, X, \cdot)$ für alle Vektorfelder X. Dies dann und nur dann erfüllt, wenn $A \in C^\infty(M) \otimes \mathbb{1} \oplus C^\infty(M) \otimes J$, also nur die Torsionsanteile $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_5$ auftreten.

- Nach Definition ist die Struktur Kähler (siehe Beispiel 3.22), wenn eine Holonomiereduktion auf $U(3)$ vorliegt. Dies impliziert nach Korollar 3.21, dass J parallel ist. Nach Proposition 5.11 (a) folgt $A = 0$ oder äquivalent $\tau = \mathcal{P}_5(\tau)J$. Gilt umgekehrt $A = 0$, so folgt $\nabla J = 0$, folglich ist J invariant unter $Hol(\nabla)$. Dies impliziert $Hol(\nabla) \subset Stab_{O(6)}(J) = O(6) \cap GL(3, \mathbb{C}) = U(3)$. Wird der Begriff der Kählermannigfaltigkeit alternativ durch die Forderungen nach Integrabilität von J sowie $d\omega = 0$ definiert, so ergibt sich die angegebene Charakterisierung aus den Beispielen „hermitesche Mannigfaltigkeit “ und „Almost Kähler Mannigfaltigkeit“.

- Die Holonomiereduktion auf $SU(3)$ impliziert, wie im Kähler-Fall, dass $A = 0$. Nach Korollar 3.21 gilt zudem $\nabla\psi = 0$. Nach Theorem 5.21 folgt damit auch $\mathcal{P}_5(\tau) = 0$, also insgesamt $\tau = 0$. Umgekehrt ergibt sich aus $\tau = 0$ und Proposition 5.14, dass $\nabla J = \nabla\psi = 0$ und damit wie im vorangegangenen Fall, dass $Hol(\nabla) \subset Stab_{O(6)}(J) \cap Stab_{O(6)}(\psi) = U(3) \cap SL(3, \mathbb{C}) = SU(3)$.

□

Eine weitere Beispielklasse von $SU(n)$-Strukturen, die - im Gegensatz zu den oben angegebenen Beispielen - explizit die Aufspaltung der Komponenten $\mathcal{W}_i = \mathcal{W}_i^+ \oplus \mathcal{W}_i^-,\ i = 1, 2$ nutzt, wird im Folgenden relevant sein. Aus Proposition 5.8 oder Definition 5.9 ist ersichtlich, dass die intrinsische Torsion Element einer 42-dimensionalen $SU(3)$-Darstellung ist. Die Forderung, dass keine Anteile in den Summanden $\mathcal{W}_1^+$, $\mathcal{W}_2^+$, $\mathcal{W}_4$ sowie $\mathcal{W}_5$ auftreten, bedeutet eine Verringerung der Dimension des Raumes, in dem die intrinsische Torsion ihre Werte annimmt, um $1 + 8 + 6 + 6 = 21$. Bei dieser Einschränkung an die Torsion verschwindet, gemessen an der Dimension der Komponenten, also gerade die Hälfte der Torsion, derartige speziell-hermitesche Mannigfaltigkeiten werden wie folgt bezeichnet (siehe auch [9]):

Definition 5.25 *Eine speziell fast-hermitesche Mannigfaltigkeit* $(M^6, g, \omega, \mathcal{R}e\,\psi)$ *der Dimension 6 heißt „halbflach“ oder „halbintegrabel“ , wenn folgende Restriktion an die intrinsische Torsion* τ *erfüllt ist:*

$$\mathcal{P}_1^+(\tau) = \mathcal{P}_2^+(\tau) = \mathcal{P}_4(\tau) = \mathcal{P}_5(\tau) = 0$$

Die Verifizierung der Halbflachheit verlangt - direkt nach Definition - die Berechnung der Torsionskomponenten. Sie kann aber äquivalent durch differentielle Relationen an die strukturdefinierenden Formen ω und $\mathcal{R}e\,\psi$ formuliert werden:

Proposition 5.26 *Eine speziell fast-hermitesche Mannigfaltigkeit ist genau dann halbflach, wenn gilt:*

$$d(\omega \wedge \omega) = 2\omega \wedge d\omega = 0 \qquad\qquad d\mathcal{R}e\,\psi = 0$$

BEWEIS Aus Theorem 4.51 folgt zunächst:

$$\omega \wedge d\omega = \omega \wedge (d\omega)^{2,1}_{\omega} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (d\omega)^{2,1}_{\omega} = 0 \tag{5.10}$$

Ist die Mannigfaltigkeit halbflach, so folgt direkt aus Korollar 5.19, dass alle drei Komponenten von $d\mathcal{R}e\,\psi$ sowie $(d\omega)^{2,1}_{\omega}$ verschwinden. Letzteres impliziert mit (5.10) auch $\omega \wedge d\omega = 0$. Gelten umgekehrt die beiden Bedingungen an die Formen, so folgt mit (5.10), dass neben $d\mathcal{R}e\,\psi$ auch $(d\omega)^{2,1}_{\omega}$ verschwindet. Nach Proposition 5.17 verschwinden dann die Torsionskomponenten $\mathcal{P}_1^+$, $\mathcal{P}_2^+$ und $\mathcal{P}_4$. Aus dem Ausdruck in (5.9) für $\mathcal{P}_5$ ist dann ersichtlich, dass auch diese Komponente verschwindet, die Mannigfaltigkeit also halbflach ist.

□

Abschließend soll noch ein auf Theorem 3.25 basierendes „Verfahren“ angegeben werden, mit dem die intrinsische Torsion explizit berechnet werden kann. Bezeichne dazu im Folgenden ∇ den Levi-Civita-Zusammenhang und $\widehat{\nabla}$ den minimalen Zusammenhang der $U(3)$-Struktur.

In einem ersten Schritt zerlegt sich $\tau \in \Gamma\left(\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^{\perp}\right)$ in die Summanden

$$\tau = \tau - \mathcal{P}^5(\tau) + \mathcal{P}^5(\tau) =: \xi + \mathcal{P}^5(\tau)$$

wobei $\xi \in \Gamma\left(\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^{\perp}\right)$ den $U(3)$-Anteil der intrinsischen Torsion angibt. Es reicht daher, diesen zu berechnen. Dies geschieht mit einem Verfahren, dass in dieser oder ähnlicher Form in [26], [6], [18] oder [11] Anwendung findet.

Proposition 5.27 *Für die intrinsische Torsion ξ einer $U(3)$-Struktur (g, J) gilt:*

$$\xi_X = -\tfrac{1}{2} J(\nabla_X J)$$

BEWEIS Da $\widehat{\nabla}$ ein $U(3)$-Zusammenhang ist, folgt für die $U(3)$-invariante, fast-komplexe Struktur: $\widehat{\nabla} J = 0$. Theorem 3.25 liefert unter Berücksichtigung der adjungierten Wirkung von ξ_X auf J:

$$0 = \nabla_X J + ad_{\xi_X}(J) = \nabla_X J + [\xi_X, J] = \nabla_X J - 2J\xi_X$$

Mit $J^2 = -\mathbb{1}$ folgt die Behauptung.

□

6 Ricci-Krümmung halbflacher Mannigfaltigkeiten

6.1 Motivation

Halbflache Mannigfaltigkeiten oder allgemeiner auch solche, die eine allgemeine $SU(3)$-Struktur tragen, wurden in Abschnitt 2.5 als mögliche Verallgemeinerungen von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten in der Kompaktifizierung von Typ II-Stringtheorien vorgeschlagen, um auch bei Auftreten von Hintergrundflüsse im NS-NS-Sektor der Typ IIB-Theorie eine Form der Mirrorsymmetrie zu erhalten.
Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten sind Ricci-flach (siehe [27]), für Mannigfaltigkeiten, die eine $SU(3)$-Struktur tragen, gilt dies i.a. nicht. Da wegen

$$\nabla = \widetilde{\widetilde{\nabla}} - \tau$$

die intrinsische Torsion als ein Maß für die Abweichung von $Hol(\nabla) = SU(3)$ aufgefasst werden kann, sollte die Ricci-Krümmung derart von der intrinsischen Torsion abhängen, dass im Limes[15] $\tau \to 0$ Ricci-Flachheit vorliegt.
Eine mögliche Herangehensweise an diese Frage wird in [28], aufbauend auf Resultate aus [18], gegeben. Demnach existiert eine Zerlegung des Krümmungstensors der Form

$$R = R_{CY} + R^{\perp},$$

wobei R_{CY} ein formaler Calabi-Yau-Krümmungstensor ist und $R^{\perp}$ ein Zusatzterm, der im Raum der formalen Krümmungstensoren orthogonal zu R_{CY} liegt und von der intrinsischen Torsion abhängt. Für die Ricci-Krümmung folgt damit

$$ric = ric_{CY} + ric^{\perp} = ric^{\perp}$$

Präziser hängt $R^{\perp}$ und damit auch $ric^{\perp}$ im allgemeinen in Form von Tensoren der Gestalt $\nabla\tau$ und τ^2 von der intrinsischen Torsion ab, wobei τ^2 eine geeignete Summe von Kontraktionen des Tensors $\tau \otimes \tau$ bezeichnet. Während der zweite Term offensichtlich für kleine Torsion ebenfalls klein wird, gilt dies für den ersten nicht notwendigerweise. Die Annahme, dass halbflache Mannigfaltigkeiten im Grenzwert kleiner Torsion die Ricci-Flachheit reproduzieren können führt daher zu der Vermutung, dass bei diesen Geometrien entweder nur der Term τ^2 beiträgt oder aber für eine halbflache Geometrie die kovariante Ableitung $\nabla\tau$ im Grenwert kleiner intrinsischer Torsion ebenfalls klein wird und damit die Anforderungen erfüllt.

Eine solche Vermutung erscheint noch aus anderer Hinsicht plausibel. Bei Kompaktifizierung auf K^6 ohne intrinsische Hintergrundflüsse verschwindet der Tensor ric_{K^6}. Bei Kompaktifizierungen unter Präsenz von p-Form-Feldstärken F_{MI}, die zum Energie-Impuls-Tensor beitragen, erhält die Einstein-Gleichung nach [15] Korrekturterme $ric_{K^6} = F^{(i)}_{MI} F^{(i)I}_{N} + \ldots$. Eine derartige Feldstärke ist bei einer verallgemeinerten Kompaktifizierung auf einer halb-flachen

[15] An dieser Stelle wird nicht behauptet, dass es stets eine Deformation von einer halbflachen in eine Calabi-Yau Metrik gibt. Dies ist im allgemeinen aus topologischen Gründen falsch. Hier wird lediglich die Frage nach der Abhängigkeit des Ricci-Tensors von der intrinsischen Torsion gestellt.

Mannigfaltigkeit, wie in Abschnitt 2.5 angegeben, durch $F_4 = d\mathcal{R}e\psi$ gegeben. Die Inhomogenität der Einsteingleichung sollte demnach quadratisch in dem Fluss $d\mathcal{R}e\psi$ und nach Korollar 5.19 damit auch quadratisch in der intrinsischen Torsion sein. Resultiert also ein Fluss aus der nicht-verschwindenden intrinsischen Torsion der $SU(3)$-Struktur auf der kompakten Mannigfaltigkeit, so erscheint es plausibel zu vermuten, dass deren Ricci-Krümmung nur von Termen, die quadratisch in der intrinsischen Torsion sind, also von τ^2, abhängt. Dies wäre insbesondere der Fall, wenn bereits eine Identität der Form $\nabla\tau = \tau^2$ gelten würde.

Ziel der folgenden Untersuchungen ist, diese Hypothese an die Krümmung zu prüfen.

6.2 Ricci-Krümmung speziell hermitescher Mannigfaltigkeiten

6.2.1 Grundlagen zu Krümmungstensoren

Der Krümmungsbegriff ist abhängig von dem zugrunde liegenden Zusammenhang auf TM, hier wird stets bzgl. des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇ gearbeitet. Bezeichnet $\widetilde{\nabla}$ den $SU(3)$-invarianten und $\widehat{\nabla}$ den $U(3)$-invarianten Zusammenhang, so gilt nach Theorem 3.19

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla} &= \nabla + \xi \\ \widetilde{\nabla} &= \nabla + \xi + \alpha(\cdot)J \end{aligned} \tag{6.1}$$

wobei $\xi \in \Gamma\left(\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{u}_3^\perp\right)$ den $U(3)$-Anteil der intrinsischen Torsion und $\xi + \alpha(\cdot)J \in \Gamma\left(\Lambda^1 T^*M \otimes \mathfrak{su}_3^\perp\right)$ die komplette intrinsische Torsion der $SU(3)$-Reduktion bezeichnet, siehe Theorem 3.25. Der riemannsche Krümmungstensor, aufgefasst als Element von $End(TM)$, ist nach Definition 3.16 gegeben durch

$$R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

für Vektorfelder X, Y. Mit der riemannschen Metrik g kann ein gleichwertiger Tensor $R \in \Gamma\left(T^*M^{\otimes 4}\right)$ durch die Auswertungsvorschrift auf Vektorfeldern X, Y, Z, W,

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$

definiert werden. Für Vektorfelder X, Y definiert $Z \mapsto R(Z,X)Y$ einen Endomorphismus. Durch Bildung seiner Spur resultiert die im Folgenden insbesondere relevante Ricci-Krümmung:

$$ric(X,Y) = tr(R(\cdot,X)Y) = -tr(R(X,\cdot)Y)$$

Wie beim Krümmungstensor kann mit Hilfe der Metrik aus $ric \in \Gamma\left(T^*M^{\otimes 2}\right)$ ein eindeutiger Endomorphismus $Ric \in End(TM)$ gewonnen werden, s.d. $g(Ric(X),\cdot) = ric(X,\cdot)$ gilt. Abschließend sei noch die Skalarkrümmung erwähnt, die sich durch erneute Spurbildung aus der Ricci-Krümmung ergibt :

$$scal(m) = tr_{T_mM}(Ric(\cdot,\cdot))$$

Bemerkung 6.1 Der Unterschied des Informationsgehalts dieser Krümmungstensoren ist dimensionsabhängig. Im Falle $dim(M) = 2$ lassen sich Krümmungstensor und Ricci-Krümmung aus der Skalarkrümmung rekonstruieren, für $dim(M) = 3$ besteht diese Abhängigkeit noch zwischen den beiden erstgenannten Tensoren. Erst ab $dim(M) = 4$ besteht eine solche Beziehung i.a. nicht mehr. Da hier ausschließlich gerade-dimensionale Mannigfaltigkeiten diskutiert werden, wird im Folgenden stets $dimM \geq 4$ angenommen, insbesondere ist der hier eigentlich bedeutsame Fall $dim(M) = 6$ enthalten.

Die folgende Proposition listet die wichtigsten Symmetrieeigenschaften der Krümmungstensoren auf (siehe etwa [34]).

Proposition 6.2 *Die Krümmungstensoren haben für Vektorfelder X, Y, Z, W folgende Symmetrieeigenschaften:*

(a) $R(X, Y) = -R(Y, X)$

(b) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$

(c) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

(d) $ric(X, Y) = ric(Y, X)$

Daneben erfüllt R noch die beiden Bianci-Identitäten:

Proposition 6.3 *Für Vektorfelder X, Y, Z, W gilt:*

(a) *1.BI :* $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$

(b) *2.BI :* $\nabla_X R(Y, Z) + \nabla_Y R(Z, X) + \nabla_Z R(X, Y) = 0$

Die Symmetrien (a) und (b) aus Proposition 6.2 sowie die zweite Bianci-Identität verallgemeinern sich auf Krümmungstensoren beliebiger metrischer Zusammenhänge D auf Vektorbündeln. In der 2. Bianci-Identität bezeichnet dann R den Krümmungstensor $R = R^D$ bzgl. dieses allgemeinere Zusammenhangs und ∇ den Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Tangentialbündel. Die erste Bianci-Identität kann aus formalen Gründen nur für Zusammenhänge auf TM gelten an die zusätzlich die Forderung nach Torsionsfreiheit gestellt werden muss.

Zu expliziten Berechnung der Ricci-Krümmung in Termen der intrinsischen Torsion wird die sogenannte Ricci-Formel benötigt (siehe [3] für eine detailliertere Diskussion solcher Identitäten), die iterierte kovariante Ableitungen enthält:

Definition 6.4 *Sei D ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel $E \to M$, $\overline{\nabla}$ eine Zusammenhang auf TM und bezeichne D bzw. $\overline{\nabla}$ ebenfalls den induzierten Zusammenhang auf $T^*M \otimes E$. Dann seien für $s \in \Gamma(E)$ die iterierten kovarianten Ableitungen $D^k_{X_1,\ldots,X_k} s \in \Gamma\left(T^*M^{\otimes k} \otimes E\right)$ wie folgt induktiv definiert:*

(a) $D^2_{X,Y}s := D(Ds)_{X,Y} := D_X(D_Ys) - D_{\overline{\nabla}_XY}s$

(b) $D^k_{X_1,\ldots,X_k}s := (D_{X_1}(D^{k-1}s))_{X_2,\ldots,X_k}$

Bemerkung 6.5 Die Reihenfolge der Vektorfelder $X_1,\ldots,X_k$ ist nicht beliebig, im allgemeinen besteht in diesen Einträgen keine spezielle Symmetrie. Desweiteren ist aus der Definition nicht direkt ersichtlich, dass die so festgelegte Abbildung $D^k_{X_1,\ldots,X_k}$ tensoriell in den eingesetzten Vektorfeldern ist. Dies kann aber leicht gezeigt werden.

Analog zur verallgemeinerten Leibniz-Regel der Analysis einer Veränderlichen resultieren bei mehrfacher Ableitung von Produkten „Mischterme“. Diese werden im Folgenden für den Fall zweifacher Ableitungen angegeben, eine Verallgemeinerung auf höhere Ordnungen ist möglich, wird aber hier nicht benötigt.

Lemma 6.6
(a) Für Tensoren $\phi \in E^{(p,q)}$ und $\psi \in E^{(r,s)}$ gilt:

$$D^2_{X,Y}(\phi \otimes \psi) = D^2_{X,Y}\phi \otimes \psi + D_X\phi \otimes D_Y\psi + D_Y\phi \otimes D_X\psi + \phi \otimes D^2_{X,Y}\psi$$

Insbesondere gilt diese Formel auch für symmetrische und alternierende Produkte.

(b) Für $F \in E^{(p,q)}, G \in E^{(q,r)}$ gilt:

$$D^2_{X,Y}(F \circ G) = D^2_{X,Y}F \circ G + D_XF \circ D_YG + D_YF \circ D_XG + F \circ D^2_{X,Y}G$$

Beweis Beide Regeln folgen aus den Differentiationsregeln der einfachen kovarianten Ableitung durch „Ausmultiplizieren“.

□

Lemma 6.7 *(Ricci-Formel) Seien die Voraussetzungen und Konventionen wie in Definition 6.4 und bezeichne $\overline{T}$ den Torsionstensor von $\overline{\nabla}$ dann gilt:*

$$D^2_{X,Y}s - D^2_{Y,X}s = R^D_{X,Y}s - D_{\overline{T}(X,Y)}s$$

Beweis Einsetzen der Definitionen liefert:

$$\begin{aligned} D^2_{X,Y}s - D^2_{Y,X}s &= D_X(D_Ys) - D_{\overline{\nabla}_XY}s - D_Y(D_Xs) + D_{\overline{\nabla}_YX}s \\ &= D_X(D_Ys) - D_Y(D_Xs) - D_{[X,Y]}s + D_{[X,Y]}s - D_{\overline{\nabla}_XY}s + D_{\overline{\nabla}_YX}s \\ &= R^D(X,Y)s - D_{\overline{T}(X,Y)}s \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.8 Anwendung der Ricci-Formel auf Ds oder kovariante Differentiation mit D_X liefert weitere Identitäten für Ableitungen höherer Ordnung, etwa für Differenzen der Form $D^3_{X,Y,Z}s - D^3_{Y,X,Z}s$, siehe [3], Korollar 1.22.

Für nachfolgende Rechnungen wird noch die Antisymmetrisierungsabbildung aus (3.3) wie folgt verallgemeinert:

Definition 6.9

$$alt_{12} : T^*M \otimes T^*M \otimes \Lambda^2 T^*M \longrightarrow \Lambda^2 T^*M \otimes \Lambda^2 T^*M$$
$$alt_{12}(\varphi \otimes \psi \otimes \chi)(X,Y,Z,W) := (\varphi \otimes \psi(X,Y) - \varphi \otimes \psi(Y,X)) \otimes \chi(Z,W)$$

Eine ähnliche Definition ist auch für Antisymmetrisierung bzgl. beliebiger Einträge möglich.

6.2.2 Ricci-Krümmung und intrinsische Torsion

Bei der Beschreibung der Ricci-Krümmung auf speziell fast-hermiteschen Mannigfaltigkeiten ist die Beziehung zwischen den Krümmungstensoren und den strukturdefinierenden Tensoren (J, ω, ψ) wichtig. Generell dem Zugang in [7] folgend, wird daher die folgende Kombination aus ric und fast-komplexer Struktur J definiert:

Definition 6.10 *Für Vektorfelder X, Y ist die $*$-Ricci-Krümmung definiert als*

$$ric^*(X,Y) := -tr\,(JR(\cdot, X)JY) = \sum_i g(R(E_i, X)JY, JE_i).$$

Wie bei ric resultiert aus ric^* durch Anwendung des metrischen Isomorphismus ein Endomorphismus Ric^*.

Im Gegensatz zu ric ist dieser Tensor im allgemeinen weder symmetrisch noch antisymmetrisch, hat aber bzgl. J folgende Symmetrieeigenschaft:

Proposition 6.11 *Für Vektorfelder X, Y gilt:*

(a) $ric^*(X,Y) = ric^*(JY, JX)$

(b) $ric^*(X, JY) = -ric^*(Y, JX)$

Beweis Teil (b) ergibt sich durch Substitution von $Y \to JY$ direkt aus Teil (a) und dieser folgt aus dem Symmetrien des Krümmungstensors in Proposition 6.2 :

$$\begin{aligned} ric^*(JY, JX) &= -\sum_i g(R(E_i, JY)X, E_i) \\ &= \sum_i g(R(X, E_i)E_i, JY) = \sum_i g(R(E_i, X)JY, E_i) = ric^*(X,Y) \end{aligned}$$

□

Da sich ric und ric^* durch J unterscheiden und dieser Tensor die Reduktion auf $U(3) \supset SU(3)$ vollständig charakterisiert, ist zu erwarten, dass die Differenz der beiden Ricci-Krümmungsterme sich durch $\xi, J, \omega, \widehat{\nabla}$ und ∇ ausdrücken lässt. Nach [7] lässt sich diese Abhängigkeit präzise angeben:

Proposition 6.12 *Sei M^{2n} (speziell)*[16] *fast-hermitesch und X, Y Vektorfelder auf M, dann gilt*[17]*:*

$$\begin{aligned} ric^*(X,Y) - ric(X,Y) &= 2tr((\nabla . J \circ \xi)_X JY) - 2tr((\nabla_X J \circ \xi).JY) \\ &= 2tr((\widehat{\nabla}.\xi)_X Y) - 2tr((\widehat{\nabla}_X \xi).Y) + 2tr(\xi_{\xi.X} Y) - 2tr(\xi_{\xi_X}.Y) \end{aligned}$$

Bemerkung 6.13 Durch Substitution einer Orthonormalbasis ergibt sich auf der rechten Seite der Gleichung offenbar folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} &2\sum_i g((\nabla_{E_i} J \circ \xi)_X JY, E_i) - 2\sum_i g((\nabla_X J \circ \xi)_{E_i} JY, E_i) \\ =&2\sum_i g((\widehat{\nabla}_{E_i}\xi)_X Y, E_i) - 2\sum_i g((\widehat{\nabla}_X \xi)_{E_i} Y, E_i) + 2\sum_i g(\xi_{\xi_{E_i} X} Y, E_i) + 2\sum_i g(\xi_{\xi_X E_i} Y, E_i) \end{aligned}$$

Beweis der Proposition Bezeichne ∇ auch die Fortsetzung des Levi-Civita-Zusammenhangs auf beliebige Tensoren und R alle Krümmungen bzgl. dieser Zusammenhänge. Da ∇ torsionsfrei ist, entfällt der letzte Term der Ricci-Formel (Lemma 6.7) und angewendet auf $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ liefert sie:

$$\begin{aligned} alt_{12}(\nabla^2\omega)_{X,Y}(Z,W) &= (\nabla^2_{X,Y}\omega)(Z,W) - (\nabla^2_{Y,X}\omega)(Z,W) \\ &= (Der(R_{X,Y})\omega)(Z,W) \\ &= -\omega(R_{X,Y}Z,W) - \omega(Z,R_{X,Y}W) \\ &= -g(JR_{X,Y}Z,W) - g(JZ,R_{X,Y}W) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Die Substitution $Y \to E_i$ und $Z \to JY$ liefert mit der Symmetrie des Krümmungstensors aus Proposition 6.2 (b):

$$-g(JR(X,E_i)JY,E_i) - g(J^2Y, R(X,E_i)E_i) = -g(JR(X,E_i)JY,E_i) + g(R(X,E_i)Y,E_i)$$

Summation über i liefert dann nach Definition $ric(X,Y) - ric^*(X,Y)$.

Berechnung der 2.Ableitung von ω ergibt unter Ausnutzung von Lemma 6.6 und $\nabla g = 0$, $\nabla \mathbb{1} = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla^2_{X,E_i}\omega &= \nabla^2_{X,E_i}(g \circ (J \otimes \mathbb{1})) \\ &= \nabla^2_{X,E_i} g \circ (J \otimes \mathbb{1}) + \nabla_X g \circ \nabla_{E_i}(J \otimes \mathbb{1}) + \nabla_{E_i} g \circ \nabla_X (J \otimes \mathbb{1}) + g \circ \nabla^2_{X,E_i}(J \otimes \mathbb{1}) \\ &= g \circ (\nabla^2_{X,E_i} J \otimes \mathbb{1} + \nabla_X J \circ \nabla_{E_i}\mathbb{1} + \nabla_{E_i} J \circ \nabla_X \mathbb{1} + J \circ \nabla^2_{X,E_i}\mathbb{1}) \\ &= g(\ (\nabla_X(\nabla_{E_i}J) - \nabla_{\nabla_X E_i} J)\ \cdot, \cdot) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Durch Umstellen der Gleichung in Proposition 5.27 ergibt sich $\nabla_{E_i} J = 2J \circ \xi_{E_i}$. Substitution dieses Resultats in (6.3) sowie Einsetzen der Vektorfelder JY, E_i liefert dann

[16] An dieser Stelle ist nur die Reduktion auf $U(3)$, also der Torsionsanteil ξ relevant.

[17] In der Formulierung und im Beweis dieser Proposition bezeichnet „$\circ$“ die Verknüpfung von Endomorphismen bzw. bei Elementen aus $T^*M \otimes End(TM)$ die Verknüpfung mit dem Endomorphismus-Faktor. Da dies nicht mit der natürlichen Operation von $End(TM)$ auf diesen Räumen übereinstimmt, wird „$\circ$“ hier explizit angegeben

$$\begin{aligned} alt12(\nabla^2\omega)_{X,E_i}(JY,E_i) &= (\nabla^2_{X,E_i}\omega)(JY,E_i) - (\nabla^2_{E_i,X}\omega)(JY,E_i) \\ &= g\big(\nabla_X(2J\circ\xi_{E_i})(JY) - 2J\circ\xi_{\nabla_X E_i}(JY),E_i\big) - (X\leftrightarrow E_i) \\ &= 2g\big(\nabla_X(J\circ\xi)_{E_i}(JY),E_i\big) - 2g\big(\nabla_{E_i}(J\circ\xi)_X(JY),E_i\big) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Summation über i ergibt die benötigten Spurterme. Zusammen mit (6.2) und der daran anschließenden Diskussion resultiert so die linke Seite aus Bemerkung 6.13, also die erste Identität der Proposition.

Aufgrund von $\{\xi_X,J\}=0$ gilt $[\xi_{E_i},J\circ\xi_X]\circ J=\{\xi_{E_i},\xi_X\}$ und zusammen mit der $U(3)$-Invarianz von J impliziert Lemma 6.6

$$\widehat{\nabla}\xi_X = \widehat{\nabla}(J\circ\xi_X\circ J) = \widehat{\nabla}(J\circ\xi_X)\circ J = J\circ\widehat{\nabla}\xi_X\circ J$$

Unter Verwendung dieser beiden Identitäten sowie (6.1) ergibt sich der Ableitungsterm in (6.4) innerhalb der Metrik zu

$$\begin{aligned} (\nabla_{E_i}J\circ\xi)_X\circ J &= \nabla_{E_i}(J\xi_X)\circ J - J\circ\xi_{\nabla_{E_i}X} \\ &= \widehat{\nabla}_{E_i}(J\circ\xi_X)\circ J - [\xi_{E_i},J\circ\xi_X]\circ J - J\circ\xi_{\widehat{\nabla}_{E_i}X}\circ J + J\circ\xi_{\xi_{E_i}X}\circ J \\ &= \widehat{\nabla}_{E_i}\xi_X - \{\xi_{E_i},\xi_X\} - \xi_{\widehat{\nabla}_{E_i}X} + \xi_{\xi_{E_i}X} \\ &= (\widehat{\nabla}_{E_i}\xi)_X - \{\xi_{E_i},\xi_X\} + \xi_{\xi_{E_i}X} \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in die bisher erhaltene Identität (6.4) liefert die rechte Seite von Bemerkung 6.13 und damit die zweite Behauptung, da sich die Terme, die $\{\xi_{E_i},\xi_X\}$ bzw. $\{\xi_X,\xi_{E_i}\}$ enthalten, gerade herausheben.

□

Aufgrund der vorangehenden Proposition ist es im Folgenden hinreichend, ric^* in Termen der intrinsischen Torsion zu berechnen. Im Gegensatz zu der gerade diskutierten Differenz tritt hier eine Abhängigkeit von der Torsionskomponente $\alpha(\cdot)J\in\mathcal{W}_5$ auf, die durch die Form $\alpha(\cdot)=\alpha(\tau(\cdot))$ (siehe Proposition 5.5) beschrieben wird. An dieser Stelle wird also ein Einfluss der ganzen $SU(3)$-Reduktion bzw. ihrer Torsionskomponenten auf die Krümmung manifest. Nach [7] existiert folgender expliziter Aussdruck:

Proposition 6.14 *Sei M^{2m} eine speziell fast-hermitesche Mannigfaltigkeit und X,Y Vektorfelder auf M, dann gilt:*

$$ric^*(X,Y) = -m\ d\alpha(X,JY) - tr(\xi_X\xi_{JY}J)$$

Bemerkung 6.15 Da J sowie ξ_{JY} schiefe Endomorphismen sind, lässt sich dieser Ausdruck unter Verwendung der Basis $\{E_i\}$ in folgender Form schreiben[18]:

$$ric^*(X,Y) = -m\ d\alpha(X,JY) + \sum_i g(\xi_X E_i,\xi_{JY}JE_i)$$

[18]Beim Vergleich mit der Formel aus [7] ergibt sich ein abweichendes Vorzeichen vor dem zweiten Summanden. Für die qualitative Diskussion der Beiträge der verschiedenen Torsionskomponenten ist dies allerdings nicht von Belang.

Beweis der Proposition Die Aussage wird im Folgenden nur für $m = 3$ bewiesen, da in Kapitel 4.1 nur $SU(3)$-Geometrie diskutiert wurde. Tatsächlich gilt die Aussage allgemein, siehe [7].

Die 1. Bianci-Identität (Proposition 6.3) impliziert $R(X,Y)JE_i = -R(JE_i,X)Y - R(Y,JE_i)X$. Dies erlaubt die Berechnung der Spur von $R(X,Y)J$ ausgedrückt durch ric^*:

$$\begin{aligned} tr(R(X,Y)J) &= -\sum_i \big(g(R(JE_i,X)Y,E_i) + g(R(Y,JE_i)X,E_i)\big) \\ &= -\sum_i \big(g(R(E_i,X)J(JY),JE_i) + g(R(Y,E_i)J(JX),JE_i)\big) \\ &= -\sum_i \big(g(R(E_i,X)J(JY),JE_i) - g(R(E_i,Y)J(JX),JE_i)\big) \\ &= -ric^*(X,JY) + ric^*(Y,JX) = -2ric^*(X,JY) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Symmetrie aus Proposition 6.11 genutzt. Anwendung der Identität aus Proposition 4.22 auf $tr(R(X,Y)J)$ liefert dann

$$ric^*(X,JY) = -\tfrac{1}{2}tr(R(X,Y)J) = -2\,\langle Der(R(X,Y))\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle \tag{6.5}$$

Die Auswertung der rechten Seite erfolgt analog zum Beweis von Proposition 6.12, wie dort für ω folgt hier für $\mathcal{R}e\,\psi$ die Gleichung $alt_{12}(\nabla^2)_{X,Y}\mathcal{R}e\,\psi = Der(R(X,Y))\mathcal{R}e\,\psi$ aus der Ricci-Formel. Die alternierte zweite Ableitung kann dann in 2 Teile zerlegt werden, die im Resultat nur noch mit dem $\mathfrak{u}_3^\perp$- bzw. dem $(\mathfrak{su}_3^\perp \cap \mathfrak{u}_3)$-Anteil der Torsion zu ric^* beitragen:

$$\begin{aligned} &alt_{12}(\nabla^2)_{X,Y}\mathcal{R}e\,\psi \\ &\quad = \nabla_X(\nabla_Y \mathcal{R}e\,\psi) - \nabla_{\nabla_X Y}\mathcal{R}e\,\psi - (X \leftrightarrow Y) \\ &\quad = \nabla_X Der(\xi_Y + \alpha(Y)J)\mathcal{R}e\,\psi - Der(\xi_{\nabla_X Y} + \alpha(\nabla_X Y)J)\mathcal{R}e\,\psi - (X \leftrightarrow Y) \\ &\quad = +Y \lrcorner (\nabla_X(Der(\xi_\cdot)\mathcal{R}e\,\psi)) - 3\nabla_X(\alpha(Y)\mathcal{I}m\,\psi) + 3\alpha(\nabla_X Y)\mathcal{I}m\,\psi \\ &\qquad - X \lrcorner (\nabla_Y(Der(\xi_\cdot)\mathcal{R}e\,\psi)) + 3\nabla_Y(\alpha(X)\mathcal{I}m\,\psi) - 3\alpha(\nabla_Y X)\mathcal{I}m\,\psi \end{aligned} \tag{6.6}$$

Im letzten Schritt wurde $Der(J)\mathcal{R}e\,\psi = -3\mathcal{I}m\,\psi$ verwendet. Der Ausdruck $(X \leftrightarrow Y)$ bezeichnet dabei den jeweils vorangehenden Formelteil ab dem letzten Gleichheitszeichen, mit vertauschten Vektorfeldern X und Y.

Bestimmung des $(\mathfrak{su}_3^\perp \cap \mathfrak{u}_3)$-Anteils:

Mit $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ und der Ableitungsregel

$$d\varphi(X,Y) = X\varphi(Y) - Y\varphi(X) - \varphi([X,Y]) \tag{6.7}$$

für 1-Formen φ (siehe [47]) vereinfachen sich 4 Summanden aus (6.6) zu folgendem Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&-3\nabla_X(\alpha(Y)\mathcal{I}m\,\psi) + 3\alpha(\nabla_X Y)\mathcal{I}m\,\psi + 3\nabla_Y(\alpha(X)\mathcal{I}m\,\psi) - 3\alpha(\nabla_Y X)\mathcal{I}m\,\psi \\
&\quad = -3\big(X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha(\nabla_X Y) + \alpha(\nabla_Y X)\big)\mathcal{I}m\,\psi - 3\alpha(Y)\nabla_X\mathcal{I}m\,\psi + 3\alpha(X)\nabla_Y\mathcal{I}m\,\psi \\
&\quad = -3\big(X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X,Y])\big)\mathcal{I}m\,\psi \\
&\qquad - 3\alpha(Y)Der(\xi_X)\mathcal{I}m\,\psi + 3\alpha(X)Der(\xi_Y)\mathcal{I}m\,\psi - 9\alpha(Y)\alpha(X)\mathcal{R}e\,\psi + 9\alpha(X)\alpha(Y)\mathcal{R}e\,\psi \\
&\quad = -3\,d\alpha(X,Y)\mathcal{I}m\,\psi - 3\alpha(Y)Der(\xi_X)\mathcal{I}m\,\psi + 3\alpha(X)Der(\xi_Y)\mathcal{I}m\,\psi \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Bestimmung des ($u_3^\perp$)-Anteils:

Durch explizites Einsetzen von Vektorfeldern folgt durch Vergleich der Terme die Identität

$$\nabla_X\big(Der(\xi_Y)\mathcal{R}e\,\psi\big) = Der(\nabla_X\xi_Y)\mathcal{R}e\,\psi + Der(\xi_Y)(\nabla_X\mathcal{R}e\,\psi)$$

Damit können die Terme aus (6.6) umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
&Y\lrcorner(\nabla_X(Der(\xi_\cdot)\mathcal{R}e\,\psi)) - X\lrcorner(\nabla_Y(Der(\xi_\cdot)\mathcal{R}e\,\psi)) \\
&\quad = \nabla_X(Der(\xi_Y)\mathcal{R}e\,\psi) - Der(\xi_{\nabla_X Y})\mathcal{R}e\,\psi - \nabla_Y(Der(\xi_X)\mathcal{R}e\,\psi) + Der(\xi_{\nabla_Y X})\mathcal{R}e\,\psi \\
&\quad = Der(\nabla_X\xi_Y)\mathcal{R}e\,\psi + Der(\xi_Y)(\nabla_X\mathcal{R}e\,\psi) - Der(\xi_{\nabla_X Y})\mathcal{R}e\,\psi - (X \leftrightarrow Y) \\
&\quad = Der(\nabla_X\xi_Y - \xi_{\nabla_X Y})\mathcal{R}e\,\psi + Der(\xi_Y)Der(\xi_X)\mathcal{R}e\,\psi - 3\alpha(X)Der(\xi_Y)\mathcal{I}m\,\psi - (X \leftrightarrow Y) \\
&\qquad\qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Die Berechnung des Skalarprodukts in (6.5) kann auf Proposition 4.22 zurückgeführt werden, da für $F \in \mathfrak{u}_3^\perp \subset \mathfrak{so}_6$ wegen $F^t = -F$ und $(FJ)^t = JF = -FJ$ sowohl F als auch FJ spurfrei sind. Für $F = \xi_A, \nabla_A\xi_B$ mit beliebigen Vektorfeldern A, B folgt daher

$$\langle Der(\xi_A)\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle = \langle Der(\xi_A)\mathcal{I}m\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle = \langle Der(\nabla_A\xi_B)\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle = 0 \qquad (6.10)$$

Für den Beitrag des $\mathfrak{su}_3^\perp \cap \mathfrak{u}_3$-Anteils ergibt sich dann aus (6.8) und (6.10)

$$\begin{aligned}
&-3\,\langle\nabla_X(\alpha(Y)\mathcal{I}m\,\psi) - \alpha(\nabla_X Y)\mathcal{I}m\,\psi - \nabla_Y(\alpha(X)\mathcal{I}m\,\psi) + \alpha(\nabla_Y X)\mathcal{I}m\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle \\
&\qquad = -3d\alpha(X,Y)\,\langle\mathcal{I}m\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle = -\tfrac{3}{2}d\alpha(X,Y) \qquad (6.11)
\end{aligned}$$

Unter Einbeziehung von (6.10) und der Identitäten aus Proposition 4.22 kann der $\mathfrak{u}_3^\perp$-Beitrag aus (6.9) wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
&\langle Y\lrcorner(\nabla_X(Der(\xi_\cdot)\mathcal{R}e\,\psi)) - X\lrcorner(\nabla_Y(Der(\xi_\cdot)\mathcal{R}e\,\psi)), \mathcal{I}m\,\psi\rangle \\
&= \langle Der(\xi_Y)Der(\xi_X)\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle - \langle Der(\xi_X)Der(\xi_Y)\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle \\
&= \langle[Der(\xi_Y), Der(\xi_X)]\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle \\
&= \langle Der([\xi_Y, \xi_X])\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi\rangle \\
&= \tfrac{1}{4}tr([\xi_Y, \xi_X]J) = -\tfrac{1}{2}tr(\xi_X\xi_Y J) \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

Die Tatsache, dass $Der(\cdot)$ und $[\cdot,\cdot]$ vertauschen ergibt sich dabei direkt aus der Definition 4.5.

Aus (6.11) und (6.12) ergibt sich mit (6.5) die ric^*-Krümmung in Abhängigkeit der Torsionskomponenten:

$$ric^*(X, JY) = -2 \left\langle alt_{12}(\nabla^2_{X,Y})\mathcal{R}e\,\psi, \mathcal{I}m\,\psi \right\rangle = 3d\alpha(X,Y) + tr(\xi_X \xi_Y J)$$

Die Substitution $Y \to JY$ liefert die Behauptung.

□

Zusammenfügen der Propositionen 6.12 und 6.14 ergibt dann den gesuchten Ausdruck für die Ricci-Krümmung:

Proposition 6.16 *Sei M^{2n} eine speziell fast-hermitesche Mannigfaltigkeit und X, Y Vektorfelder auf M, dann gilt:*

$$\begin{aligned} ric(X,Y) = &-n\; d\alpha(X, JY) + tr(\xi_X \xi_{JY} J) - 2tr((\widehat{\nabla}.\xi)_X Y) \\ &+ 2tr((\widehat{\nabla}_X \xi).Y) - 2tr(\xi_{\xi.X} Y) + 2tr(\xi_{\xi_X}.Y) \end{aligned}$$

Eine Darstellung der Spuren mit Hilfe einer lokalen Orthonormalbasis kann ebenfalls direkt aus den Bemerkungen zu den zitierten Propositionen abgelesen werden.

6.3 Torsionsbeiträge zur Ricci-Krümmung

In [44], [18] und darauf aufbauend in [7] wurde die Zerlegung des Raumes der formalen Krümmungstensoren[19] in irreduzible $U(3)$- bzw. $SU(3)$-Komponenten angegeben und die Beiträge der verschiedenen Torsionskomponenten zu diesen Summanden tabellarisch dargestellt. Auf ähnliche Art und Weise wird in [7] mit der Ricci- und $*$-Ricci-Krümmung verfahren. Im Folgenden sollen die Zerlegungen von beiden Krümmungsausdrücken auf Basis der Torsionszerlegung aus den vorangehenden Kapitel entwickelt werden.

Die Zerlegung des Raumes der formalen Ricci- und $*$-Ricci-Tensoren kann im wesentlichen auf die in Kapitel 5 diskutierte Zerlegung von $End(TM)$ in irreduzible Komponenten zurückgeführt werden, da es sich in beiden Fällen nach Definition um Elemente von $T^*M \otimes T^*M \cong TM \otimes T^*M \cong End(TM)$ handelt. Die dort vorgenommene Aufspaltung bzgl. (Anti-)Symmetrie und $\mathbb{C}$-(Anti-)Linearität übersetzt sich dann im Rahmen der verwendeten Identifizierung $End(TM) \ni A \cong g(A\cdot,\cdot) \in T^*M \otimes T^*M$ in die folgende Zerlegung von (0,2)-Tensoren, die sich direkt durch Einsetzen der Formeln aus Lemma 5.1 und 5.2 in die Metrik ergibt:

[19] Das Wort „formal" dient hier zur Klarstellung, dass an dieser Stelle lediglich algebraische Eigenschaften der Tensoren berücksichtigt werden, d.h. es werden Tensoren mit den gleichen Symmetrieeigenschaften und Verträglichkeitseigenschaften mit J betrachtet. Es wird keine Aussage über die Realisierbarkeit als Krümmungstensor einer riemannschen Mannigfaltigkeit gemacht.

Lemma 6.17 *Für einen Tensor $\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ existieren die zwei folgenden Zerlegungen:*

(a) symmetrisch/antisymmetrisch : $\sigma = \sigma^+ + \sigma^-$ mit symmetrischem bzw. antisymmetrischen Anteil definiert durch

$$\sigma^\pm(X,Y) := \tfrac{1}{2}(\sigma(X,Y) \pm \sigma(Y,X))$$

(b) J-invariant/J-antiinvariant : $\sigma = \sigma^{J+} + \sigma^{J-}$ mit J-invariantem bzw. J-antiinvariantem Anteil definiert durch

$$\sigma^{J\pm}(X,Y) := \tfrac{1}{2}(\sigma(X,Y) \pm \sigma(JX,JY))$$

Diese Anteile erfüllen für die Operation von J als Gruppenelement die Gleichung

$$J \cdot \sigma^\pm = \sigma(J^{-1}\cdot, J^{-1}\cdot) = \pm\sigma$$

Proposition 6.18 *Der Raum $T^*M \otimes T^*M$ zerfällt als $SU(3)$-Darstellung in die Komponenten*

$$\begin{aligned} T^*M \otimes T^*M \cong (\mathbb{R}g \oplus J_{(1)}\left[\Lambda_0^{1,1}\right]) \oplus \left[\!\left[Sym^{2,0}\right]\!\right] \qquad & (\cong \mathrm{Sym}^2(T^*M)) \\ \oplus\, (\mathbb{R}\omega \oplus \left[\Lambda_0^{1,1}\right]) \oplus \left[\!\left[\Lambda^{2,0}\right]\!\right] \qquad & (\cong \Lambda^2(T^*M)) \end{aligned}$$

Die formalen Ricci-Tensoren liegen in folgenden Unterräumen dieser Dekomposition:

$$\begin{aligned} ric &\in \mathbb{R}g \oplus J_{(1)}\left[\Lambda_0^{1,1}\right] \oplus \left[\!\left[Sym^{2,0}\right]\!\right] \\ ric^* &\in \mathbb{R}g \oplus J_{(1)}\left[\Lambda_0^{1,1}\right] \oplus \left[\!\left[\Lambda^{2,0}\right]\!\right] \end{aligned}$$

Beweis Da die Metrik invariant unter $SU(3)$ ist, induziert sie einen Isomorphismus von Darstellungen $T^*M \otimes T^*M \cong End(TM)$, s.d. die Zerlegung aus Proposition 5.8 übernommen werden kann. Mit den Isomorphismen (siehe auch Kapitel 4.3 und 4.4 sowie [43])

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathbb{1}_{TM} &\cong \mathbb{R}g & \mathbb{R}J &\cong \mathbb{R}\omega \\ J\mathfrak{su}_3(M) &\cong J_{(1)}\left[\Lambda_0^{1,1}\right] & \mathfrak{su}_3 &\cong \left[\Lambda_0^{1,1}\right] \\ \left[\!\left[Sym^2(TM^{1,0})\right]\!\right] &\cong \left[\!\left[Sym^{2,0}\right]\!\right] & \left[\!\left[\Lambda^{2,0}TM\right]\!\right] &\cong \left[\!\left[\Lambda^{2,0}\right]\!\right] \end{aligned}$$

folgt dann die Behauptung. Die Klammerung in der Aussage ist dabei so gewählt, dass die 4 Summanden gerade den 4 Kästchen in der Tabelle aus Proposition 5.8 entsprechen.

Da ric symmetrisch ist, gibt es wie angegeben nur Anteile in $\mathrm{Sym}^2 T^*M$. Berechnung der J-(anti)-invarianten Anteile von ric^* liefert mit den Symmetrien aus Lemma 6.17:

$$ric^{*\,J\pm}(X,Y) = \tfrac{1}{2}\left[ric^*(X,Y) \pm ric^*(JX,JY)\right] = \tfrac{1}{2}\left[ric^*(X,Y) \pm ric^*(Y,X)\right]$$

Folglich ist der J-invariante Term symmetrisch und der J-anti-invariante Term antisymmetrisch. Das zeigt die Behauptung.

$\square$

Die Propositionen 6.14 und 6.16 besagen, wie die intrinsische Torsion zu ric bzw. ric^* beiträgt. Ganz allgemein ist ersichtlich, dass sie nur in Form der Tensoren

$$\widehat{\nabla}\xi = \widetilde{\nabla}\xi - \alpha(\cdot)J\xi \qquad\qquad \xi \otimes \xi \qquad\qquad d\alpha$$

eingehen kann. Da die vorangehende Proposition zusätzlich die Symmetrien der einzelnen irreduziblen Summanden der Ricci-Tensoren aufzeigt, kann identifiziert werden, welche Torsionsanteile in welchem Summanden beitragen können. Die Symmetrien des $U(3)$-Anteils der intrinsischen Torsion können einfacher aus dem Endomorphismus $A \in End(TM)$, der der Bedingung $[A]^\psi_X = \xi_X$ genügt, als aus ξ_X selbst abgelesen werden, daher werden zunächst entsprechende Ausdrücke für $\widetilde{\nabla}\xi$ sowie $\widehat{\nabla}\xi$ ausgedrückt durch A und $\widehat{\nabla}A$ angegeben.

Proposition 6.19 *Für die kovarianten Ableitungen $\widetilde{\nabla}\xi$ und $\widehat{\nabla}\xi$ der $U(3)$-Torsion und Vektorfelder U, X, Y gilt:*

$$\begin{aligned}(\widehat{\nabla}_U\xi)_X Y &= {}^\flat\mathcal{R}e\,\psi((\widehat{\nabla}_U A)X, Y, \cdot) + 3\alpha(U)\xi_X JY\\ &= {}^\flat\mathcal{R}e\,\psi((\widetilde{\nabla}_U A)X, Y, \cdot) - \alpha(U)(J\xi)_X Y\end{aligned}$$

Beweis Da $\widetilde{\nabla}$ metrisch bzgl. g ist, ergibt sich aus der Definition in Proposition 5.7:

$$\begin{aligned}&g((\widehat{\nabla}_U\xi)_X Y, Z)\\ &= g(\widehat{\nabla}_U(\xi_X Y), Z) - g(\xi_{\widehat{\nabla}_U X}Y, Z) - g(\xi_X\widehat{\nabla}_U Y, Z)\\ &= \widehat{\nabla}_U g(\xi_X Y, Z) - g(\xi_X Y, \widehat{\nabla}_U Z) - g(\xi_{\widehat{\nabla}_U X}Y, Z) - g(\xi_X\widehat{\nabla}_U Y, Z)\\ &= \widehat{\nabla}_U(\mathcal{R}e\,\psi(AX, Y, Z)) - \mathcal{R}e\,\psi(A\widetilde{\nabla}_U X, Y, Z) - \mathcal{R}e\,\psi(AX, \widetilde{\nabla}_U Y, Z) - \mathcal{R}e\,\psi(AX, Y, \widetilde{\nabla}_U Z)\\ &= (\widehat{\nabla}_U\mathcal{R}e\,\psi(A\cdot, \cdot, \cdot))(X, Y, Z)\end{aligned}$$

Mit $(\widehat{\nabla}_U A)X = \widehat{\nabla}_U(AX) - A(\widehat{\nabla}_U X)$ und $\widehat{\nabla} = \widetilde{\nabla} - \alpha J$ und Proposition 4.14 folgt damit weiter:

$$\begin{aligned}g((\widehat{\nabla}_U\xi)_X Y, Z) &= \mathcal{R}e\,\psi((\widehat{\nabla}_U A)X, Y, Z) + (\widehat{\nabla}_U\mathcal{R}e\,\psi)(AX, Y, Z)\\ &= \mathcal{R}e\,\psi((\widehat{\nabla}_U A)X, Y, Z) - \alpha(U)(Der(J)\mathcal{R}e\,\psi)(AX, Y, Z)\\ &= \mathcal{R}e\,\psi((\widehat{\nabla}_U A)X, Y, Z) + 3\alpha(U)\mathcal{R}e\,\psi(AX, JY, Z)\end{aligned}$$

Dies zeigt Teil den ersten Teil der Aussage. Der zweite Teil folgt daraus durch erneutes Einsetzen von $\widetilde{\nabla}_U = \widehat{\nabla}_U - \alpha(U)J$:

$$\begin{aligned}(\widehat{\nabla}_U\xi)_X Y &= {}^\flat\mathcal{R}e\,\psi((\widetilde{\nabla}_U A)X, Y, \cdot) - {}^\flat\mathcal{R}e\,\psi(\alpha(U)[J, A]X, Y, \cdot) + 3{}^\flat\mathcal{R}e\,\psi(\alpha(U)AX, JY, \cdot)\\ &= {}^\flat\mathcal{R}e\,\psi((\widetilde{\nabla}_U A)X, Y, \cdot) - 2\alpha(U)J\xi_X Y + \alpha(U)\xi_{JX}Y\\ &= {}^\flat\mathcal{R}e\,\psi((\widetilde{\nabla}_U A)X, Y, \cdot) - \alpha(U)(J\xi)_X Y\end{aligned}$$

□

Auswertung aller auftretenden Terme liefert dann das folgende, auch in [7] angegebene Theorem:

Theorem 6.20 *Sei $(M^6, g, \omega, \mathcal{R}e\psi)$ eine speziell fast-hermitesche, sechsdimensionale Mannigfaltigkeit mit intrinsischer Torsion $\xi + \alpha J$, dann gibt die folgende Tabelle Beiträge der Torsion zu ric^* (linke Spalte) und ric (rechte Spalte), wobei der positive Fall mit „+“ bzw. „$\boxplus$“ („$\boxplus$“ kennzeichnet die Anteile, die auch im halbflachen Fall beitragen können), der negative mit „-“gekennzeichnet ist:*

	ric^*			ric		
	$\mathbb{R}g$	$J_{(1)}\left[\Lambda_0^{1,1}\right]$	$[\![\Lambda^{2,0}]\!]$	$\mathbb{R}g$	$J_{(1)}\left[\Lambda_0^{1,1}\right]$	$[\![Sym^{(2,0)}]\!]$
$d\alpha$	+	+	+	+	+	-
$\widetilde{\nabla}\xi_1^\pm, \alpha J\xi_1^\pm$	-	-	-	-	-	-
$\widetilde{\nabla}\xi_2^\pm, \alpha J\xi_2^\pm$	-	-	-	-	-	$\boxplus$
$\widetilde{\nabla}\xi_3, \alpha J\xi_3^\pm$	-	-	-	-	$\boxplus$	-
$\widetilde{\nabla}\xi_4, \alpha J\xi_4^\pm$	-	-	-	+	+	+
$\xi_1^\pm \otimes \xi_1^\pm$	$\boxplus$	-	-	$\boxplus$	-	-
$\xi_2^\pm \otimes \xi_2^\pm$	$\boxplus$	$\boxplus$	-	$\boxplus$	$\boxplus$	-
$\xi_3 \otimes \xi_3$	$\boxplus$	$\boxplus$	-	$\boxplus$	$\boxplus$	$\boxplus$
$\xi_4 \otimes \xi_4$	+	+	-	+	+	+
$\xi_1^+ \cdot \xi_1^-$	-	-	-	-	-	-
$\xi_1^\pm \cdot \xi_2^\pm$	-	$\boxplus$	-	-	$\boxplus$	-
$\xi_1^\pm \cdot \xi_2^\mp$	-	-	-	-	-	-
$\xi_1^\pm \cdot \xi_3$	-	-	-	-	-	$\boxplus$
$\xi_1^\pm \cdot \xi_4$	-	-	+	-	-	-
$\xi_2^+ \cdot \xi_2^-$	-	+	-	-	+	-
$\xi_2^\pm \cdot \xi_3$	-	-	$\boxplus$	-	-	$\boxplus$
$\xi_2^\pm \cdot \xi_4$	-	-	+	-	-	+
$\xi_3 \cdot \xi_4$	-	+	-	-	+	-

Beweis Nach Proposition 6.14 und 6.16 zerfallen die beiden Krümmungsausdrücke für ric und ric^* in einen Summanden, der über $d\alpha$ nur von $\mathcal{P}_5(\tau)$ abhängt sowie weitere Summanden, die nur von der Reduktion der Strukturgruppe auf $U(3)$ abhängen, da $\widehat{\nabla}$ den minimalen

$U(n)$-Zusammenhang bezeichnet. Die Beiträge von $d\alpha$ (1. Tabellenzeile) werden in Lemma 6.21 diskutiert.

In [18] wird für $U(3)$-Strukturen die Abhängigkeit des riemannschen Krümmungstensor von der intrinsischen Torsion dieser Struktur diskutiert und gezeigt, dass dieser nur von $\xi_i \cdot \xi_j$ (oder gleichbedeutend $\xi_i \otimes \xi_j$ für $i = j$) abhängt, also keine Terme $\xi_i \wedge \xi_j$ auftreten. Folglich hängen auch ric und ric^* nicht von derartigen Termen ab, dies kann auch direkt aus (6.15) - (6.17) gefolgert werden. Damit sind in der angegebenen Tabelle alle Torsionsanteile aufgelistet, die zu den Krümmungen beitragen, wobei die $U(3)$-Komponenten in $SU(3)$-irreduzible Summanden zerlegt wurden. Die Aufspaltung des Tensors $\widehat{\nabla}\xi$ in $\widetilde{\nabla}\xi$ und $\alpha J\xi$ folgt dabei aus Proposition 6.19.

Die Beiträge von $\widehat{\nabla}\xi$ zu ric sind in Lemma 6.22 explizit diskutiert, die in der Proposition angegebene Tabelle ergibt sich durch Zusammenfassen beider Tabellenhälften des Lemmas. ric^* hängt nach 6.14 nicht von $\widehat{\nabla}\xi$ ab. Auf einen kompletten Beweis aller Tabelleneinträge wird an dieser Stelle verzichtet, da vor hier allem Terme, die potentiell von 1. Ordnung in ξ sein könnten, von Interesse sind. Lemma 6.22 diskutiert exemplarisch die $\xi_i \otimes \xi_i$-Abhängigkeit von ric, die verbleibenden Einträge können auf analoge Art und Weise aus (6.15) - (6.17) abgeleitet werden.

□

Lemma 6.21 *Der Summand $d\alpha(\cdot, J\cdot)$ aus Proposition 6.14 und 6.16 trägt zu allen Komponenten von ric^* sowie zu den Komponenten $\mathbb{R}g \oplus J_{(1)}\left[\Lambda_0^{1,1}\right]$ von ric bei.*

Beweis Projektion der Form $d\alpha(\cdot, J\cdot)$ auf den J-(anti)invarianten Anteil liefert:

$$(d\alpha(\cdot, J\cdot))^{J\pm}(X,Y) = \tfrac{1}{2}\Big(d\alpha(X,JY) \pm d\alpha(JX, J^2Y)\Big) = \tfrac{1}{2}\Big(d\alpha(X,JY) \pm d\alpha(Y,JX)\Big)$$

Folglich ist der J-invariante Anteil symmetrisch, der antiinvariante Anteil schiefsymmetrisch. Nach Proposition 6.18 existiert damit kein $[\![\mathrm{Sym}^{2,0}]\!]$-Beitrag zu ric, während für ric^* keinerlei Restriktion folgt.

□

Lemma 6.22 *Die kovariante Ableitung $\widehat{\nabla}\xi$ des $U(3)$-Anteils der intrinsischen Torsion trägt über die Summanden $tr((\widehat{\nabla}.\xi)_X Y)$ und $tr((\widehat{\nabla}_X\xi).Y)$ in Proposition 6.16 wie folgt zu ric bei:*

	$tr((\widehat{\nabla}.\xi)_X Y)$			$tr((\widehat{\nabla}_X\xi).Y)$		
	$\mathbb{R}g$	$J_{(1)}[\Lambda_0^{1,1}]$	$[\![Sym^{(2,0)}]\!]$	$\mathbb{R}g$	$J_{(1)}[\Lambda_0^{1,1}]$	$[\![Sym^{(2,0)}]\!]$
$\widehat{\nabla}\xi_1^\pm$	-	-	-	-	-	-
$\widehat{\nabla}\xi_2^+$	-	-	+	-	-	-
$\widehat{\nabla}\xi_2^-$	-	-	+	-	-	-
$\widehat{\nabla}\xi_3$	-	+	-	-	-	-
$\widehat{\nabla}\xi_4$	+	+	-	+	+	+

Beweis Durch Ausschreiben der Spur folgt aus Proposition 6.19:

$$tr((\widehat{\nabla}.\xi)_X Y) = \sum_i \mathcal{R}e\,\psi((\widehat{\nabla}_{E_i}A)X, Y, E_i) + 3\alpha(E_i)Re\psi(AX, JY, E_i) \tag{6.13}$$

$$tr((\widehat{\nabla}_X\xi).Y) = \sum_i \mathcal{R}e\,\psi((\widehat{\nabla}_X A)E_i, Y, E_i) + 3\alpha(X)Re\psi(AE_i, JY, E_i) \tag{6.14}$$

Da $\widehat{\nabla}$ ein metrischer $U(3)$-Zusammenhang ist, weist $\widehat{\nabla}_X A$ die gleichen Symmetrien (d.h. symmetrisch/schief sowie $\mathbb{C}$-linear/$\mathbb{C}$-antilinear) wie A auf. Desweiteren gilt $\widehat{\nabla}_X A \in \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{1})$, falls A in $C^\infty(M) \otimes \mathbb{1}$ liegt, und aufgrund von $\widehat{\nabla}J = 0$ folgt die entsprechende Eigenschaft auch für $A \in C^\infty(M) \otimes J$. In beiden Fällen sind die Ableitungen wieder skalare Vielfache von $\mathbb{1}$ bzw. J. Damit weisen die beiden Summanden in (6.13) bzw. (6.14) jeweils die gleichen Symmetrieeigenschaften auf. Da das Verschwinden der Beiträge einiger Torsionskomponenten im Folgenden auf diese Symmetrieeigenschaften zurückgeführt wird, genügt es, aus beiden Gleichungen jeweils den ersten Summanden (inklusive Summation über i) zu betrachten.

- Werden in (6.13) Endomorphismen, die ein Vielfaches von $\mathbb{1}$ oder J sind, eingesetzt, so resultiert ein Ausdruck, der antisymmetrisch in X und Y ist. Folglich gibt es keine Beiträge von $\widehat{\nabla}\xi_1^\pm$ in der linken Tabellenhälfte geben. In (6.14) verschwindet der Beitrag vollständig, denn zum Beispiel gilt
$$\sum_i \mathcal{R}e\,\psi(JE_i, Y, E_i) = \sum_i \mathcal{R}e\,\psi(E_i, Y, JE_i) = -\sum_i \mathcal{R}e\,\psi(JE_i, Y, E_i),$$
Damit gibt es auch keine Beiträge von $\widehat{\nabla}\xi_1^\pm$ in der rechten Tabellenhälfte.
- Ist S ein symmetrischer Endomorphismus, so gilt wegen $S_{ij} = S_{ji}$ allgemein
$$\sum_i \mathcal{R}e\,\psi(SE_i, Y, E_i) = \sum_{ij} \mathcal{R}e\,\psi(E_j, Y, S_{ji}E_i) = \sum_j \mathcal{R}e\,\psi(E_j, Y, SE_j)$$
Folglich verschwinden derartige Summanden. Dies zeigt, dass in der rechten Tabellenhälfte keine Beiträge aus $\widehat{\nabla}\xi_1^+, \widehat{\nabla}\xi_2^+$ und $\widehat{\nabla}\xi_3$ resultieren.

- Für $A \in End(TM)^{\pm,J+}$ folgt aus diesen Symmetrien

  $\mathcal{R}e\,\psi(\widehat{\nabla}_{E_i}A\cdot,\cdot,E_i)^{J+}(X,Y) = \frac{1}{2}(\mathcal{R}e\,\psi((\widehat{\nabla}_{E_i}A)X,Y,E_i)+\mathcal{R}e\,\psi((\widehat{\nabla}_{E_i}A)JX,JY,E_i)) = 0.$

  Folglich tragen $\widehat{\nabla}\xi_1^\pm$ und $\widehat{\nabla}\xi_2^\pm$ nicht zu $\mathbb{R}g \oplus J_{(1)}[\Lambda_0^{1,1}]$ auf der linken Seite bei. Mit derselben Begründung (mit umgekehrten Vorzeichen) tragen $\widehat{\nabla}\xi_3$ und $\widehat{\nabla}\xi_4$ auf dieser Seite nicht zu $[\![\mathrm{Sym}^{2,0}]\!]$ bei.

- Für $A \in End(TM)^{-,J+}$ ist $JA = AJ$ symmetrisch. Mit dem oben auf symmetrische Endomorphismen angewendeten Argument folgt:

$$\sum_i \mathcal{R}e\,\psi((\widehat{\nabla}_X A)E_i, Y, E_i) = -\sum_i \mathcal{R}e\,\psi(J(\widehat{\nabla}_X A)E_i, JY, E_i) = 0$$

  Damit trägt die Komponente $\widehat{\nabla}\xi_2^-$ auf der rechten Seite der Tabelle nicht bei.

- Für $A \in End(TM)^{+,J-}$ gilt analog zu dem oben verwendeten Argument:

$$\sum_{ij} \mathcal{R}e\,\psi((\widehat{\nabla}_{E_i}A)E_j, E_j, E_i) = 0$$

  Es existiert demnach kein Beitrag von $\widehat{\nabla}\xi_3$ zu $\mathbb{R}g$ auf der linken Tabellenhälfte.

Alle anderen mit „+“ gekennzeichneten Kombinationen liefern im allgemeinen nichttriviale Beiträge zur Ricci-Krümmung, da die entsprechenden Terme nicht aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Endomorphismus A verschwinden. Es kann gezeigt werden, dass es möglich ist, $A \in End(TM)$ und damit $\xi = [A]^\psi$ (zumindest lokal) so zu wählen, dass diese Anteile tatsächlich beitragen.

□

Lemma 6.23 *Die Tensoren $\xi_1^\pm \otimes \xi_1^\pm$ und $\xi_2^\pm \otimes \xi_2^\pm$ tragen über die Summanden $tr(\xi_X\xi_{JY}J)$, $tr(\xi_{\xi.X}Y)$ und $tr(\xi_{\xi_X}.Y)$ in Proposition 6.16 wie folgt zur Ricci-Krümmung bei:*

$ric \in \mathbb{R}g$	*für Torsionsbeiträge der Form* $\xi_1^\pm \otimes \xi_1^\pm$
$ric \in \mathbb{R}g \oplus J_1[\Lambda_0^{1,1}]$	*für Torsionsbeiträge der Form* $\xi_2^\pm \otimes \xi_2^\pm$

Beweis Für die erste angegebene Spur ergibt sich mit der Definition des Endomorphismus A in (5.1) durch Entwicklung des Endomorphismus ξ_X in der Orthonormalbasis $\{E_i\}$:

$$\begin{aligned} tr(\xi_X\xi_{JY}J) &= -\sum_i g(\xi_{JY}JE_i,\xi_X E_i) = -\sum_i \mathcal{R}e\,\psi(AJY,JE_i,\xi_X E_i) \\ &= -\sum_{ij} \mathcal{R}e\,\psi(AJY,JE_i,g(\xi_X E_i,E_j)E_j) \\ &= -\sum_{ij} \mathcal{R}e\,\psi(AJY,JE_i,E_j)\mathcal{R}e\,\psi(AX,E_i,E_j) \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ganz analog können die beiden anderen Terme umgeformt werden:

$$tr(\xi_{\xi.X}Y) = \sum_{ij} \mathcal{R}e\,\psi(AE_j, Y, E_i)\mathcal{R}e\,\psi(AE_i, X, E_j) \tag{6.16}$$

$$tr(\xi_{\xi_X}.Y) = \sum_{ij} \mathcal{R}e\,\psi(AE_j, Y, E_i)\mathcal{R}e\,\psi(AX, E_i, E_j) \tag{6.17}$$

Die Behauptung ergeben sich dann wie folgt aus den Symmetrien von A:

- Ist A ein Vielfaches von $\mathbb{1}$ oder J, so haben die Ausdrücke aus (6.15), (6.16), (6.17) die Form $const \cdot \sum_i \mathcal{R}e\,\psi(X, E_i, E_j)\mathcal{R}e\,\psi(Y, E_i, E_j)$ und sind nach Lemma 4.9 (b) ein Vielfaches von g.
- Für $A \in End(TM)^{J+}$ ergibt sich für den Term in (6.15) nach der Substitution $E_i \to JE_i$:

$$\begin{aligned} -\sum_{ij} &\mathcal{R}e\,\psi(AJ(JY), JE_i, E_j)\mathcal{R}e\,\psi(A(JX), E_i, E_j) \\ &= -\sum_{ij} \mathcal{R}e\,\psi(AJY, JE_i, E_j)\mathcal{R}e\,\psi(AX, E_i, E_j) \end{aligned}$$

  Also ist dieser Term ist J-invariant. Die Anteile aus (6.16) und (6.17) genügen derselben Symmetrie, folglich tragen sie ebenso nicht zum J-antiinvariantem Teil $[\![\mathrm{Sym}^{2,0}]\!]$ von ric bei.

Bei geeigneter (lokaler) Wahl der intrinsischen Torsion gibt es dagegen Beiträge von $\xi_i^\pm \otimes \xi_i^\pm$ zu den Komponenten von ric, die im Lemma angegeben sind.

□

Halbflache Mannigfaltigkeiten genügen der Bedingung $\xi_1^+ = \xi_2^+ = \xi_4 = \alpha J = 0$. Damit tragen zu ric^* bzw. ric nur noch diejenigen Anteile der intrinsischen Torsion bei, die in Theorem 6.20 mit „⊞“ markiert sind. Folglich kann eine erste Antwort auf die Frage gegeben werden, ob die Ricci-Krümmung einer halbflachen Mannigfaltigkeit notwendigerweise nur solche Terme enthält, die von 2.Ordnung in der Torsion bzw. in ihren Ableitungen sind. In der expliziten Formel aus Proposition 6.16 haben alle Terme diese Eigenschaft mit Ausnahme von

$$-2tr((\widehat{\nabla}.\xi)_X Y) + 2tr((\widehat{\nabla}_X\xi).Y)$$

Über die beiden Summanden kann an dieser Stelle keine Aussage gemacht werden, a priori können hier Terme von 1.Ordnung auftreten. Im Prinzip könnte noch $\widehat{\nabla} = \nabla + \xi$ substituiert werden, da aber über $\nabla\xi$ keine Aussage getroffen werden kann, führt das an dieser Stelle nicht weiter. Zusammenfassend ergibt sich:

Korollar 6.24 *Aufgrund darstellungstheoretischer Überlegungen kann nicht ausgeschlossen werden, dass der Ricci-Tensor halbflacher Mannigfaltigkeiten Terme enthält, die von maximal*

1.Ordnung in der intrinsischen Torsion sind. Eine hinreichende Bedingung ist nach Theorem 6.20 und Lemma 6.21 durch die Spurfreiheit der Tensoren $X \mapsto (\widehat{\nabla}_X \xi)_Y Z$ *für beliebige* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *gegeben. Dies ist insbesondere der Fall, wenn die intrinsische Torsion parallel bzgl. des* $U(3)$*-Zusammenhangs ist. Die* $(*)$*-Ricci-Krümmung einer halbflachen Mannigfaltigkeit ist dagegen immer von 2. Ordnung in der Torsion.*

Bemerkung 6.25 Die im vorangehenden Korollar genannte Bedingung $\widehat{\nabla}\xi = 0$ ist tatsächlich eine starke Restriktion. Nach [12] (Theorem 5.14) kann dies lediglich in 4 Fällen auftreten:

(a) (M,g) ist lokal isometrisch zu einem nicht-symmetrischen, isotrop irreduziblem homogenen Raum

(b) (M,g) ist lokal isometrisch zu $(G \times G)/G$ oder $(G \otimes \mathbb{C})/G$.

(c) (M,g) hat schwache Holonomie $SU(3)$ oder G_2

(d) $\widehat{\nabla}$ ist torsionsfrei

(d) ist der triviale Fall und (b) sowie schwache Holonomie G_2 können aus Dimensionsgründen nicht auftreten. Also muss die Struktur entweder der Restriktion aus (a) genügen oder schwache Holonomie $SU(3)$ haben. Im zweiten Fall wäre sie zusätzlich zu halbflach auch Nearly Kähler (siehe [24]), nach Proposition 5.24 läge ihre intrinsische Torsion also in $\mathcal{W}_1^-$, sie wäre auf einen eindimensionalen Unterraum eingeschränkt . Aus der Tabelle in Theorem 6.20 folgt, dass es sich dann bereits um eine Einstein-Mannigfaltigkeit handelt. Angesichts der Tatsache, dass quadratische Torsionsterme als Korrektur zur homogenen Einsteingleichung in der Anwendung in der Physik auftreten dürfen, wäre die Einschränkung auf den Nearly-Kähler-Fall sehr restriktiv.

Bemerkung 6.26 Umgekehrt folgt für eine halbflache Struktur unter einer der beiden Zusatzannahmen

(a) ric ist von 2.Ordnung in τ

(b) Die Mannigfaltigkeit ist Einstein

aus den hier dargelegten darstellungstheoretischen Argumenten nicht notwendigerweise, dass die Struktur bereits Nearly Kähler ist. Im Fall (a) wäre es denkbar, dass $\widehat{\nabla}\xi$ zu 2. Ordnung in der Torsion beiträgt. Die Tabelle zeigt weiter, dass im Fall (b) Torsionsanteile in $\mathcal{W}_2^- \oplus \mathcal{W}_3$ auftreten, deren Beiträge zu ric in $J_{(1)}[\Lambda^1, 1_0]$ bzw. zu $[\![\mathrm{Sym}^{2,0}]\!]$ liegen und die sich bei geeigneter Wahl der Torsion prinzipiell herausheben könnten.

6.4 Ein Beispiel von Torsionsbeiträgen 1. Ordnung

Nach Proposition 6.16 sowie Korollar 6.24 ist es nicht notwendig, dass im Falle halbflacher Mannigfaltigkeiten die intrinsische Torsion erst in 2.Ordnung zu ric beiträgt. Aus der Form dieser „störenden "Terme ist nicht ersichtlich, warum sie im betrachteten Fall immer verschwinden sollten. Um explizit zu zeigen, dass diese Terme nicht-trivial sein und damit beitragen können, wird im Folgenden ein Beispiel diskutiert, dessen Torsion in $\mathcal{W}^{1-} \oplus \mathcal{W}^{2-} \oplus \mathcal{W}^3$ liegt und bei dem die angesprochenen Anteile zu ric (computergestützt) berechnet werden können. Zur Vereinfachung wird im Folgenden nur der Anteil

$$ric^{\nabla\xi}(X,Y) := tr((\nabla_X \xi).Y) - tr((\nabla.\xi)_X Y)$$

betrachtet, denn wegen $\widehat{\nabla} = \nabla + \xi$ sind alle anderen Anteile zu ric in jedem Fall quadratisch in ξ.

Das Beispiel stammt aus der Klasse der kompakten Nilmannigfaltigkeiten N^6, dies sind kompakte Quotienten von nilpotenten Lie-Gruppen[20] G. Es kann gezeigt werden (siehe [8] sowie die dort aufgeführten Referenzen), dass diese Mannigfaltigkeiten stets parallelisierbar sind, also das $TN^6 \cong T^*N^6$ trivialisierbar sind. Damit ist es möglich, eine globale Basis $(E_1, \ldots, E_6)$ aus Vektorfeldern bzw. $\{E^i\}$ (duale Basis) aus 1-Formen zu wählen, diese entsprechen invarianten Vektorfeldern bzw. 1-Formen auf G. Aus der Nilpotenz folgt, dass diese Basis derart gewählt werden kann, dass für die äußeren Ableitungen dE^i (hier bezeichnet $\{dE^i\}$ nicht die zu $\{E^i\}$ duale Basis) gilt:

$$dE^i \in \Lambda^2 span(E^1, \ldots, E^{i-1})$$

Vermöge der Differentiationsregel (6.7) existiert hier eine enge Beziehung zwischen Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ in $[E_i, E_j] = \sum_k T_{ijk} E_k$, $\mathfrak{g}$ aufgefasst als linksinvariante Vektorfelder auf N, und den Ableitungen:

$$T_{ijk} = E^k([E_i, E_j]) = E_i E^k(E_j) - E_j E^k(E_i) - dE^k(E_i, E_j) = -dE^k(E_i, E_j) \qquad (6.18)$$

Die Metrik g wird durch die Forderung, dass $\{E_i\}$ Orthonormalbasis ist, fixiert und für die fast-komplexe Struktur sowie (den Realteil) der komplexen Volumenform der Einfachheit halber die Standardstruktur aus 4.8 gewählt:

$$g = \sum_i E^i \otimes E^i \qquad\qquad J = \sum_\alpha E_{2\alpha-1} \wedge E_{2\alpha} \qquad (6.19)$$
$$\mathcal{R}e\,\psi = \frac{\sqrt{2}}{4}(E^{135} - E^{146} - E^{236} - E^{245})$$

Prinzipiell können, siehe etwa [9] oder [1], an dieser Stelle auch andere Tensoren gewählt werden, die dann entsprechend andere geometrische Eigenschaften implizieren. Die Geometrie wird, im Hinblick auf die folgende Berechnung des Levi-Civita-Zusammenhangs vor allem durch die Festlegung der Ausdrücke dE_i fixiert.

[20] Eine zusammenhängende Lie-Gruppe G heißt dabei nilpotent, wenn ihre Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ nilpotent ist. Dies bedeutet, dass die absteigende Zentralreihe nach endlich vielen Schritten den Wert 0 erreicht :

$$\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^N := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{N-1}] = (0)$$

$\mathfrak{g}$ heißt dann auch N-stufig nilpotent

Zur Berechnung der Torsionsbeiträge zu *ric* werden kovariante Ableitungen benötigt. Da die Lieklammern der Vektorfelder $\{E_i\}$ in den betrachteten Modellen nach (6.18) bekannt sind, kann ∇ nach der Koszul-Formel (siehe [34]) berechnet werden:

Lemma 6.27 *Der Levi-Civita-Zusammenhang bzgl. g ist eindeutig durch die folgende Identität festgelegt:*

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big(&Xg(Y,Z) - Zg(X,Y) + Yg(Z,X) \\ &-g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X])\Big) \end{aligned}$$

Speziell für Ableitungen der Form $\nabla_{E_i} E_j$ lassen sich wegen $g(E_i, E_j) = const$ die Entwicklungskoeffizienten in der Orthonormalbasis leicht berechnen. Da $\widehat{\nabla}, \widetilde{\nabla}$ via (6.1) aus ∇ berechnet werden können, impliziert das folgende Lemma, dass Terme der Form $\nabla_{E_i} E_j$ bereits ausreichend sind :

Lemma 6.28 *Ein Ausdruck der Form $(\nabla_X \xi)_Y Z$ ist tensoriell in allen drei Vektorfeldern X, Y, Z, d.h für $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt:*

$$(\nabla_{fX}\xi)_{gY}(hZ) = fgh \cdot (\nabla_X \xi)_Y Z$$

Beweis Die Tensorialität in X folgt direkt aus der des Zusammenhangs ∇_X. Im zweiten Eintrag ergibt sich aus der Definition des Zusammenhangs:

$$\begin{aligned} (\nabla_X \xi)_{gY} Z &= \nabla_X(\xi_{gY} Z) - \xi_{gY}(\nabla_X Z) - \xi_{\nabla_X(gY)} Z \\ &= dg(X)\nabla_X(\xi_Y Z) + g\nabla_X(\xi_Y Z) + g\xi_Y(\nabla_X Z) - \xi_{(dg(X)Y + g\nabla_X Y)} Z \\ &= g\nabla_X(\xi_Y Z) + g\xi_Y(\nabla_X Z) - g\xi_{\nabla_X Y} Z \\ &= g \cdot (\nabla_X \xi)_Y Z \end{aligned}$$

Die Tensorialität in Z kann ganz analog bewiesen werden.

□

Für Vektorfelder $X = \sum_i f_i E_i, Y = \sum_j g_j E_j$ und $Z = \sum_k h_k E_k$ ergibt sich folglich

$$\begin{aligned} (\nabla_X \xi)_Y Z &= \sum_{ijk} f_i g_j h_k (\nabla_{E_i}\xi)_{E_j} E_k \\ &= \sum_{ijk} f_i g_j h_k \left(\nabla_{E_i}(\xi_{E_j} E_k) - \xi_{E_j}(\nabla_{E_i} E_k) - \xi_{\nabla_{E_i} E_j}(E_k)\right) \end{aligned} \tag{6.20}$$

Diese Formel enthält nur kovariante Ableitung der Vektorfelder $\{E_i\}$, für eine Implementierung auf dem Computer erscheint es daher sinnvoll, ∇_{E_i} als lineare Abbildung auf dem Vektorraum $\mathbb{R}E_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}E_6$ aufzufassen und in Form einer 6×6-Matrix anzugeben. Matrixdarstellungen für Levi-Civita-Zusammenhang ∇ und intrinsischer Torsion ergeben sich dann aus Lemma 6.27:

$$(\nabla_{E_i})_{kj} = g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) = -g(E_i, [E_j, E_k]) + g(E_k, [E_i, E_j]) + g(E_j, [E_k, E_i]) \tag{6.21}$$
$$(\xi_{E_i})_{kj} = (-\tfrac{1}{2} J(\nabla_{E_i} J))_{kj} = -\tfrac{1}{2}(J \circ \nabla_{E_i} \circ J)_{kj} - \tfrac{1}{2}(\nabla_{E_i})_{kj} \tag{6.22}$$

Diese Formeln wurden in `MAPLE` implementiert, der einfache Programmcode ist im Anhang beigefügt.

Beispiel Iwasawa-Mannigfaltigkeit Wie in Korollar 6.24 diskutiert ist eine parallele intrinsische Torsion hinreichend für das Verschwinden aller Beiträge erster Ordnung in der Torsion zu der Ricci-Krümmung. In [2] 4.4 sowie [20] wird gezeigt, dass die intrinsische Torsion der im Folgenden diskutierte Heisenberggruppe bzw. der Iwasawa-Mannigfaltigkeit nicht parallel ist und nur Beiträge zur Komponente $\mathcal{W}^3$ liefert, also die vorliegende $SU(3)$-Struktur halbflach ist. Diese $SU(3)$-Mannigfaltigkeit bietet sich damit als Kandidat für ein Gegenbeispiel an.

Die komplexe Heisenberggruppe G_H ist definiert durch

$$G_H := \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

Die komplexen Koordinaten z_1, z_2, z_3 induzieren dann die invarianten holomorphen 1-Formen $\alpha_1 := dz_1, \alpha_2 := dz_2, \alpha_3 := z_1 dz_2 - dz_3$, die offenbar den Relationen $d\alpha_1 = d\alpha_2 = 0$ sowie $d\alpha_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2$ genügen. Nach dem Übergang zu reellen Koordinaten durch $\alpha_1 = E^1 + iE^2$, $\alpha_2 = E^3 + iE^4$ und $\alpha_3 = E^5 + iE^6$ resultieren die Relationen

$$\begin{aligned} dE^i &= 0 \qquad\qquad \text{für } i = 1,2,3,4 \\ dE^5 &= E^1 \wedge E^3 - E^2 \wedge E^4 \\ dE^6 &= E^1 \wedge E^4 + E^2 \wedge E^3 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Daraus ergeben sich direkt alle nicht-trivialen Lieklammern:

$$\begin{aligned} [E_1, E_3] &= -[E_3, E_1] = -[E_2, E_4] = [E_4, E_2] = -E_5 \\ [E_1, E_4] &= -[E_4, E_1] = -[E_2, E_3] = [E_3, E_2] = -E_6 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Berechnung nach (6.21) und (6.22) liefert dann die Matrixdarstellungen des Levi-Civita-Zusammenhangs und der intrinsischen Torsion zu:

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} &= +\tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{35} + \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{46} & \nabla_{E_2} &= +\tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{36} - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{45} \\ \nabla_{E_3} &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{15} - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{26} & \nabla_{E_4} &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{16} + \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{25} \\ \nabla_{E_5} &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{13} + \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{24} & \nabla_{E_6} &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{14} - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{E_1} &= 0 & \xi_{E_2} &= 0 \\ \xi_{E_3} &= 0 & \xi_{E_4} &= 0 \\ \xi_{E_5} &= +\tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{13} - \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{24} & \xi_{E_6} &= +\tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{14} + \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_{23} \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\mathcal{E}_{ij}$ die Matrix, deren einzige nicht-triviale Elemente $+1$ an der Stelle (i,j) sowie -1 an der Stelle (j,i) sind. Durch Einsetzen dieser Resultate in (6.20) kann der Term 1.Ordnung in Proposition 6.16 direkt berechnet werden, es ergibt sich

$$2\sum_i g((\nabla_{E_i}\xi)_{E_j}E_k, E_i) - 2\sum_i g((\nabla_{E_j}\xi)_{E_i}E_k, E_i) = C_j\delta_{jk}$$
$$\text{mit } C_j = 3 \text{ für } j = 1,2,3,4 \text{ und } C_j = 2 \text{ für } j = 5,6$$

d.h die gesuchten Beiträge $ric^{(\nabla\xi)}$ zur Ricci-Krümmung ergeben sich für $X = \sum_i X^i e_i$ und $Y = \sum_j Y^j e_j$ insgesamt als

$$ric^{(\nabla\xi)}(X,Y) = 3\sum_{i=1}^{4} X^iY^i + 2\sum_{i=5}^{6} X^iY^i$$

Folglich ist ein Beispiel identifiziert, in dem die kovariante Ableitung $\nabla\xi$ bei einer halbflachen Mannigfaltigkeit zur Ricci-Krümmung beiträgt.

Dies ist allerdings erst ein Indiz, dass Terme in erster Ordnung auftreten können, da $\nabla\xi$ quadratisch in ξ sein könnte. Dies kann durch Reskalierung der intrinsischen Torsion überprüft werden. Eine Transformation $\xi \to t\xi$ für $t \in \mathbb{R}$ führt dann zu einer induzierten Transformation

$$ric^{\nabla\xi} \to ric^{(\nabla t\xi)} \sim (t^\delta + \ldots)ric^{(\nabla\xi)}$$

wobei δ den kleinsten Exponenten in der Entwicklung der t-Abhängigkeit bezeichnet. Für $\delta < 2$ kann dann direkt auf Terme erster Ordnung geschlossen werden. Die intrinsische $U(3)$-Torsion ist allerdings nicht beliebig skalierbar sondern wird nach Proposition 5.27 durch (g, J) bestimmt, d.h. jede Transformation muss durch Änderungen an diesen Tensoren realisiert werden. Es existieren damit folgende Möglichkeiten einer Änderung:

(a) Skalierung von ∇ durch Abänderung von g:
Aus (6.21) ist ersichtlich, dass eine Skalierung der Lie-Klammern in (6.24), induziert durch eine Multiplikation der nicht-trivialen Differentiale in (6.23) mit t, zu veränderten Objekten führt: $\nabla \to t\nabla$ sowie $\xi \to t\xi$. Diese naive Konstruktion impliziert aber die Skalierung $\nabla\xi \to t^2\nabla\xi$, produziert also immer quadratische Terme und ist daher hier unbrauchbar.

(b) Skalierung von J:
Eine direkte Skalierung von J ist unzulässig, da für fast-komplexe Strukturen die Bedingung $J^2 = -\mathbb{1}$ erfüllt sein muß. In [1] wird gezeigt, dass die Menge der fast-komplexen Strukturen auf der Iwasawa-Mannigfaltigkeit isomorph zu $\mathbb{CP}^3$ ist. Es ist also möglich, Einparameterfamilien[21] fast-komplexer Strukturen bzw. von $U(3)$-Strukturen zu betrachten. Dies wird im Folgenden an einem einfachen Beispiel durchgeführt.

[21] Eine Einparameterfamilie ist hier eine glatte Abhängigkeit des Tensors/ der Tensoren von einem reellen Parameter t

Neben der fast-komplexen Struktur in (6.19) definiert auch

$$J_1 := E_1 \wedge E_2 - E_3 \wedge E_4 - E_5 \wedge E_6$$

eine fast-komplexe Struktur auf der Iwasawa-Mannigfaltigkeit, bzgl. derer $\mathcal{R}e\,\psi$ eine (3,0)+(0,3)-Form ist. Allgemeiner folgt aus der Darstellung in der expliziten Basis, dass dies für alle Tensoren der Form

$$J_\theta := E_{12} + \cos\theta(E_{34} + E_{56}) + \sin\theta(-E_{34} - E_{56})$$

der Fall ist. Tatsächlich definiert J_θ eine Einparameterfamilie orthogonaler fast-komplexer Strukturen, denn eine Rechnung mit Matrizen zeigt $\{E_{34}, E_{56}\} = 0$ und damit

$$\begin{aligned}(J_\theta)^2 &= E_{12}^2 + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)E_{34}^2 + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)E_{56}^2 + \cos\theta\sin\theta\{E_{34}, E_{56}\}\\ &= E_{12}^2 + E_{34}^2 + E_{56}^2 = -\mathbb{1}\end{aligned}$$

Die Orthogonalität ergibt sich dann sofort mit $J_\theta^{-1} = -J_\theta = J_\theta^t$. Damit wurde eine Einparameterfamilie von $SU(3)$-Strukturen $(g, J_\theta, \mathcal{R}e\,\psi)$ definiert, die J in J_1 deformiert. Mit Hilfe von Proposition 5.26 kann unter Verwendung von $\omega_\theta \cong J_\theta$ leicht die Halbflachheit der Struktur geprüft werden. Aus den Differentialen in (6.23) folgt:

$$\begin{aligned}\omega_\theta \wedge d\omega_\theta &= (\cos\theta - \sin\theta)\omega_\theta \wedge (dE^5 \wedge E^6 - E^5 \wedge dE^6)\\ &= (\cos\theta - \sin\theta)(E^{12} + (\cos\theta - \sin\theta)(E^{34} + E^{56})) \wedge (E^{136} - E^{246} - E^{514} - E^{523})\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\mathcal{R}e\,\psi &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}(E^{13} \wedge dE^5 - E^{14} \wedge dE^6 - E^{23} \wedge dE^6 - E^{24} \wedge dE^5)\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}(-E^{1324} - E^{1423} - E^{2314} - E^{2413})\\ &= 0\end{aligned}$$

Dies zeigt die Halbflachheit. Durch die Umbenennung $a := \cos\theta$ und $\sin\theta = \sqrt{1-a^2} = 1 - a^2/2 - \ldots$ für $a \in [0,1]$ kann diese Struktur leicht in das `MAPLE`-Programm eingefügt werden. Da sich ∇_{E_i} nicht ändert, ist nur intrinsische Torsion neu zu berechnen:

$$\begin{aligned}\xi_{E_1} &= -\tfrac{a}{2}\sqrt{1-a^2}(\mathcal{E}_{35} + \mathcal{E}_{46}) & \xi_{E_2} &= -\tfrac{a}{2}\sqrt{1-a^2}(\mathcal{E}_{36} - \mathcal{E}_{45})\\ \xi_{E_3} &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{1-a^2}(\mathcal{E}_{15} + \mathcal{E}_{26}) & \xi_{E_4} &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{1-a^2}(\mathcal{E}_{16} - \mathcal{E}_{25})\\ \xi_{E_5} &= +\tfrac{a^2}{2}(\mathcal{E}_{13} - \mathcal{E}_{24}) & \xi_{E_6} &= +\tfrac{a^2}{2}(\mathcal{E}_{14} + \mathcal{E}_{23})\end{aligned}$$

Für $a = 1$ werden erwartungsgemäß die alten Resultate reproduziert. Die Anteile $\xi_{E_i},\ i = 1,2,5,6$ sind mindestens erster Ordnung in a während $\xi_{E_i},\ i = 3,4$ nullter Ordnung in diesem Deformationsparameter sind, d.h es wird nicht die gesamte intrinsische Torsion in mindestens erster Ordnung in a skaliert. Folglich lässt sich das Skalierungsargument zunächst nicht anwenden, denn aufgrund der genannten Terme könnte die Torsion ausschließlich quadratisch in ric eingehen obwohl die Krümmung selbst in niedrigerer Ordnung von a abhängt. Sollten die beiden Anteile $\xi_{E_i},\ i=3,4$ allerdings nach dem Einsetzen geeigneter Vektorfelder X,Y in $ric^{(\nabla\xi)}$ nicht beitragen, wäre das Argument zulässig. Um zu prüfen, ob dies bereits für die Vektorfelder $\{E_i\}$ der Fall ist, werden die beiden Terme ξ_{E_3} und ξ_{E_4} zusätzlich mit einem formalen Parameter $c \in \mathbb{R}^+$ multipliziert. Die Berechnung der Ausdrücke $ric^{(\nabla\xi)}(E_i,E_j)$ liefert dann folgende von Null verschiedene Werte für ric:

$$\begin{aligned}
ric^{(\nabla\xi)}(E_1,E_1) &= ric^{(\nabla\xi)}(E_2,E_2) = \tfrac{1}{2}ca^2 - \tfrac{1}{2}c + \tfrac{3}{2}a^2 \\
ric^{(\nabla\xi)}(E_3,E_3) &= ric^{(\nabla\xi)}(E_4,E_4) = \tfrac{a}{2}(3a - \sqrt{1-a^2}) \\
ric^{(\nabla\xi)}(E_5,E_5) &= ric^{(\nabla\xi)}(E_6,E_6) = (1-\tfrac{c}{2})a^2 + \tfrac{a}{2}\sqrt{1-a^2} + \tfrac{c}{2}
\end{aligned}$$

Für $a = c = 1$ werden erneut die bekannten Ergebnisse reproduziert. Da in den Werten $ric^{(\nabla\xi)}(E_i,E_i),\ i=3,4$ kein Parameter c auftritt, gehen in diese Terme nur die Torsionsbeiträge $\xi_{E_i},\ i=1,2,5,6$ ein. Sowohl diese Beiträge als auch der Summand zur Ricci-Krümmung sind erster Ordnung in a, ein Beitrag ξ^2 kann für $i=3,4$ keinen Term von kleinerer Ordnung als 2 in a liefern. Folglich kann die intrinsische Torsion nicht ausschließlich quadratisch zu ric beitragen. Die Anfang des Kapitels vorgestellte Vermutung ist falsch. Als Konsequenz kann auch die Relation $\nabla\tau = \tau^2$ nicht für beliebige halbflache Mannigfaltigkeiten gelten. Die schwächere Forderung, dass ric im Grenzwert kleiner Torsion ebenfalls klein wird, wird von diesem Beispile aber nicht verletzt.

A Anhang : `Maple`-Programmcode

Im Folgenden wird der `Maple`-Programmcode, auf dem die Rechnungen in Kapitel 6 basieren, angegeben und kurz kommentiert. Kommentare sind *italic* gesetzt und stehen unterhalb des Bereichs, auf den sie sich beziehen, Programmcode ist im `typewriter`-Stil gesetzt.

```
with(LinearAlgebra):

e := array(1..6):
or i from 1 to 6 do e[i]:= Vector(6,shape = unit[i]): end do:
```

Implementierung der Basisvektorfelder

```
L := Array(1..6,1..6):
for i from 1 to 6 do
  for j from 1 to 6 do
     L[i,j] := Vector([0,0,0,0,0,0]):
  end do:
end do:
L[1,3]:= -1*e[5]: L[3,1] := e[5]:
L[1,4]:= -1*e[6]: L[4,1] := e[6]:
L[2,3]:= -1*e[6]: L[3,2] := e[6]:
L[2,4]:=    e[5]: L[4,2] := -1*e[5]:
```

Implementierung der Lieklammern und Eintrag der von Hand berechneten nicht-trivialen Einträge

```
Z := Array(1..6): for i from 1 to 6 do Z[i] := Matrix(6) end do:
for i from 1 to 6 do
  for j from 1 to 6 do
    for k from 1 to 6 do
      Z[i][k,j] := 1/2*(-1*DotProduct(e[i],L[j,k])+DotProduct(e[k],L[i,j])
                  +DotProduct(e[j],L[k,i])):
    end do:
  end do:
end do:
```

Implementierung und Berechnung der Matrixdarstellung von ∇ auf Basis der Koszul-Formel

```
J := Matrix(6,[[0,-1,0,0,0,0],[1,0,0,0,0,0],[0,0,0,-1,0,0],
              [0,0,1,0,0,0],[0,0,0,0,0,-1],[0,0,0,0,1,0]]):
```

Definition der fast-komplexen Struktur

```
T := Array(1..6): for i from 1 to 6 do T[i] := Matrix(6) end do:
for i from 1 to 6 do T[i] := -1/2*J.Z[i].J - 1/2*Z[i] end do:
```

Implementierung und Berechnung der intrinsischen Torsion in Matrixform

```
UZ := Array(1..6): for i from 1 to 6 do UZ[i] := Matrix(6) end do:
for i from 1 to 6 do UZ[i] := Z[i] + T[i]: end do:
```

Implementierung und Berechnung der Matrixdarstellung von $\widehat{\nabla}$

```
TT := Array(1..6,1..6):
for i from 1 to 6 do
  for j from 1 to 6 do
    TT[i,j] := Matrix(6):
    TT[i,j]:= UZ[i][1,j]*T[1] + UZ[i][2,j]*T[2] + UZ[i][3,j]*T[3]
            + UZ[i][4,j]*T[4] + UZ[i][5,j]*T[5] + UZ[i][6,j]*T[6]
  end do:
end do:
```

Implementierung und Berechnung von $\xi_{\widehat{\nabla}_{E_i}E_j}$

```
X := 1; Y := 1;
Wert := 0;
for i from 1 to 6 do
  Wert := Wert
    + DotProduct(UZ[X].T[i].e[Y] - T[i].UZ[X].e[Y]-TT[i,X].e[Y],e[i])-
      DotProduct(UZ[i].T[X].e[Y] - T[X].UZ[i].e[Y]-TT[X,i].e[Y],e[i]):
end do:
```

Berechnung des Terms $-tr((\widehat{\nabla}.\xi)_X Y) + tr((\widehat{\nabla}_X \xi).Y)$

```
TT2 := Array(1..6,1..6);
for i from 1 to 6 do
  for j from 1 to 6 do
    TT2[i,j] := Matrix(6);
    TT2[i,j]:= Z[i][1,j].T[1] + Z[i][2,j].T[2] + Z[i][3,j].T[3]
             + Z[i][4,j].T[4] + Z[i][5,j].T[5] + Z[i][6,j].T[6];
  end do;
end do;
```

Implementierung und Berechnung von $\xi_{\nabla_{E_i}E_j}$

```
X := 1; Y := 1;
Wert2 := 0;
for i from 1 to 6 do
```

```
  Wert2 := Wert2
    + DotProduct(Z[X].T[i].e[Y] - T[i].Z[X].e[Y]-TT2[i,X].e[Y],e[i])-
      DotProduct(Z[i].T[X].e[Y] - T[X].Z[i].e[Y]-TT2[X,i].e[Y],e[i]):
end do:
```

Berechnung des Terms $-tr((\nabla.\xi)_X Y) + tr((\nabla_X \xi).Y)$

Literatur

[1] E.Abbena, S.Garbiero, S.Salamon, „Almost Hermitian Geometry on Six Dimensional Nilmanifolds“, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) Vol. XXX (2001) 147.

[2] B.Alexandrov, T.Friedrich, N.Schoemann, „Almost Hermitian 6-manifolds revisited “, J. Geom. Phys. 53 (2005), no. 1, 1–30, math.DG/0403131

[3] A.Besse, „Einstein Manifolds“, Springer Verlag, Berlin, 1987.

[4] R.Bishop, R.Crittenden, „Geometry of Manifolds“, Pure and Applied Mathematics XV, Academic Press, New York, 1964.

[5] T.Bröcker, T.tom Dieck, „Representations of Compact Lie Groups“, Graduate Texts in Mathematics 98, Springer Verlag, New York, 1985.

[6] F.Cabrera, „Special almost Hermitian geometry“, math.DG/0409167

[7] F.Cabrera, A.Swann, „Curvature of (Special) Almost Hermitian Manifolds“, math.DG/0501062

[8] S.Chiossi, „Special Riemannien Structures in Dimension 6 and 7“, Ph.D. thesis, Universita degli Studi di Genua, Genua, 2002.

[9] S.Chiossi, S.Salamon, „The Intrinsic Torsion of $SU(3)$ and G_2 Structures“, in Differential Geometry, Valencia, 2001, pp.115, math.DG/0202282

[10] S.Chiossi, A.Swann, „G_2-Structures with Torsion from half-integrable Nilmanifolds “, math.DG/0404554

[11] R.Cleyton, „G-Structures and Einstein Metrics“, Ph.D. thesis, University of Southern Denmark, Odense, 2001.

[12] R.Cleyton, A.Swann, „Einstein metrics via intrinsic or parallel torsion“, math.DG/0211446

[13] A.Connes, „Noncommutative Geometry“, Academic Press, San Diego, 1994.

[14] J.Dieudonne, „Grundzüge der modernen Analysis“, Vol. 3 & 4, Logik und Grundlagen der Mathematik 18 & 19, Friedr. Vieweg Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig, 1976.

[15] B. de Wit, D.Smit, N. Hari Dass, „Residual Supersymmetry of compactified d=10 Supergravity“, Nucl. Phys. B283 (1987) 165-191.

[16] M.Duff, B.Nilsson, C.Pope, „Kaluza-Klein supergravity“, Phys. Rept. 130 (1986) 1.

[17] S.Eidelman et.al., „Review of particle physics 2004“, Phys. Lett., B 592 (2004) 1-1109.

[18] M.Falcitelli, A.Farinola, S.Salamon, „Almost-Hermitian geometry“, Diff. Geom. Appl. 4 (1994) 259.

[19] P.Freund, „Introduction to Supersymmetry“, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[20] T.Friedrich, S.Ivanov, „Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory“, Asian J. Math. 6 (2002), no. 2, 303–335, math.DG/0102142

[21] W.Fulton, J.Harris, „Representation Theory“, Graduate Texts in Mathematics 129, Springer Verlag, New York, 1991.

[22] J.Gracia-Bondia, J.Varilly, H.Figueroa, „Elements of Noncommutative Geometry“, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Boston, 2001.

[23] S.Gurrieri, A.Micu, „Type IIB Theory on Half-flat Manifolds“, hep-th/0212278.

[24] A.Gray, „Weak Holonomy Groups“, Math.Z. 123 (1971), 290-300.

[25] M.Graña, „Flux compactifications in string theory: a comprehensive review“, hep-th/0509003.

[26] A.Gray, L.Hervella, „The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and their Linear Invariants“, Ann. Mat. Pura. Appl. 123 (1980) 35.

[27] M.Green, J.Schwartz, E.Witten, „Superstring theory“2 Vols, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[28] S.Gurrieri, J.Louis, A.Micu, D.Waldram, „Mirror Symmetry in Generalized Calabi-Yau Compactifications, Nucl. Phys. B654 (2003) 61, hep-th/0211102

[29] B.Hall, „Lie Groups, Lie Algebras, and Representations“, Graduate Texts in Mathematics 222, Springer Verlag, New York, 2003.

[30] N.Hitchin, „Stable forms and special metrics“, in „The Mathematical Legacy of Alfred Gray“, Vol. 288 von Contemp. Math., 70-89, American Math. Soc., 2001.

[31] S.Hosono, A.Klemm, S.Theisen, „Lectures on mirror symmetry“, in „Helsinki 1993, Proceedings, Integrable models and strings“, 235-280, hep-th/9403096.

[32] D.Huybrechts, „Complex Geometry“, Springer Universitext, Springer Verlag, Berlin, 2005.

[33] D.Joyce, „Compact Manifolds with Special Holonomy“, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[34] S.Kobayashi, K.Nomizu, „Foundations of Differential Geometry“2 Vols., Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, New York, 1963.

[35] H.Lawson, M.Michelson, „Spin-Geometry“, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[36] A.Micu, „Background Fluxes in Type II String Compactifications“, Dissertation, Universität Hamburg, Hamburg, 2003.

[37] C.Misner, K.Thorne, J.Wheeler, „Gravitation“, W.H. Freeman and Company, New York, 1973.

[38] G.Naber, „Topology, Geometry, and Gauge Fields“, 2 Vols., Applied Mathematical Sciences 141, Springer Verlag, New York, 2000.

[39] O.Nachtmann, „Elementarteilchenphysik“, Friedr. Vieweg Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig, 1986.

[40] M. Nakahara, „Geometry, Topology and Physics“, Graduate Student Series in Physics, Institute of Physics Publishing, Bristol, 2003.

[41] J.Polchinski, „String Theory“, 2 Vols., Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[42] J.Polchinksy, „TASI Lectures on D-Branes“, hep-th/9611050

[43] S.Salamon, „Riemannian Geometry and Holonomy Groups“, Pitman Research Notes Math. 201, Longman, 1989.

[44] F.Tricicerri, L. Vanhecke, „Curvature Tensors on Almost Hermitian Manifolds“, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981) 365.

[45] C.Vafa, „Lectures on Strings and Dualities“, hep-th/9702201

[46] C.Vafa, „Superstrings and topological Strings at large N“, hep-th/0008142

[47] F.Warner, „Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups“, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer Verlag, New York, 1983.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel erstellt habe. Mit der Einsichtnahme erkläre ich mich einverstanden.

Hamburg, den 13. April 2006